

УДК 532.58

©2003. В.Р. Скворцов, В.Е. Койсин, С.Ю. Крахмалев

ДИНАМИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПЛАСТИНОЙ НА УПРУГОМ СЛОЕ И ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

В статье исследуется упругая реакция двухслойной пластины на локальные динамические нагрузки в плоской и осесимметричной постановках. Разрешающие уравнения выведены на основе статических уравнений Ляме для внутреннего слоя и динамической теории Кирхгоффа-Лява для лицевого слоя. С помощью интегральных преобразований Фурье (Ганкеля) и Лапласа получено замкнутое решение для реакции пластины на импульсное воздействие, которое обобщено на случай произвольной внешней нагрузки. Также получено замкнутое решение для случая точечного контактного взаимодействия с ударником. Решения позволяют предсказать начало разрушения слоев пластины. Проведено сравнение аналитического решения с данными численного эксперимента.

Введение. Трехслойные композитные конструкции (сэндвич-конструкции), состоящие из двух тонких жестких наружных слоев и склеенного с ними толстого легкого внутреннего слоя (наполнителя), обладают повышенными механическими характеристиками по сравнению с однослойными конструкциями. В то же время, одним из их недостатков является относительно малая локальная прочность. По этой причине реакция сэндвич-конструкций на сосредоточенные нагрузки имеет значительную локальную составляющую. Наиболее важной составляющей анализа прочности конструкции является предсказание предельного уровня локальных нагрузок, при котором в наполнителе или лицевом слое начинаются необратимые деформации [1].

Для моделирования лицевых слоев обычно применяется теория тонких пластин в постановке Кирхгоффа-Лява, в то время как модели наполнителя можно разделить на две группы. В первой группе он представляется как упругое основание типа Винклера с алгебраической связью между прогибами лицевого слоя и нормальными напряжениями в наполнителе. Термин "*алгебраическая*" означает, что напряжения в любой точке интерфейса зависят только от перемещения в этой точке и не зависят от перемещений его остальной части. Этот подход применен в ряде исследований [2, 3], но его принципиальная недостаточность для полного описания локальных эффектов достаточно очевидна [4].

Во второй группе решений наполнитель рассматривается как упругая среда [5, 6]. Для ее описания применяется теория упругости, позволяющая установить интегральную связь между деформациями лицевого слоя и напряжениями в наполнителе. Термин "*интегральная*" означает взаимосвязанность напряженно-деформированного состояния всех точек интерфейса. Этот подход успешно применен и в настоящей статье, и при помощи интегральных преобразований получены замкнутые решения для случаев заданного внешнего точечного возбуждения и удара сосредоточенной массой. Полученные аналитические решения сравниваются с результатами вычислений по МКЭ.

1. Физическая и математическая модели. Рассматривается три типа задач: в постановке плоского напряженного, плоского деформированного и осесимметричного состояний. Панель состоит из двух тонких, нерастяжимых лицевых слоев толщинами h_f и относительно толстого слоя низко модульного легкого наполнителя толщиной h_c . Плотность слоев — ρ_f и ρ_c соответственно. Для того, чтобы исключить общий изгиб,

предполагаем, что отсутствуют перемещения нижнего лицевого слоя (следовательно, и нижней границы наполнителя). Таким образом, рассматриваются только локальные эффекты. Лицевой слой моделируется бесконечной пластиной изгибной жесткостью D_f , подверженной внешней нагрузке $P(t)$ и нормальной реакцией упругого слоя $\sigma_{if}(x, t)$ (рис. 1).

