УДК 531.38

©2011. С.В. Скрыпник, Е.К. Щетинина

О ТРЕХ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СИММЕТРИЧНОГО ГИРОСТАТА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрена задача о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона. Предполагается, что гиростатический момент зависит от времени. Определены условия существования у уравнений движения трех инвариантных соотношений специального вида. Найденные решения выражаются эллиптическими функциями времени.

Ключевые слова: *симметричный гиростат, инвариантное соотношение, магнитное поле.*

Классическая задача о движении тяжелого твердого тела, описываемая уравнениями Эйлера–Пуассона, получила многочисленные обобщения. Одним из таких обобщений [1, 2] является задача о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона [3, 4] (см. также [5, 6]).

При использовании уравнений движения гиростата [7] гиростатический момент можно полагать зависящим от времени. В таком предположении изучены условия существования некоторых классов движения гиростата под действием силы тяжести [8–10] и под действием потенциальных и гироскопических сил [11]. В данной работе исследованы условия существования трех инвариантных соотношений уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона. Получены новые случаи интегрируемости.

Постановка задачи. Запишем уравнения движения гиростата с переменным гиростатическим моментом в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона [1, 2]

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} \times a\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{\alpha} \times a\boldsymbol{x} - \dot{\lambda}\boldsymbol{\alpha} + Ba\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times a\boldsymbol{x}, \quad (1)$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – момент количества движения тела-носителя; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, указывающий направление магнитного поля; $\lambda = \lambda(t)$ – величина гиростатического момента $\lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – постоянный единичный вектор; $a = (a_{ij})$ – гирационный тензор; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – постоянный вектор обобщенного центра масс; $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными обозначает дифференцирование по времени t.

Рассмотрим случай, когда $\boldsymbol{s} = (s_1, 0, 0)$, $\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, 0)$, $a = \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_2)$, $B = \mathrm{diag}(B_1, B_2, B_2)$, $C = \mathrm{diag}(C_1, C_2, C_2)$. Тогда из уравнений (1) в скалярной форме следует

$$(x_1 + \lambda + B_2\nu_1)^{\cdot} = 0, \quad (2)$$

$$\dot{x}_2 = (a_1 - a_2)x_1x_3 - a_2\lambda x_3 + B_2a_2x_3\nu_1 - B_1a_1x_1\nu_3 - s_1\nu_3 + (C_1 - C_2)\nu_1\nu_3, \quad (3)$$

$$\dot{x}_3 = -(a_1 - a_2)x_1x_2 + a_2\lambda x_2 + B_1a_1x_1\nu_2 - B_2a_2x_2\nu_1 + s_1\nu_2 + (C_2 - C_1)\nu_1\nu_2, \quad (4)$$

$$\dot{\nu}_1 = a_2(x_3\nu_2 - x_2\nu_3), \qquad \dot{\nu}_2 = a_1x_1\nu_3 - a_2x_3\nu_1, \qquad \dot{\nu}_3 = a_2x_2\nu_1 - a_1x_1\nu_2. \quad (5)$$

Уравнения (1), (2) имеют два интеграла: геометрический

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1 \quad (6)$$

и интеграл момента количества движения

$$(\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{\nu} = k, \quad (7)$$

где k – произвольная постоянная.

Для условий, которые приняты выше, из (6), (7) в скалярной форме получим

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \qquad (x_1 + \lambda)\nu_1 + x_2\nu_2 + x_3\nu_3 = k. \quad (8)$$

Из уравнения (2) находим первый интеграл системы уравнений (2)–(5):

$$x_1 + \lambda + B_2\nu_1 = \alpha_0; \quad (9)$$

здесь α_0 – произвольная постоянная.

Рассмотрим вопрос о существовании трех инвариантных соотношений

$$x_1 = b_0 + b_1\nu_1, \qquad x_2 = c_0 + c_2\nu_2, \qquad x_3 = d_0 + d_3\nu_3 \quad (10)$$

у уравнений (2)–(5) . В силу первого соотношения системы (10) из интеграла (9) определим

$$\lambda = (\alpha_0 - b_0) - (B_2 + b_1)\nu_1. \quad (11)$$

Подставим выражения (10), (11) с учетом (5) в уравнения (3), (4). Следуя методу инвариантных соотношений, потребуем, чтобы полученные равенства были тождествами по переменным ν_1, ν_2. Тогда приходим к следующим равенствам на параметры уравнений (1) и инвариантных соотношений (10):

$$c_0(a_1b_0 - a_2\alpha_0) = 0, \qquad d_0(a_1b_0 - a_2\alpha_0) = 0, \quad (12)$$

$$a_1b_0(d_3 - c_2 - B_1) - a_2d_3\alpha_0 - s_1 = 0, \quad (13)$$

$$a_1b_0(d_3 - c_2 + B_1) + a_2c_2\alpha_0 + s_1 = 0, \quad (14)$$

$$d_3(a_1b_1 + a_2c_2 + 2a_2B_2) - a_1b_1(c_2 + B_1) + C_1 - C_2 = 0, \tag{15}$$

$$c_2(a_1b_1 + a_2d_3 + 2a_2B_2) - a_1b_1(d_3 + B_1) + C_1 - C_2 = 0, \tag{16}$$

которые являются условиями существования инвариантных соотношений (10).

