УДК 531.38

©2006. **М.Е. Лесина, Н.Ф. Гоголева**

НОВОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ДВУХ ГИРОСКОПОВ ЛАГРАНЖА, СОЕДИНЕННЫХ НЕГОЛОНОМНЫМ ШАРНИРОМ

Задача о движении двух гироскопов Лагранжа, сочлененных идеальным упругим шарниром, поставленная в [1] и позже обобщенная в [2, 3], получила дальнейшее обобщение при введении неголономного шарнира, введенного в работе [4]. В работах [5, 6] указаны два случая интегрируемости обобщенной задачи. В статье найдено новое решение с инвариантным соотношением специального вида.

1. Уравнения движения. При построении решения задачи будем использовать уравнения, полученные в работе[1] [5]. Выпишем уравнения движения (2)*, (3)*, (10)*–(12)*, (28)*, (31)*, (40)*

$$n = J(\omega_3 + \dot\varphi), \tag{1}$$

$$n_0 = J_0(\Omega_3 + \dot\Phi), \tag{2}$$

$$\omega_3 = (\Omega_2 - \omega_2\cos\theta)/\sin\theta, \tag{3}$$

$$\Omega_3 = (\Omega_2\cos\theta - \omega_2)/\sin\theta, \tag{4}$$

$$\dot\Phi = \dot\varphi\cos\theta, \tag{5}$$

$$\omega_1 = (\xi+1)\varkappa, \qquad \Omega_1 = (\xi-1)\varkappa, \tag{6}$$

$$\dot\theta = -2\varkappa(\theta), \tag{7}$$

$$\xi = \frac{A_0k - Nk_0 - 2A_0k_0'\sin\theta + \omega_2\mathrm{ctg}\theta + 2\omega_2' - \Omega_2/\sin\theta}{-\omega_2\mathrm{ctg}\theta - A_0k - Nk_0 + \Omega_2/\sin\theta}. \tag{8}$$

В той же работе [5] выполнена редукция задачи к одному уравнению Абеля второго рода (42)*

$$\eta'(\theta)\eta(\theta) = F_1(\theta)\eta(\theta) + F_0(\theta), \tag{9}$$

в котором

$$\eta(\theta) = \{\Omega_2(\theta) - \omega_2\cos\theta - [A_0k(\theta) + Nk_0(\theta)]\sin\theta\}\sin\theta, \tag{10}$$

$$F_1(\theta,\omega_2) = [2\omega_2(\theta)\sin\theta - 2A_0k(\theta)\cos\theta + (A - 3N\cos\theta)k_0(\theta)]\sin\theta, \tag{11}$$

$$\begin{gathered} F_0(\theta,\omega_2) = [\omega_2(\theta)\sin\theta - (A_0\cos\theta - N)k(\theta) + (A - N\cos\theta)k_0(\theta)]\times \\ \times[-\omega_2'(\theta) + Nk_0(\theta) + A_0k_0'(\theta)\sin\theta\ ]sin^3\theta \end{gathered} \tag{12}$$

(штрихом обозначено дифференцирование по θ).

В этих уравнениях $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ и $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$ – компоненты угловых скоростей полуподвижных базисов $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2^0,\mathbf{e}_3^0$.

Неизменно связанные с телами S и S_0 базисы $\mathbf{e}_1^*,\mathbf{e}_2^*,\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}_1^{0*},\mathbf{e}_2^{0*},\mathbf{e}_3^0$ связаны с упомянутыми базисами так

$$\mathbf{e}_1^* = \mathbf{e}_1\cos\varphi + \mathbf{e}_2\sin\varphi, \qquad \mathbf{e}_2^* = -\mathbf{e}_1\sin\varphi + \mathbf{e}_2\cos\varphi, \tag{13}$$

[1]При ссылке на формулы работы [5] будем снабжать их номера звездочкой.

$$\mathbf{e}_1^{0*} = \mathbf{e}_1 \cos\Phi + \mathbf{e}_2^0 \sin\Phi, \qquad \mathbf{e}_2^{0*} = -\mathbf{e}_1 \sin\Phi + \mathbf{e}_2^0 \cos\Phi. \tag{14}$$

Построение решения. В работе [5] построено решение при нулевом моменте количества движения системы, а в работе [6] для построения решения используется уравнение Абеля (9). При этом $\omega_2(\theta)$ конкретизирована таким образом, чтобы $F_0(\theta, \omega_2)$ обратилась в нуль. Таких возможностей, как следует из (12), две. Одна из них

$$\omega_2(\theta) = [(A_0 \cos\theta - N)k(\theta) - (A - N\cos\theta)k_0(\theta)]/\sin\theta$$

рассмотрена в работе [6].