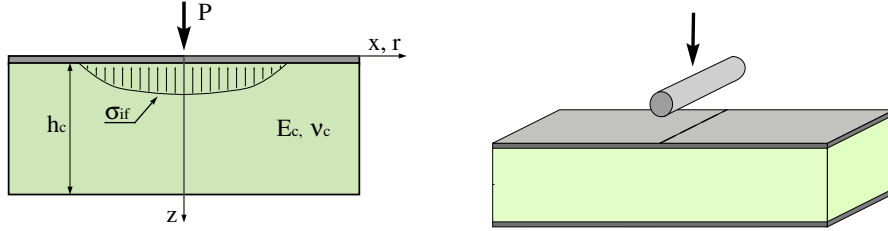


Рис.1. Плоская постановка задачи (слева) и физическая модель (справа).

Изгиб пластины подчиняется классической модели Кирхгоффа-Лява с малыми деформациями и углами поворота. В плоской постановке линейное дифференциальное уравнение для прогиба w_f имеет вид

$$D_f \frac{\partial^4 w_f(x, t)}{\partial x^4} + \rho_f h_f \frac{\partial^2 w_f(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\delta(x)}{2b} P(t) + \sigma_{if}(x, t), \quad (1)$$

где δ – дельта-функция Дирака, b – ширина панели, а в осесимметричной постановке –

$$D_f \Delta \Delta w_f(r, t) + \rho_f h_f \frac{\partial^2 w_f(r, t)}{\partial t^2} = \frac{\delta(r)}{2\pi r} P(t) + \sigma_{if}(r, t), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r}. \quad (2)$$

Поскольку в большинстве случаев инерцией наполнителя можно пренебречь, его поведение достаточно рассматривать в рамках статических уравнений Ляме для упругой изотропной среды. При отсутствии перемещений нижней границы упругого слоя, а также нулевых продольных и заданных поперечных перемещениях верхней границы, его реакция может быть определена преобразованием Фурье (в плоской задаче) или Ганкеля (в осесимметричной задаче). Решение преобразованных уравнений Ляме дает следующее соотношение между образами прогиба и нормальных напряжений на интерфейсе:

$$\sigma_{if}^{F(H)}(\omega, t) = -E_1 \omega F(\omega h_c) w_f^{F(H)}(\omega, t), \quad F(\omega h_c) = \frac{\text{ch}(\omega h_c) \text{sh}(\omega h_c) + \psi \omega h_c}{\text{sh}^2(\omega h_c) - (\omega h_c)^2}, \quad (3)$$

где $E_1 = 2\psi E_c / (1 + \nu_c)^2$ и $\psi = (1 + \nu_c) / (3 - \nu_c)$ для плоского напряженного состояния, $E_1 = 2\psi E_c (1 - \nu_c) / (1 + \nu_c)$ и $\psi = 1 / (3 - 4\nu_c)$ – в других постановках, E_c – модуль Юнга, ν_c – коэффициент Пуассона. Для симметричных переменных (например, для прогиба и напряжения) в плоской задаче используются косинус-преобразование Фурье

$$w_f^F(\omega) = \int_0^\infty w_f(x) \cos(\omega x) dx, \quad w_f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty w_f^F(\omega) \cos(\omega x) d\omega,$$

а в осесимметричной задаче – преобразование Ганкеля нулевого порядка в виде

$$w_f^H(\omega) = \int_0^\infty w_f(r) J_0(\omega r) r dr, \quad w_f(r) = \int_0^\infty w_f^H(\omega) J_0(\omega r) \omega d\omega.$$

Для антисимметричных переменных используется синус-преобразование Фурье в случае плоской постановки и преобразование Ганкеля первого порядка в случае осесимметричной постановки. Техника подобных интегральных преобразований подробно рассмотрена в [7].

Как и лицевой слой в поперечном направлении, ударник рассматривается абсолютно жестким, так что их совместное перемещение происходит только за счет изгиба самого лицевого слоя и описывается следующим уравнением

$$m \frac{\partial^2 w_0(t)}{\partial t^2} = -P(t), \quad (4)$$

где $w_0(t)$ – прогиб лицевого слоя под ударником, $P(t)$ – контактное усилие, m – масса ударяющего тела (рис.1).

