УДК 517.9

©2011. **А.М. Ковалев, В.Н. Неспирный, А.С. Суйков**

СУЩЕСТВОВАНИЕ ФУНКЦИИ СО ЗНАКОПОСТОЯННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для неавтономных систем дифференциальных уравнений доказана теорема о существовании функции, имеющей знакопостоянную производную в силу системы. Построенная функция является дифференцируемой, допускает бесконечно малый высший предел и является периодической, если правые части являются периодическими функциями времени. В качестве демонстрационного примера рассмотрена система третьего порядка.

Ключевые слова: *неавтономные системы, функции Ляпунова.*

Введение. Первая теорема А.М. Ляпунова, с которой он начинает изложение метода исследования устойчивости движения в своей знаменитой монографии [1], связана с использованием функции, имеющей знакопостоянную производную. Для изучения асимптотической устойчивости и неустойчивости была применена функция со знакоопределенной производной. В дальнейшем Е.А. Барбашиным и Н.Н. Красовским [2, 3] были получены условия, при выполнении которых наличие функции со знакопостоянной производной обеспечивает асимптотическую устойчивость и неустойчивость. Таким условием оказалось отсутствие в окрестности решения целых полутраекторий ($t_0 \leqslant t < +\infty$) системы. Н.Н. Красовский [4] рассмотрел вопрос о том, когда у системы существует функция, имеющая знакоопределенную производную, и доказал, что необходимым и достаточным условием этого является отсутствие в окрестности решения целых траекторий ($-\infty < t < +\infty$) системы.

Методы, связанные с использованием функций со знакопостоянной производной, получили новое развитие в связи с получением дополнительных функций [5, 6]. С помощью разработанного на их основе метода доказана Центральная теорема [7], позволяющая преобразовать функцию, имеющую знакопостоянную производную, к виду, когда множество обращения производной в нуль является инвариантным. Это привело к новому построению теории устойчивости, основанному на координатном подходе и исключающему критический случай. Как и в случае с функцией, имеющей знакоопределенную производную, встал вопрос о существовании функции, имеющей знакопостоянную производную, который успешно решен в настоящей работе.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений n-го порядка

$$\dot{x} = f(x,t), \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $t \in R$, $f : R^n \times R \to R^n$ — функция, удовлетворяющая условиям существования и единственности решения системы; $f(0,t) = 0$, что обеспечивает существование решения $x \equiv 0$.

Требуется для этой системы построить функцию $V(x,t) : R^n \times R \to R$, имеющую бесконечно малый высший предел, производная которой в силу системы (1), определяемая выражением

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=\overline{1,n}} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i,$$

знакопостоянна в окрестности нуля. На знак самой функции $V(x,t)$ при этом не накладывается никаких требований. Для того, чтобы исключить тривиальный случай $V \equiv 0$, потребуем также, чтобы при любом t в любой достаточно малой окрестности начала координат существовала точка x, где $V(x,t) \neq 0$. Если такая функция существует, то очевидно добавлением константы можно обеспечить, чтобы $V(0) = 0$.

Рассмотрим автономную одномерную систему ($x \in R^1$, $f(x,t) = f(x)$). Для нее производная в силу системы будет равна

$$\frac{dV}{dx} f(x).$$

Очевидно, если V выбрать так, что производная $\dfrac{dV}{dx}$ будет равна $-f(x)$, мы получим функцию, у которой производная в силу системы будет равна $-f^2(x)$. Как видим, в этом случае производная V в силу системы (1) будет отрицательной всюду, кроме точек равновесия этой системы. Остается лишь найти саму функцию $V(x)$:

$$\frac{dV}{dx} = -f(x),$$

$$V(x) = -\int\limits_0^x f(\xi) d\xi.$$

В этом случае достаточно требовать интегрируемости по Риману функции $f(x)$. При этом знакопостоянность гарантируется глобально.

В многомерном случае построение такой функции $V(x)$ является более сложной задачей. В случае отсутствия целых траекторий в некоторой окрестности начала координат существует даже функция со знакоопределенной производной [8]. Однако ее построение в явном виде связано с большими вычислительными трудностями.