Рассмотрим вторую возможность обращения $F_0(\theta, \omega_2)$ в нуль. Для этого зададим инвариантное соотношение в виде

$$\omega_2'(\theta) = A_0 k_0'(\theta)\sin\theta + N k_0(\theta), \tag{15}$$

где $k_0(\theta) = n_0(\theta)/H,\ k(\theta) = n(\theta)/H,\ H = AA_0 - N^2 > 0$.

В работе [5] так же получены уравнения (19)*, (34)*

$$\omega_2(\theta)\sin\theta = -n_0(\theta)/J_0 + (n(\theta)\cos\theta)/J, \tag{16}$$

$$n'(\theta) = -n_0'(\theta)\cos\theta. \tag{17}$$

Уравнения (15)—(17) образуют систему трех уравнений для определения трех функций $n(\theta),\ n_0(\theta),\ \omega_2(\theta)$. Так как уравнение (16) конечное, то можно выполнить редукцию к одному дифференциальному уравнению второго порядка.

Продифференцировав соотношение (16), получим

$$\omega_2'(\theta) = \frac{-J[n_0'(\theta)\sin\theta - n_0(\theta)\cos\theta] + J_0[n'(\theta)\sin\theta\cos\theta - n(\theta)]}{JJ_0\sin^2\theta}. \tag{18}$$

Приравнивая правые части уравнений (15) и (18), находим

$$JJ_0(A_0 n_0'\sin\theta + Nn_0)\sin^2\theta + HJ(n_0'\sin\theta - n_0\cos\theta) - J_0H(n'\sin\theta\cos\theta - n) = 0. \tag{19}$$

Продифференцировав уравнение (19) и подставив в него выражение для $n'(\theta)$ из (17), получим уравнение второго порядка для переменной $n_0(\theta)$

$$[(H - A_0J)J_0\cos^2\theta + (H + A_0J_0)J]n_0''(\theta)+$$

$$+[-3(H - A_0J)J_0\cos\theta + NJJ_0]n_0'(\theta)\sin\theta + [2NJJ_0\cos\theta + HJ]n_0(\theta) = 0. \tag{20}$$

Рассмотрим вначале случай

$$H - A_0J \neq 0.$$

Введем новые параметры

$$C = \frac{(H + A_0J_0)J}{(H - A_0J)J_0}, \qquad E = \frac{NJJ_0}{(H - A_0J)J_0}, \qquad D = \frac{HJ}{(H - A_0J)J_0}$$

и представим уравнение (20) в виде

$$(\cos^2\theta + C)n_0''(\theta) + (-3\cos\theta + E)n_0'(\theta)\sin\theta + (2E\cos\theta + D)n_0(\theta) = 0. \tag{21}$$

Вводя функции

$$g^*(\theta) = \frac{(E - 3\cos\theta)\sin\theta}{\cos^2\theta + C}, \qquad h^*(\theta) = \frac{2E\cos\theta + D}{\cos^2\theta + C} \tag{22}$$

и полагая

$$n_0(\theta) = \zeta(\theta)e^{-\frac{1}{2}\int g^*(\theta)d\theta},$$

получаем нормальную форму уравнения (21)

$$\zeta''(\theta) + I(\theta)\zeta(\theta) = 0. \tag{23}$$

Здесь

$$I(\theta) = h^*(\theta) + \frac{g^{*2}(\theta)}{4} - \frac{g^{'*}(\theta)}{2} \tag{24}$$

инвариант уравнения (21) [7, с.139].

Введем новую переменную $u = \cos\theta$, подставив (22) в (24), для инварианта $I_*(u)$ получим выражение

$$I_*(u) = \frac{9}{4} + \frac{1}{4(u^2+C)^2}\left[4Eu^3 + (4D - 6C + E^2 - 3)u^2 + 2E(2C+1)u + (4CD - 9C^2 - E^2)\right].$$

Так как $I_*(u)$ – периодическая функция, то уравнение (23) представляет собой уравнение Хилла [7, с.374].

Если же $H - A_0J = 0$, то уравнение (20) существенно упрощается:

$$A_0(J + J_0)n_0''(\theta) + J_0Nn_0'(\theta)\sin\theta + (A_0J + 2J_0N\cos\theta)n_0(\theta) = 0, \tag{25}$$

$$N^2 = A_0(A - J) > 0. \tag{26}$$

Рассмотрим представляющий самостоятельный интерес частный случай

$$N = 0, \tag{27}$$

который, вследствие (26), влечет за собой и равенство

$$A = J. \tag{28}$$

Условия (27), (28) соответственно означают, что одно из тел системы закреплено в центре масс, а тело S сферически симметрично.