2. Постановка и решение динамических задач изгиба пластин на слое конечной толщины под действием сосредоточенной нагрузки. Рассматривается задача о нестационарных колебаниях наружного слоя сэндвича при локальном ударно-импульсном нагружении. Предполагается, что для сэндвичевой панели выполнено условие $\rho_c x_0 \ll \rho_f h_f$, при котором инерционными свойствами заполнителя можно пренебречь и рассматривать реакцию наполнителя как квазистатическую. Здесь и далее используются безразмерные переменные и параметры. Для этого вводится естественный параметр длины, времени, безразмерная толщина, безразмерная координата при интегральных преобразованиях Фурье и Ганкеля, а также безразмерный параметр времени для преобразования Лапласа:

$$x_0 = \sqrt[3]{\frac{D_f}{E_1}}, \quad t_0 = \sqrt{\frac{\rho_f h_f x_0}{E_1}} \quad \left(\tau = \frac{t}{t_0} \right), \quad \varepsilon = \frac{x_0}{h_f}, \quad \xi = \omega x_0, \quad \bar{p} = \frac{p}{t_0}. \quad (5)$$

Применяя для уравнения (1) косинус-преобразование Фурье и преобразование Лапласа по времени, с учетом связи между изображениями контактной силы и прогиба (3), а также (5) имеем

$$w_f^{FL}(\xi, \tau) \left(\xi^4 + \xi + \varepsilon \Phi \left(\frac{\xi}{\varepsilon} \right) + \bar{p}^2 \right) = \frac{P^L(\bar{p})}{2bE_1}, \quad (6)$$

где $\Phi(z) \equiv z(F(z) - 1)$.

Аналогично, двойное преобразование Ганкеля-Лапласа для уравнения (2) дает:

$$w_f^{HL}(\xi, \tau) \left(\xi^4 + \xi + \varepsilon \Phi \left(\frac{\xi}{\varepsilon} \right) + \bar{p}^2 \right) = \frac{P^L(\bar{p})}{2\pi x_0 E_1}. \quad (7)$$

Рассмотрим далее примеры обращения полученных аналитических зависимостей.

Пример 1. Динамические задачи с импульсом силы. Получим закономерности для напряжений и прогибов при воздействии импульсом силы $P(t) = I\delta(t)$ ($P^L(\bar{p}) = I/t_0$). Применяя формулы обращения интегральных преобразований к соотношениям (6) для напряжений и прогибов под силой в плоской постановке, получаем

$$w_0(\tau) = \frac{I}{\pi E_1 b t_0} \int_0^\infty \Psi(\xi, \tau) d\xi, \quad \sigma_0(\tau) = \frac{I}{\pi x_0 b t_0} \int_0^\infty \xi F \left(\frac{\xi}{\varepsilon} \right) \Psi(\xi, \tau) d\xi, \quad (8)$$

а в осесимметричной постановке –

$$w_0(\tau) = \frac{I}{2\pi E_1 x_0 t_0} \int_0^\infty \xi \Psi(\xi, \tau) d\xi, \quad \sigma_0(\tau) = \frac{I}{2\pi x_0^2 t_0} \int_0^\infty \xi^2 F\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right) \Psi(\xi, \tau) d\xi. \quad (9)$$

Здесь функция $\Psi(\xi, \tau)$ есть трансформанта преобразования Лапласа для выражений (6), (7)

$$\Psi(\xi, \tau) = \frac{\sin\left(\sqrt{\xi^4 + \xi + \varepsilon\Phi\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right)} \tau\right)}{\sqrt{\xi^4 + \xi + \varepsilon\Phi\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right)}}.$$

Реакция конструкции на произвольную функцию внешней нагрузки $P(\tau)$ может быть получена в результате свертки с ней выражений (8) или (9).