2. Вспомогательные леммы. Рассмотрим систему уравнений (1) в ограниченной области G_0, содержащей точку $x = 0$. Пусть участок траектории $x(x_0, t_0, t)$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \theta$ $(0 < \theta \leqslant T)$ лежит целиком в некоторой окрестности начала координат H_0 $(\bar{H}_0 \subset G_0)$. Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 1 [8]. *Для любого числа $\gamma > 0$ существует функция $V(x,t)$, непрерывная со всеми своими частными производными по x_i и t в области G_0, $-\infty < t < +\infty$, и удовлетворяющая следующим условиям:*

$$\begin{aligned}
&V = 0 \text{ при } \|x - x(x_0,t_0,t)\| \geqslant \gamma, -\infty < t < +\infty,\\
&V = 0 \text{ при } t < t_0 - 2\tau \text{ или } t > t_0 + \theta + 2\tau,\\
&V > d \text{ при } \|x - x(x_0,t_0,t)\| < \alpha, t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0 + \theta,\\
&\frac{dV}{dt} > d \text{ при } \|x - x(x_0,t_0,t)\| < \alpha, t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0 + \theta,\\
&\frac{dV}{dt} \geqslant 0 \text{ при } \|x\| < \infty, -\infty < t < t_0 + \theta + \tau.
\end{aligned}$$

При этом оценка положительных чисел τ, α, d не зависит от выбора точки $x_0 \in H_0$, а определяется выбором окрестностей G_0, H_0 и значения γ.

Данная лемма была доказана Н.Н. Красовским [8], который показал, что функция

$$V(x,t) = \begin{cases} (t-T_0)^p \exp((t-T_0)^{-1}(t-T_1)^{-1})\times \\ \qquad \times \exp\left(\left[\|x-y(t)\|^2 \exp -2q(t-t_0) - \beta^2\right]^{-1}\right) \\ \qquad \text{при} \|x - y(t)\| < \beta \exp q(t-t_0), T_0 < t < T_1, \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases} \tag{2}$$

где $T_0 = t_0 - 2\tau$, $T_1 = t_0 + 2\tau + \theta$, удовлетворяет всем условиям леммы. Здесь

$$q = 8n^2 L_0, \quad \beta = \frac{\eta}{2}\exp(-q[T+2\tau]), \tag{3}$$

L_0 — константа Липшица для функций $f(x,t)$ в G_0, p — целое число, удовлетворяющее неравенству

$$p > \frac{(T+4\tau)^2}{\tau^4} + 8q\left(1 + \frac{n}{\beta^2}\right)(\exp 2q(T+2\tau))^2; \tag{4}$$

$y(t)$ — вектор-многочлен по t, аппроксимирующий с достаточной точностью решение $x(x_0,t_0,t)$ вместе с производной на отрезке $-2\tau + t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \theta + 2\tau$; τ и η таковы, что η-окрестность ($\|x - x(x_0,t_0,t)\| < \eta$) дуги траектории при $-2\tau + t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \theta + 2\tau$ лежит целиком в области G_0 и, кроме того, η-окрестность дуги траектории при $t_0 + \theta \leqslant t \leqslant t_0 + \theta + 2\tau$ содержится в γ-окрестности точки $x(x_0,t_0,t_0+\theta)$.

Отметим, что в лемме доказывается существование функции, производная которой неотрицательна всюду, за исключением, быть может, множества $\|x - x(x_0,t_0,t)\| < \gamma$, $t_0 + \theta + \tau \leqslant t \leqslant t_0 + \theta + 2\tau$. Однако, если расстояние от точки $x(x_0,t_0,t_0+\theta)$ будет не меньше 2γ, то благодаря выбору τ и η, эта функция окажется знакопостоянной в H_0.

Рассмотрим теперь дугу траектории $x(x_0,t_0,t)$, при $t_0 - \theta \leqslant t \leqslant t_0$ $(0 < \theta \leqslant T)$, лежащую в области H_0. Тогда верно следующее утверждение.