При этих ограничениях уравнение (25) принимает вид

$$n_0''(\theta) + \lambda^2 n_0(\theta) = 0, \tag{29}$$

где

$$\lambda^2 = \frac{J}{J + J_0}. \tag{30}$$

Общее решение уравнения (29) таково

$$n_0(\theta) = J_0(C_1\cos\lambda\theta + C_2\sin\lambda\theta). \tag{31}$$

Вместо постоянных интегрирования C_1, C_2 введем C_*, β так:

$$C_1 = C_* \sin\beta, \qquad C_2 = C_* \cos\beta,$$

и решение (31) запишем в виде

$$n_0(\theta) = C_* J_0 \sin(\lambda\theta + \beta).$$

Используя обозначение (30), введем новый параметр B так, что

$$J = B\lambda^2, \qquad J_0 = B(1-\lambda^2),$$

а решение (31) таково

$$n_0(\theta) = C_* B(1-\lambda^2)\sin(\lambda\theta+\beta). \tag{32}$$

Подставив (32) в (17), после интегрирования определяем

$$n(\theta) = -\frac{1}{2}C_*\lambda B\{(1-\lambda)\sin[(1+\lambda)\theta+\beta] - (1+\lambda)\sin[(\lambda-1)\theta+\beta]\}. \tag{33}$$

Из конечного соотношения (16) с учетом (32), (33) находим

$$\omega_2(\theta)\sin\theta = -\frac{C_*}{2}\sin(\lambda\theta+\beta) - \frac{C_*}{4\lambda}\{(1-\lambda)\sin[(2+\lambda)\theta+\beta] - (1+\lambda)\sin[(\lambda-2)\theta+\beta]\}. \tag{34}$$

Таким образом, задав инвариантное соотношение в виде (15), нашли при условиях (27), (28) зависимость от θ трех переменных $\omega_2, n(\theta), n_0(\theta)$.

Подставив значения (32)—(34), (11) в уравнение (9), интегрированием находим зависимость переменной η от θ

$$\eta(\theta) = \eta_0 + \left(\frac{J_0}{A_0} - 2\right)\frac{C_*}{2}\left\{\frac{1}{\lambda-1}\sin[(\lambda-1)\theta+\beta] - \frac{1}{\lambda+1}\sin[(\lambda+1)\theta+\beta]\right\}.$$

После этого из (10) определим

$$\Omega_2(\theta)\sin\theta = \eta_0 + \frac{C_*}{2}\left[\left(\frac{J_0}{A_0}-2\right)\frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda}\right]\sin[(\lambda-1)\theta+\beta] -$$

$$-\frac{C_*}{2}\left[\frac{1}{\lambda} + \left(\frac{J_0}{A_0}-2\right)\frac{1}{\lambda+1}\right]\sin[(\lambda+1)\theta+\beta]. \tag{35}$$

Из соотношения (8) с учетом (32)–(35) и условий (27), (28) получим

$$\xi = -1. \tag{36}$$

Из (6) с учетом (36) следует, что

$$\omega_1(\theta) = 0, \tag{37}$$

$$\Omega_1(\theta) = -2\varkappa(\theta). \tag{38}$$

Для определения $\varkappa(\theta)$ воспользуемся интегралом (13)*, (14)*, выражающим сохранение момента количества движения системы относительно ее центра масс

$$G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = g^2, \tag{39}$$

$$G_1 = (A - N\cos\theta)\omega_1 + (A_0 - N\cos\theta)\Omega_1, \tag{40}$$

$$G_2 = (A - N\cos\theta)\omega_2 + (A_0\cos\theta - N)\Omega_2 - n_0\sin\theta, \tag{41}$$

$$G_3 = (A_0\Omega_2 - N\omega_2)\sin\theta + n_0 + n. \tag{42}$$

Отметим, что

$$\Omega_2(\theta)\sin\theta = \left(\frac{1}{J_0} - \frac{1}{A_0}\right) n_0(\theta)\cos\theta + \left(\frac{2}{J_0} - \frac{1}{A_0} + \frac{1}{J}\right) n(\theta). \tag{43}$$