Пример 2. Динамические задачи с ударом массы. Рассмотрим локальный поперечный удар по поверхности наружного слоя сэндвичевой панели. В этом случае образ контактной силы при преобразовании Лапласа имеет вид: $P^L(p) = -m(p^2 w_0^L(p) - v_0)$, где $v_0 = \dot{w}_0(0)$ – скорость соударения, m – масса ударяющего тела. Подставляя это соотношение в уравнение (6) с учетом (5), получаем следующие зависимости для образов прогиба, напряжений и силы в месте контакта:

$$w_0^L(\bar{p}) = \frac{v_0 t_0}{\bar{p}^2 + \gamma^2 / \tilde{f}_1(\bar{p})}, \quad \sigma_0^L(\bar{p}) = -\frac{E_1 v_0 t_0}{x_0} \frac{g_1(\bar{p})}{\bar{p}^2 \tilde{f}_1(\bar{p}) + \gamma^2}, \quad P_0^L(\bar{p}) = \frac{m v_0}{t_0} \frac{\gamma^2}{\bar{p}^2 \tilde{f}_1(\bar{p}) + \gamma^2}. \quad (10)$$

Для осесимметричной задачи получаются такие же зависимости с точностью до замены $\tilde{f}_1 \rightarrow \tilde{f}_2$, $g_1 \rightarrow g_2$. Здесь использованы обозначения

$$\tilde{f}_i(\bar{p}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi^{i-1}}{\xi^4 + \xi + \varepsilon\Phi\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right) + \bar{p}^2} d\xi, \quad g_i(\bar{p}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi^{i-1} (\varepsilon\Phi\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right) + \xi)}{\xi^4 + \xi + \varepsilon\Phi\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right) + \bar{p}^2} d\xi \quad (i = 1, 2),$$

$$\gamma^2 = \frac{\rho_f h_f x_0 b_{eff}}{m}, \quad b_{eff} = \begin{cases} b & \text{в случае плоской постановки;} \\ 2x_0 & \text{в случае осесимметричной постановки.} \end{cases}$$

Безразмерный параметр γ определяет тип ударного взаимодействия. При малом параметре γ , то есть когда отношение массы пластины, задействованной в ударе, к массе ударяющего тела мало, влияние инерции лицевого слоя незначительно и реакцию можно считать близкой к квазистатической. Однако критерий такой малости заранее сформулировать сложно.

Для большинства встречающихся на практике случаев выполнено условие $E_f h_f^3 \ll \ll E_c h_c^3$, при котором анализ локального напряженно-деформируемого состояния сэндвичевой панели сводится к подобному анализу пластины на полупространстве. Оусцествляя предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$ в выражениях (10), имеем

$$w_0^L(\bar{p}) = \frac{v_0 t_0}{\bar{p}^2 + \gamma^2 / f_1(\bar{p})}, \quad \sigma_0^L(\bar{p}) = -\frac{E_1 v_0 t_0}{x_0} \frac{f_2(\bar{p})}{\bar{p}^2 f_1(\bar{p}) + \gamma^2}, \quad P_0^L(\bar{p}) = \frac{m v_0}{t_0} \frac{\gamma^2}{\bar{p}^2 f_1(\bar{p}) + \gamma^2}, \quad (11)$$

где

$$f_i(\bar{p}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi^{i-1}}{\xi^4 + \xi + \bar{p}^2} d\xi, \quad i = 1, 2, 3.$$

Для нахождения итоговых временных зависимостей прогиба, напряжений и силы в месте контакта выполним обратное преобразование Лапласа. Для этого разложим $f_i(\bar{p})$ в асимптотические ряды при больших значениях параметра \bar{p} (то есть при малых временах)

$$f_j(\bar{p}) = \frac{1}{\bar{p}^{(4-j)/2}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1} a_{j,i-1}}{\bar{p}^{(3i-3)/2}}, \quad a_{j,n} = \frac{\Gamma(\frac{n+j}{4})\Gamma(\frac{3n+4-j}{4})}{4\pi\Gamma(n+1)}. \quad (12)$$