Лемма 2 [8]. *Для любого числа $\gamma > 0$ существует функция $V(x,t)$, непрерывная со всеми своими частными производными по x_i и t в области G_0, $-\infty < t < +\infty$, и удовлетворяющая следующим условиям:*

$$
\begin{aligned}
&V = 0 \text{ при } \|x - x(x_0,t_0,t)\| \geqslant \gamma, -\infty < t < +\infty,\\
&V = 0 \text{ при } t < t_0 - \theta - 2\tau \text{ или } t > t_0 + 2\tau,\\
&V < -d \text{ при } \|x - x(x_0,t_0,t)\| < \alpha, t_0 - \theta \leqslant t \leqslant t_0 + \tau,\\
&\frac{dV}{dt} > d \text{ при } \|x - x(x_0,t_0,t)\| < \alpha, t_0 - \theta \leqslant t \leqslant t_0 + \tau,\\
&\frac{dV}{dt} \geqslant 0 \text{ при } \|x\| < \infty, t_0 - \theta - \tau < t < +\infty.
\end{aligned}
$$

При этом оценка положительных чисел τ, α, d не зависит от выбора точки $x_0 \in H_0$, а определяется выбором окрестностей G_0, H_0 и значения γ.

Такая функция может быть явно записана, если воспользоваться результатом леммы 1 для системы $\dot{x} = -f(x,t')$, где $t' = 2t_0 - t$, построив для нее функцию $V_1(x,t')$. Тогда в качестве $V(x,t)$, удовлетворяющей лемме 2, можно взять функцию $-V_1(x, 2t_0 - t)$.

3. Построение функции для неавтономной системы. Леммы из предыдущего пункта дают возможность построить функцию со знакопостоянной производной в некоторой области H_0 при наличии хотя бы одной траектории, выходящей за границу этой области в прямом или обратном времени. Однако такая функция будет отличной от нуля лишь на ограниченном отрезке времени и на весьма малом подмножестве фазового пространства (окрестности траектории), отделенном от точки $x = 0$. Следующая теорема дает возможность построения функции, не равной тождественно нулю ни при каком t.

Теорема 1. *Пусть система* (1) *определена в области G_0 и задана ограниченная область H_0 ($\bar{H}_0 \subset G_0$). Если для любого момента времени t_0 и любой окрестности начала координат $P \subset H_0$ существуют значения $x_0 \in P$ и θ такие, что решение $x(x_0,t_0,t)$ в момент времени $t_0 + \theta$ достигает точки, лежащей в $G_0 \setminus H_0^{(2\gamma)}$,*

$$H_0^{(2\gamma)} = \{x : \rho(x, H_0) < 2\gamma\},$$

то существует функция $V(x,t)$, имеющая в силу уравнений (1) *знакопостоянную производную в области H_0 и допускающая бесконечно малый высший предел. Функция $V(x,t)$ имеет непрерывные и равномерно ограниченные в области H_0 частные производные по x и t, и при любом t в любой достаточно малой окрестности начала координат существует точка x, где $V(x,t) \neq 0$.*

Если правая часть системы (1) *является периодической по t с периодом T, тогда построенная функция также будет периодической с периодом T.*

Доказательство. Возьмем некоторый момент времени t_0 и некоторую окрестность начала координат $P \subset H_0$ радиуса ε. По условию теоремы существуют по крайней мере одно начальное значение $x_0 \in P$ и момент времени θ такие, что $x(x_0, t_0, t_0+\theta) \in G_0 \backslash H_0^{(2\gamma)}$. Предположим, что $\theta > 0$, тогда воспользуемся для траектории $x(x_0, t_0, t)$ результатом леммы 1 и получим функцию $V_{t_0,\varepsilon}(x,t)$ с положительно-постоянной на множестве H_0 производной в силу системы (в случае $\theta < 0$ следует применять лемму 2).

Теперь рассмотрим убывающую последовательность радиусов ε_i, стремящуюся к нулю. Для каждого ε_i построим функцию $V_{\varepsilon_i,t_0}(x,t)$ с положительно-постоянной производной. Пусть P_{i,t_0} — точная верхняя грань функции $V_{\varepsilon_i,t_0}(x,t)$. Тогда функция

$$V_{t_0}(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{V_{\varepsilon_i,t_0}(x,t)}{2^i P_{i,t_0}} \tag{5}$$

будет иметь ограниченную положительно-постоянную производную и будет отличной от нуля по крайней мере при таких t, что $|t - t_0| < \tau$ (где τ — некоторое неотрицательное число, не зависящее от t_0).