Подставив (37), (38) в (40), находим

$$G_1 = -2A_0\varkappa(\theta).$$

С учетом (16), (43) представим (41), (42) в виде

$$G_2(\theta)\sin\theta = \left(\frac{2A_0}{J_0} + \frac{A_0}{J}\right) n(\theta)\cos\theta + \left(-\frac{J}{J_0} - 1 + \frac{A_0}{J_0}\cos^2\theta\right) n_0(\theta),$$

$$G_3(\theta) = \frac{A_0}{J_0} n_0(\theta)\cos\theta + \left(\frac{2A_0}{J_0} + \frac{A_0}{J}\right) n(\theta).$$

Вносим эти соотношения в (39) и получаем выражение для $\varkappa^2(\theta)$ в виде

$$\begin{gathered}\varkappa^2(\theta) = \frac{g^2}{4A_0^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{2}{J_0} + \frac{1}{J}\right)^2 \frac{n^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} - \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{J_0} + \frac{1}{J}\right)\left(\frac{1}{J_0} - \frac{J}{A_0 J_0} - \frac{1}{A_0}\right) n(\theta) n_0(\theta) \frac{\cos\theta}{\sin^2(\theta)} - \\ -\frac{1}{4A_0^2}\left[\left(\frac{J}{J_0} + 1\right)^2 + \frac{A_0}{J_0}\left(\frac{A_0}{J_0} - \frac{2J}{J_0} - 2\right)\cos^2\theta\right] \frac{n_0^2(\theta)}{\sin^2\theta},\end{gathered} \tag{44}$$

где $n(\theta), n_0(\theta)$ определены в (32), (33).

Зависимость $t(\theta)$ находим квадратурой из уравнения (7)

$$t - t_0 = -\int \frac{d\theta}{2\varkappa(\theta)}. \tag{45}$$

Компоненты угловых скоростей тел S и S_0 в неизменно связанных с телами базисах находим, используя соотношения (13), (14),

$$\boldsymbol{\omega}_* = \omega_1^*\mathbf{e}_1^* + \omega_2^*\mathbf{e}_2^* + (\omega_3 + \dot\varphi)\mathbf{e}_3, \tag{46}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_* = \Omega_1^*\mathbf{e}_1^{0*} + \Omega_2^*\mathbf{e}_2^{0*} + (\Omega_3 + \dot\Phi)\mathbf{e}_3^0, \tag{47}$$

где

$$\omega_1^* = \omega_1 \cos\varphi + \omega_2 \sin\varphi, \qquad \omega_2^* = -\omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi, \tag{48}$$

$$\Omega_1^* = \Omega_1 \cos\Phi + \Omega_2 \sin\Phi, \qquad \Omega_2^* = -\Omega_1 \sin\Phi + \Omega_2 \cos\Phi. \tag{49}$$

Из (1), (5) выразим $\dot\varphi, \dot\Phi$

$$\dot\varphi = \frac{n(\theta)}{J} - \omega_3(\theta), \tag{50}$$

$$\dot\Phi = \left(\frac{n(\theta)}{J} - \omega_3(\theta)\right)\cos\theta. \tag{51}$$

Зависимость $\dot\varphi(\theta)$ и $\dot\Phi(\theta)$ находим из (50), (51) с учетом (32), (33), (3), (4), (34),(43).

Для завершения построения решения необходимо найти потенциальную энергию $\Pi(\theta)$ упругого элемента. Для этого воспользуемся интегралом энергии (15)*.

$$A(\omega_1^2+\omega_2^2) + A_0(\Omega_1^2+\Omega_2^2) - 2N(\Omega_1\omega_1\cos\theta + \omega_2\Omega_2) + n^2/J + n_0^2/J_0 + 2\Pi(\theta) = 2h.$$

При ограничениях (27), (28) и значениях (37), (38), (16), (43) определяем

$$\begin{gathered} A_0[2h - 2\Pi(\theta)]\sin^2\theta = g^2\sin^2\theta + (2A_0J/J_0^2 - A_0/J_0 + 1)[n(\theta) + n_0(\theta)\cos\theta]^2 - \\ - \left[\frac{2A_0J}{J_0^2} + \frac{3A_0}{J_0} + \frac{A_0}{J}\right] n^2(\theta) + \left(\frac{J}{J_0} + 1\right)\left(\frac{A_0}{J_0} - \frac{J}{J_0} - 1\right) n_0^2(\theta). \end{gathered} \tag{52}$$