Далее, для силы в случае плоской постановки из (11) имеем

$$\begin{aligned} P_0^L &= \frac{mv_0}{t_0} \gamma^2 \frac{1}{a_{1,0}\bar{p}^{1/2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{a_{1,k}}{\bar{p}^{(3k-1)/2}} + \gamma^2} = |r = \bar{p}^{-1/2}| = \\ &= \frac{mv_0}{t_0} \gamma^2 \frac{r}{a_{1,0} + \gamma^2 r + \sum_{k=1}^{\infty} a_{1,k} r^{3k}} = \frac{mv_0}{t_0} \gamma^2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k \rightarrow \frac{mv_0}{t_0 \tau} \gamma^2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\tau^{k/2}}{\Gamma(k/2)}, \quad c_k = c_k(\gamma). \end{aligned} \quad (13)$$

Прогиб и напряжения определяются аналогично, разложением в ряд или как результат следующих сверток:

$$w_0(\tau) = \frac{t_0^2}{m\gamma^2} \int_0^\tau P_0(\tau - \tau_1) \phi_1(\tau_1) d\tau_1, \quad \sigma_0(\tau) = \frac{E_1 t_0^2}{m x_0 \gamma^2} \int_0^\tau P_0(\tau - \tau_1) \phi_2(\tau_1) d\tau_1, \quad (14)$$

где $\phi_i(\tau) = \tau^{(2-i)/2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_{i,k} \frac{\tau^{3k/2}}{\Gamma(\frac{3k}{2} + \frac{4-i}{2})}$ – трансформанты выражений (12). Важное свойство решения – контактная сила при малых временах имеет особенность вида $\frac{1}{\sqrt{\tau}}$ ($\tau \rightarrow 0$).

В случае осесимметричной постановки получаются такие же выражения с точностью до замены $f_1 \rightarrow f_2$, $f_2 \rightarrow f_3$. Все основные переменные (прогиб, напряжение и сила) в этом случае конечны.

Сходимость полученных асимптотических рядов при больших временах нарушается. Использование асимптотических оценок при малых значениях параметра \bar{p} затруднительно. Поэтому для более продолжительных ударов (при малых γ) обращение удобно выполнять численно. Используя свойство преобразования Лапласа для произведения изображений, переписываем соотношения (11), например, для силы при осесимметричной постановке задачи, в виде

$$\int_0^\tau P_0(\tau_1) (\phi_2(\tau - \tau_1) + \gamma^2(\tau - \tau_1)) d\tau_1 = \frac{mv_0}{t_0} \gamma^2 \tau. \quad (15)$$

Полученное линейное интегральное уравнение типа свертки является некорректно поставленной задачей (ее решение не устойчиво по правой части). Для ее решения необходимо использовать регуляризующий алгоритм. Уравнение (15) можно записать в измененном виде

$$\int_0^T \left(\int_0^\tau P_0(\tau_1) H(\tau, \tau_1) d\tau_1 - \frac{mv_0}{t_0} \gamma^2 \tau \right)^2 d\tau + \alpha \Omega(P_0) \rightarrow \min, \quad (16)$$

где α – малый параметр регуляризации,

$$H(\tau, \tau_1) = \begin{cases} \phi_2(\tau - \tau_1) + \gamma^2(\tau - \tau_1), & \text{если } \tau_1 < \tau; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\Omega(P_0) = \int_0^T P_0^2(\tau) + \left(\frac{\partial P_0(\tau)}{\partial \tau} \right)^2 d\tau - \text{стабилизатор Тихонова второго порядка.}$$

Задача (16) является вариационной постановкой для (15) и корректно поставленной. Таким образом, искомой функцией $P_0(\tau)$, минимизирующей функционал (16), будет решение интегро-дифференциального уравнения Эйлера

$$\int_0^T K(\tau_1, \tau) P_0(\tau) d\tau + \alpha \left(P_0(\tau_1) - \frac{\partial^2 P_0(\tau_1)}{\partial \tau_1^2} \right) = \Upsilon(\tau_1), \quad (17)$$