Рассмотрим теперь моменты времени $t_j = j\tau'$ (j — целое, $\tau' < \tau$) и определим функцию

$$V(x,t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} V_{t_j}(x,t).$$

Эта функция будет отличной от нуля уже при всех значениях t и по-прежнему иметь знакопостоянную производную, что доказывает теорему.

Если правые части системы (1) являются периодическими с периодом T, то для того, чтобы построенная функция была периодической с тем же периодом, достаточно выбрать τ' так, чтобы оно было делителем числа T. Это обеспечивает выбор

$$\tau' = \frac{T}{\lceil T/\tau \rceil}.$$

□

Замечание. К сожалению, воспользоваться результатом этой теоремы нельзя для доказательства независимости от t функции $V(x,t)$ для автономной системы. Связано это с тем, что, рассматривая автономную систему, как функцию с двумя различными периодами, получим различные функции со знакопостоянной производной.

Пример. Рассмотрим следующую систему:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\omega x_2 \cos t, \\ \dot{x}_2 &= \quad \omega x_1 \cos t, \\ \dot{x}_3 &= x_3(1 + \sin t). \end{aligned} \tag{6}$$

Общее решение системы (6) известно и записывается в виде

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a\cos(\omega\sin t + \varphi_0),\\ x_2(t) &= a\sin(\omega\sin t + \varphi_0),\\ x_3(t) &= ce^{t-\cos t}, \end{aligned} \tag{7}$$

где a, c и φ_0 — константы интегрирования:

$$\begin{aligned} &c = x_3(0),\\ &a = \sqrt{x_1(0)^2 + x_2(0)^2},\\ &\varphi_0 : \cos\varphi_0 = \frac{x_1(0)}{a}, \quad \sin\varphi_0 = \frac{x_2(0)}{a}. \end{aligned}$$

Из (7) видно, что нулевое решение $x_1(t) = x_2(t) = x_3(t) = 0$ системы (6) является неустойчивым.

Покажем, как предложенным методом для системы (6) строится функция V со знакопостоянной производной.

Будем рассматривать области $G_0 = R^3$, и решение $x(x_0, t_0, t)$ для $t_0 = 0$, $x_0 = (a, 0, c)$, где $a < 1$ и c — заданные константы; в таком случае $\varphi_0 = 0$. Выберем $P = \{x : |x| < r\}$, $0 < r$; тогда для любой точки $x_0 = (a, 0, c) \in P$, где $a > 0$ и $c > 0$, $a^2 + c^2 < r^2$ — заданные числа, траектория $x(t_0, x_0, t)$ заведомо выходит за пределы области

$$H_0^{(2\gamma)} = \{x : |x| \leqslant r + 2\gamma\} \tag{8}$$

при $t = t_0 + \theta$, где

$$\theta = \frac{1}{2}\ln\frac{(r+2\gamma)^2 - a^2}{c^2}.$$

Теперь, выбирая любую точку $x_0 \in P$ указанного вида, согласно теореме 1 построим функцию $V_{t_0,\varepsilon}(x,t)$ со знакопостоянной производной на множестве

$$H_0 = \{x : |x| \leqslant r\}. \tag{9}$$

Вычисляя константу Липшица в области (8) для системы (1)

$$L_0 = \tilde{r}\sqrt{\omega^2 + 2}, \quad \tilde{r} = r + 2\gamma, \tag{10}$$

получим

$$\eta = \frac{\gamma}{2\tau L_0},$$

что позволяет записать значения величин (3) в виде

$$\begin{aligned} q &= 8n^2 L_0 = 72\tilde{r}\sqrt{\omega^2+2},\\ \beta &= \frac{\gamma}{4\tau L_0}\exp(-q(T+2\tau)). \end{aligned} \tag{11}$$

Подставляя (11) в (4) и обозначая $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 + 2}$, определяем число p неравенством

$$p > \frac{(T+4\tau)^2}{\tau^4} + 576\tilde{r}\tilde{\omega}\left(1 + \frac{48\tau^2\tilde{r}^2\tilde{\omega}^2}{\gamma^2}\exp(144\tilde{r}\tilde{\omega}(T+2\tau))\right). \tag{12}$$

