

©2011. H.M. Yehia

**RIGID BODY MECHANICS, 41(2011), 233–243****H.M. Yehia****New 2D integrable families with a quartic second invariant**

The method introduced by the present author in 1986 still proves most effective in constructing integrable 2-D Lagrangian systems, which admit in addition to the energy another integral of motion that is polynomial in velocities. In a previous article (J. Phys. A: Math. Gen., 39, 5807–5824, 2006) we constructed a system, which admits a quartic complementary integral. This system, called by us “master”, is the largest known, as it involves 21 parameters, and contains, as special cases of it, almost all previously known systems of the same type that admit a quartic integral. In the present note we generalize the method we used before to construct new several-parameter systems that are not special cases of the master system. A new system involving 16 parameters is introduced and a special case of it admits interpretation in a problem of rigid body dynamics. It gives a unification of certain special versions of known classical integrable cases due to Kovalevskaya, Chaplygin and Goriatchev and other cases recently introduced by the present author.

**Keywords:** *integrable families, invariant, rigid body dynamics.*

**Х.М. Яхья****Нові інтегровні випадки рівнянь динаміки з інтегралами четвертого степеня**

Продовжено дослідження, початі автором у 1986 році, і присвячені вивченню умов існування у лагранжевих систем перших інтегралів четвертого порядку. Розглядувана система характеризується 16 параметрами. Одержано структуру лагранжиана, для якої диференціальні рівняння руху припускають розв’язки, що характеризуються першим поліноміальним інтегралом четвертого порядку. Це дозволило узагальнити відомі випадки інтегровності Ковалевської, Чаплигіна і Горячева класичної задачі про рух твердого тіла, яке має нерухому точку.

**Ключевые слова:** *лагранжиан, розв’язок, потенціальна функція.*

**Х.М. Яхья****Новые интегрируемые случаи уравнений динамики с интегралами четвертой степени**

Продолжены исследования, начатые автором в 1986 году, и посвященные изучению условий существования у лагранжевых систем первых интегралов четвертого порядка. Рассматриваемая система характеризуется 16 параметрами. Получена структура лагранжиана, для которой дифференциальные уравнения движения допускают решения, характеризующиеся первым полиномиальным интегралом четвертого порядка. Это позволило обобщить известные случаи интегрируемости Ковалевской, Чаплыгина и Горячева классической задачи о движении твердого тела, имеющего неподвижную точку.

**Ключевые слова:** *лагранжиан, решение, потенциальная функция.*

1. *Kowalevski S.V.* Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe // Acta Math. – 1889. – 12. – P. 177–232.
2. *Hetarinta J.* Direct methods for the search of the second invariant // Phys. Rep., (Review Section of Physics Letters). – 1987. – 147, No. 2. – P. 87–154.
3. *Karlovini M., Pucacco G., Rosquist K., Samuelsson L.* A unified treatment of quartic invariants at fixed and arbitrary integral // J. Math. Phys. – 2002. – 43, № 8. – P. 4041–4059.
4. *Bolsinov A.V., Kozlov V.V., Fomenko A.T.* The Maupertuis principle and geodesic flows on a sphere that arise from integrable case of the dynamics of a rigid body // Uspekhi Mat. Nauk. – 1995. – 50. – P. 3–32. = Russian Math. Surveys. – 1995. – 50. – P. 473–501.
5. *Selivanova E.N.* New families of conservative systems on  $S^2$  possessing an integral of fourth degree in momenta // Ann. Global Anal. Geom. – 1999. – 17. – P. 201–219.
6. *Hadeler K.P., Selivanova E.N.* On the case of Kovalevskaya and new cases of integrable conservative systems on  $S^2$  // Reg. Chaot. Dyn. – 1999. – 4, 3. – P. 45–52.
7. *Dullin H.R., Matveev V.S.* A new integrable system on the sphere // Math. Res. Lett. – 2004. – 11. – P. 10001–10008.
8. *Ranada M., Santander M.* Super-integrable systems on the two-dimensional sphere  $S^2$  and the hyperbolic plane  $H_2$  // J. Math. Phys. – 1999. – 40. – P. 5026–5057.
9. *Ranada M., Santander M.* On harmonic oscillators on the two-dimensional sphere  $S^2$  and the hyperbolic plane  $H_2$  // Ibid. – 2002. – 43. – P. 431–451.
10. *Yehia H.M.* On the integrability of certain problems in particle and rigid body dynamics // J. Méch. Théor. Appl. – 1986. – 5, No. 1. – P. 55–71.
11. *Yehia H.M.* Two-dimensional conservative mechanical system with quartic second integral // Reg. Chaot. Dyn. – 2006, 11. – P. 103–122.
12. *Yehia H.M.* Kovalevskaya's integrable case: Generalization and related new results // Ibid. – 2003. – 8. – P. 337–348.
13. *Yehia H.M.* Atlas Of Two-Dimensional Irreversible Conservative Lagrangian Mechanical Systems With A Second Quadratic Integral // J. Math. Phys. – 2007. – 48. – 082902.
14. *Yehia H.M.* On certain two-dimensional conservative mechanical systems with cubic second integral // J. Phys. A: Math. Gen. – 2002. – 35. – P. 9469–9487.
15. *Yehia H.M.* The Master integrable two-dimensional system with a quartic second integral // Ibid. – 2006. – 39. – P. 5807–5824.
16. *Birkhoff G.* Dynamical Systems. – Amer. Math. Soc. Colloq. publ. – 1927. – 9.
17. *Bozis G.* Compatibility conditions for a non-quadratic integral of motion // Celest. Mech. – 1982. – 28. – P. 367–380.
18. *Wojciechowski S.* On the integrability of the Calogero-Moser system in an external quartic potential and other many-body systems // Phys. Lett. A. – 1984. – 102. – P. 85–88.
19. *Chaplygin S.A.* A new particular solution of the problem of motion of a solid in a liquid // Trudy Otdel. Phys. Nauk Obsh. Liub. Estestvozn. – 1903. – 11, № 2. – P. 7–10.
20. *Goriatchev D.N.* New case of integrability of the Euler dynamical equations // Varshav. Univ. Izvest. – 1916.– No 3. – P. 1–13.