где

$$K(\tau_1, \tau) = \int_{\max(\tau_1, \tau)}^T H(\tilde{\tau}, \tau_1) H(\tilde{\tau}, \tau) d\tilde{\tau}, \quad \Upsilon(\tau_1) = \int_{\tau_1}^T H(\tau, \tau_1) \frac{mv_0}{t_0} \gamma^2 \tau d\tau,$$

удовлетворяющего естественным начальным условиям, например, такого типа: $P_0(0) = P_0(T) = 0$. Последнее, вообще говоря, не соответствует истинному поведению функции $P_0(\tau)$. Удовлетворительной аппроксимации точного решения на концах промежутка легко достичь путем замены неизвестной функции по формулам вида $P_0(\tau) = f(\tilde{P}_0(\tau), \tau)$, после проведения которой получается уравнение с тем же ядром, но с другой правой частью. Его точное решение будет удовлетворять нулевым начальным условиям. Заметим, что несогласованности начальных условий можно избежать, если решать интегральное уравнение относительно прогиба $w_0(\tau)$. Для численной реализации описанного алгоритма далее необходимо перейти к конечно-разностному аналогу уравнения Эйлера (17) и решить получившуюся при этом систему линейных алгебраических уравнений.

3. Обсуждение результатов. Приведем некоторые результаты расчетов, иллюстрирующие полученные решения.

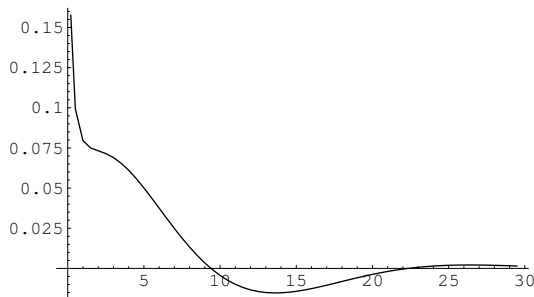


Рис. 2. Зависимость контактной силы (кН) в точке соударения от безразмерного параметра времени для плоской постановки задачи.

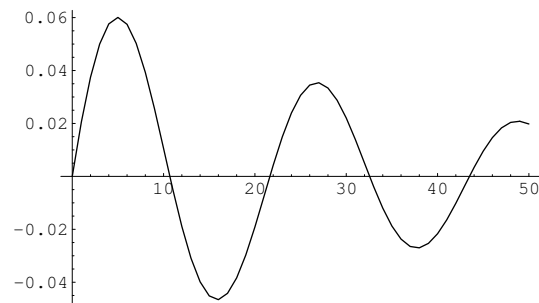


Рис. 3. Зависимость прогиба (мм) под силой от безразмерного параметра времени для осесимметричной постановки задачи.

На рис. 2 показана зависимость контактной силы в точке соударения от безразмерного параметра времени для плоской постановки задачи, построенная согласно (13). В расчете принималось: $m = 0,01$ кг, $v_0 = 1$ м/с, $\gamma = 0,195$. При $\tau \rightarrow 0$ контактная сила имеет особенность вида $1/\sqrt{\tau}$.

Рис. 3 иллюстрирует изменение прогиба под силой во времени для осесимметричной постановки задачи. В расчете принималось: $m = 0,01$ кг, $v_0 = 1$ м/с, $\gamma = 0,366$. Затухание функций вызвано потерей энергии удара на волнообразование в лицевом слое сэндвича.

На рис. 4, 5 приводятся результаты применения метода регуляризации для решения уравнения типа (16) для прогиба и напряжений в случае осесимметричной постановки

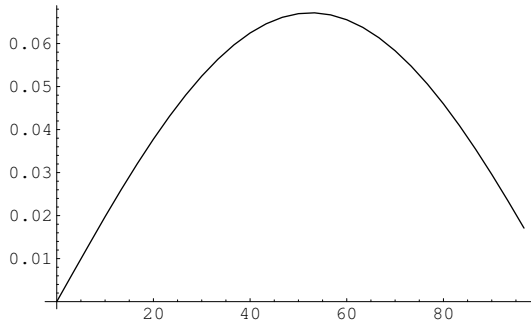


Рис. 4. Зависимость прогиба (мм) под силой от безразмерного параметра времени для осесимметричной постановки задачи.