Теперь функция V записывается в виде (2)

$$V(x,t) = \begin{cases} (t-T_0)^p \exp((t-T_0)^{-1}(t-T_1)^{-1})\times \\ \qquad \times \exp\left(\left[\|x-y(t)\|^2 \exp -2q(t-t_0) - \beta^2\right]^{-1}\right) \\ \qquad \text{при} \|x-y(t)\| < \beta \exp q(t-t_0), T_0 < t < T_1, \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases} \tag{13}$$

где константы p, q и β определяются выражениями (11), (12). Функция (13) будет иметь знакоопределенную производную, отличную от нуля лишь на заданном интервале времени (T_0, T_1). Подставляя (13) в (5), и при необходимости выбирая более одной траектории, получим окончательный вид функции $V(x,t)$.

Заключение. В статье рассмотрена задача о построении функции со знакопостоянной производной в силу заданной неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Показано, что такая функция может быть построена по крайней мере в том случае, если в любой сколь угодно малой окрестности начала координат в любой момент времени найдутся траектории, входящие или исходящие из некоторой области, и проходящие через некоторую точку окрестности. Вопрос о существовании функции со знакопостоянной производной для систем, у которых все траектории в некоторой окрестности остаются в ней же с течением времени, требует дополнительного исследования. Вероятно, в этом случае может быть поставлена задача о построении первого интеграла системы, который также является функцией со знакопостоянной производной. К сожалению, хотя доказанная теорема и указывает конструктивный способ построения искомой функции, но этот способ требует знания точного общего решения системы и громоздких вычислений. Более того, полученная функция будет представлять собой бесконечную двойную сумму функций, определенных на окрестностях некоторых траекторий. Поэтому ее вычисление и, тем более, анализ крайне затруднительны на практике.

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 471 с. – Харьков: Изд-во Харьковского Мат. об-ва, 1892. – 250 + XI с.; *Ляпунов А.М.* Собр. соч. – М.;Л.: Изд-во АН СССР, 1956. – Т. 2. – 476 с.
2. *Барбашин Е.А., Красовский Н.Н.* Об устойчивости движения в целом // Докл. АН СССР. – 1952. – **86**, № 3. – С. 453–456.
3. *Красовский Н.Н.* Об условиях обращения теорем А.М. Ляпунова о неустойчивости для стационарных систем дифференциальных уравнений // Там же. – 1955. – **101**, № 1. – С. 17–20.

4. *Красовский Н.Н.* Об обращении теорем А.М. Ляпунова и Н.Г. Четаева о неустойчивости для стационарных систем дифференциальных уравнений // Прикл. математика и механика. – 1954. – **18**, вып. 5. – С. 513–532.
5. *Ковалев А.М.* Построение функции Ляпунова со знакоопределенной производной для систем, удовлетворяющих теореме Барбашина–Красовского // Там же. – 2008. – **72**, вып. 2. – С. 266–272.
6. *Ковалев А.М., Суйков А.С.* Построение функции Ляпунова при выполнении теоремы Барбашина–Красовского // Докл. НАН Украины. – 2008. – №. 12. – С. 22–27.
7. *Ковалев А.М.* Решение задач устойчивости для нелинейных систем с известной функцией со знакопостоянной производной // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 32. – С. 3–28.
8. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1959. – 211 с.

A.M. Kovalev, V.N. Nespirnyy, A.S. Suykov

Existence of a function with non-positive derivative along trajectories of a non-autonomous system of differential equations

The paper provides a proof of existence of a function with non-positive derivative along trajectories of an non-autonomous system of differential equations. The function is built to be differentiable and to allow arbitrary small time-independent upper bound. The function is also proven to be periodic in the case of periodic system. The construction of the function is illustrated for a simple third-order system.

Keywords: *non-autonomous system, Lyapunov function.*

О.М. Ковальов, В.М. Неспірний, О.С. Суйков

Існування функції зі знакосталою похідною для неавтономних систем диференціальних рівнянь

Для неавтономних систем диференціальних рівнянь доведено теорему про існування функції, що має знакосталу похідну в силу системи. Побудована функція є диференційовною, припускає нескінченно малу вищу межу і є періодичною, якщо праві частини є періодичними функціями часу. Як демонстраційний приклад розглянуто систему третього порядку.

Ключові слова: *неавтономні системи, функції Ляпунова.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
kovalev@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 29.08.11