Подставив в (52) соотношения (32), (33), находим выражение для $\Pi(\theta)$ в виде

$$\begin{gathered} A_0[2h - 2\Pi(\theta)]\sin^2\theta = g^2\sin^2\theta + \frac{C_*^2}{4}B\left[B + A_0\frac{3\lambda^2-1}{(1-\lambda^2)^2}\right]\times \\ \times\{(1-\lambda)\sin[(\lambda+1)\theta+\beta] + (1+\lambda)\sin[(\lambda-1)\theta+\beta]\}^2 - \\ -A_0\frac{\lambda^2+1}{(1-\lambda^2)^2}\frac{C_*^2}{4}B\{(1-\lambda)\sin[(\lambda+1)\theta+\beta] - (1+\lambda)\sin[(\lambda-1)\theta+\beta]\}^2 + \\ +(A_0 - B)C_*^2 B\sin^2(\lambda\theta+\beta). \end{gathered} \tag{53}$$

Выделим частный случай

$$A_0 = B. \tag{54}$$

Выражение (53) для потенциальной энергии примет вид

$$2h - 2\Pi(\theta) = g^2/B + BC_*^2\frac{1+\lambda^2}{\lambda^2-1}\left\{\frac{1+\lambda^2}{2}[1+\cos 2(\lambda\theta+\beta)] - \lambda \mathrm{ctg}\theta \sin 2(\lambda\theta+\beta)\right\}.$$

Так как соотношения (32)—(34) не зависят от A_0, то они остаются без изменений. Соотношения (43), (44) и (50) при условии (54) становятся такими:

$$\begin{gathered} \Omega_2(\theta) = C_*\lambda^2 \mathrm{ctg}\theta \sin(\lambda\theta+\beta) + \\ + \frac{C_*(\lambda^4+1)}{2\lambda(1-\lambda^2)\sin\theta}\left\{-(1-\lambda)\sin(\lambda+1)\theta+\beta] + (1+\lambda)\sin[(\lambda-1)\theta+\beta]\right\}, \end{gathered} \tag{55}$$

$$\varkappa^2(\theta) = \frac{g^2}{4B^2} - \frac{C_*^2}{4}\sin(\lambda\theta+\beta) -$$

$$-\frac{C_*^2(\lambda^2+1)^2}{16\lambda^2(1-\lambda^2)^2\sin^2\theta}\{(1-\lambda)\sin[(\lambda+1)\theta+\beta]-(1+\lambda)\sin[(\lambda-1)\theta+\beta]\}^2, \qquad (56)$$

$$\dot\varphi(\theta) = -\frac{C_*(1+\lambda^2)}{2(1-\lambda^2)\sin^2\theta}\{(\lambda+1)\sin[(\lambda-1)\theta+\beta]+(\lambda-1)\sin[(\lambda+1)\theta+\beta]\}. \qquad (57)$$

Подставив найденное из (56) выражение для $\varkappa(\theta)$ в (45), получим t как функцию θ.

После этого из (57) и (51) получим зависимости углов собственного вращения φ и Φ от θ в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{C_*(1+\lambda^2)}{4(1-\lambda^2)}\int\frac{(\lambda+1)\sin[(\lambda-1)\theta+\beta]+(\lambda-1)\sin[(\lambda+1)\theta+\beta]}{\varkappa(\theta)\sin^2\theta}d\theta, \qquad (58)$$

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{C_*(1+\lambda^2)}{4(1-\lambda^2)}\int\frac{\{(\lambda+1)\sin[(\lambda-1)\theta+\beta]+(\lambda-1)\sin[(\lambda+1)\theta+\beta]\}\cos\theta}{\varkappa(\theta)\sin^2\theta}d\theta. \qquad (59)$$

Компоненты (46), (47) угловых скоростей тел в неизменно связанных с ними базисах получим из (48), (49) с учетом (34), (55), (37), (38), (56), (1), (2), (58), (59).

1. *Лесина М.Е.* О колебаниях оси маховика в теле-носителе // Механика твердого тела. – 1979. — Вып.11. -– С. 32–37.
2. *Лесина М.Е.* Об условиях существования точных решений задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, соединенных сферическим шарниром // Там же. -– 1984. — Вып.16. — С. 32–36.
3. *Лесина М.Е.* К построению полного решения в одном случае интегрируемости задачи о движении двух связанных тел // Там же. — 1987. — Вып.19. — С. 54–57.
4. *Харламов А.П., Харламов М.П.* Неголономный шарнир // Там же. — 1995. -– Вып.27. -– С. 1–7.
5. *Лесина М.Е., Харламов А.П.* Движение по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром // Там же. — 1995. — Вып.27. -– С. 15–21.
6. *Лесина М.Е., Харламов А.П.* Точное решение задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром // Там же. -– 2004. -– Вып. 34. — С. 80–86.
7. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971, 576 с.

Донецкий национальный техн. ун-т
Получено 07.06.06