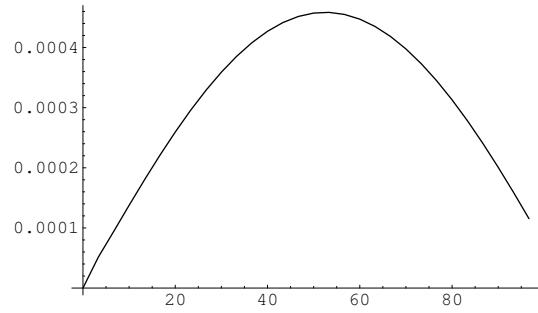


Рис. 5. Зависимость напряжений (ГПа) под силой от безразмерного параметра времени для осесимметричной постановки задачи.

задачи. В расчете принималось: $m = 1$ кг, $v_0 = 0,1$ м/с, $\gamma = 0,0366$. Сопоставление рис. 4 с рис. 3 иллюстрирует влияние параметра γ на поведение решения. При малых γ результаты качественно схожи с квазистатическим решением.

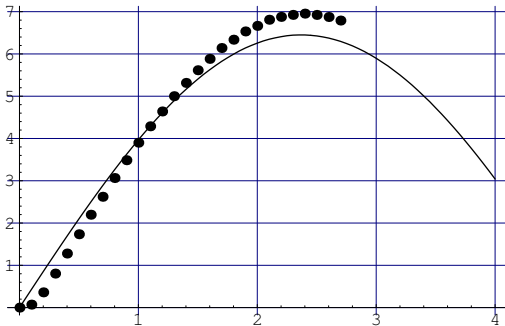


Рис. 6. Зависимость контактной силы (кН) от времени (мс) в точке соударения для плоской постановки задачи.

На рис. 6 проведено сравнение аналитического решения (сплошная линия) для контактной силы в точке соударения в случае плоской постановки задачи с результатом конечноэлементного моделирования (LS-DYNA). Аналитическое решение строилось без учета инерционных свойств лицевого слоя и наполнителя. В расчете принималось: $m = 7,73$ кг, $v_0 = 2,27$ м/с, $\gamma = 0,012$, $\varepsilon = 0,25$.

Видно, что учет инерции лицевого слоя и наполнителя при сравнительно большой массе ударяющего тела и малой скорости удара дает незначительную поправку для максимума контактной силы.

1. Shipsha A. Failure of Sandwich Structures with Sub-Interfacial Damage: Doctoral Thesis, KTH. – Stockholm, 2001. – 134 p.
2. Olsson R. Impact response and delamination of composite plates: Doctoral Thesis, KTH. – Stockholm, 1998. – 142 p.
3. Thomsen O. Theoretical and experimental investigation of local bending effects in sandwich plates // J. of Composite Structures. – 1995. – **30**. – P. 85-101.
4. Skvortsov V. Boundary effects and local stability of sandwich panels // Proc. of the Euromech 360 Colloquium, (Saint-Etienne, France, 13-15 May 1997). Mechanics of Sandwich Structures. – Dordrecht, The Netherlands, 1998. – P. 175 - 182.
5. Sneddon I. Fourier transforms. International Series in Pure and Applied Mathematics. – New York: McGraw-Hill Book Company, 1951. – 542 p.
6. Skvortsov V. Exact analysis of sandwich plates bending based on elasticity theory and the technique of integral transformations // Proc. of 5-th International Conference on Mechanics of Sandwich Structures (Zurich, Switzerland, 5-7 September 2000). Sandwich Construction-V. – London, 2000. – Vol.1. – P. 129 - 140.
7. Уфлянд Я. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967. – 401 p.