При выполнении условий (11)–(16) уравнения (3), (4) исчезают, а уравнения (5) с учетом (10) записываются так:

$$\begin{aligned} \dot\nu_1 &= a_2\big[d_0\nu_2 - c_0\nu_3 + (d_3 - c_2)\nu_2\nu_3\big], \\ \dot\nu_2 &= a_1b_0\nu_3 - a_2d_0\nu_1 + (a_1b_1 - a_2d_3)\nu_1\nu_3, \\ \dot\nu_3 &= a_2c_0\nu_1 - a_1b_0\nu_2 + (a_2c_2 - a_1b_1)\nu_1\nu_2. \end{aligned} \tag{17}$$

Случай $a_1b_0 - a_2\alpha_0 \neq 0$. Из уравнений (12) вытекают равенства

$$c_0 = 0, \qquad d_0 = 0. \tag{18}$$

При условиях (18) уравнения (17) упрощаются

$$\dot\nu_1 = a_2(d_3 - c_2)\nu_2\nu_3, \tag{19}$$

$$\dot\nu_2 = [a_1b_0 + (a_1b_1 - a_2d_3)\nu_1]\nu_3, \tag{20}$$

$$\dot\nu_3 = [-a_1b_0 + (a_2c_2 - a_1b_1)\nu_1]\nu_2. \tag{21}$$

Равенство $d_3 - c_2 = 0$ на основании (19) приводит к условию $\nu_1 = \mathrm{const}$. Тогда из (11) вытекает, что и величина гиростатического момента постоянна. Поэтому в дальнейшем будем считать $d_3 \neq c_2$. Из уравнений (13) и (14) находим

$$\alpha_0 = \frac{2a_1b_0}{a_2}, \qquad c_2 + d_3 = \varkappa_0, \tag{22}$$

где

$$\varkappa_0 = -\frac{s_1 + a_1b_0B_1}{a_1b_0}; \tag{23}$$

а из уравнений (15), (16) получим

$$b_1 = -\frac{a_2B_2}{a_1}, \qquad a_2c_2d_3 + a_2B_2(c_2 + d_3) = \varkappa_1, \tag{24}$$

здесь

$$\varkappa_1 = C_2 - C_1 - a_2 B_1 B_2. \tag{25}$$

Из вторых равенств (22) и (24) получаем уравнение для определения d_3:

$$a_2 d_3^2 - a_2 \varkappa_0 d_3 + \varkappa_1 - a_2 \varkappa_0 B_2 = 0, \tag{26}$$

из которого выражаем

$$d_3 = \frac{a_2 \varkappa_0 \pm \sqrt{\Delta}}{2a_2}, \qquad \Delta = a_2(a_2 \varkappa_0^2 + 4a_2 \varkappa_0 - 4\varkappa_1). \tag{27}$$

Таким образом, параметры инвариантных соотношений (10) определяются формулами (18), (22)–(24), (27) и зависят от параметров задачи и b_0. Функцию $\lambda(\nu_1)$ найдем, используя равенство (11):

$$\lambda = \frac{(2a_1 - a_2)b_0}{a_2} - \frac{a_1 - a_2}{a_1} B_2 \nu_1. \tag{28}$$

Уравнения (19)–(21) имеют геометрический интеграл и интеграл

$$2a_1 b_0 \nu_1 + a_1 b_1 \nu_1^2 + a_2 c_2 \nu_2^2 + a_2 d_3 \nu_3^2 = \varkappa_*, \tag{29}$$

порожденный интегралом моментов из (8) и инвариантными соотношениями (10). Здесь $\varkappa_* = a_2 k$ – произвольная постоянная.

Из соотношений $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$ и (29) имеем

$$\begin{aligned} \nu_2^2 &= \frac{1}{c_2 - d_3}(B_2 \nu_1^2 - \alpha_0 \nu_1 - d_3 + \varkappa_*), \\ \nu_3^2 &= \frac{1}{c_2 - d_3}\big[(d_3 - c_2 - B_2)\nu_1^2 + \alpha_0 \nu_1 + c_2 - \varkappa_*\big]. \end{aligned} \tag{30}$$

Внеся выражения ν_2 и ν_3 из (30) в (19), получаем уравнение для определения $\nu_1(t)$:

$$\dot{\nu}_1 = a_2 \sqrt{(B_2 \nu_1^2 - \alpha_0 \nu_1 - d_3 + \varkappa_*)\big[(d_3 - c_2 - B_2)\nu_1^2 + \alpha_0 \nu_1 + c_2 - \varkappa_*\big]}. \tag{31}$$

Покажем действительность найденного решения. Поскольку в (27) должно выполняться условие $\Delta \geq 0$, то с помощью значений (23), (25) определим неравенство

$$a_1^2(4B_2 - 3B_1)b_0^2 - 2a_1 s_1 B_1 b_0 + s_1^2 \geq 0, \tag{32}$$

которому должен удовлетворять параметр b_0. Из (32) следует, что при $B_1 \leq B_2$ параметр b_0 может принимать произвольные значения, при

$B_1 \in \left(B_2,\ \dfrac{4}{3}B_2\right]$ область изменения параметра b_0 состоит из двух неограниченных промежутков, при $B_1 > \dfrac{4}{3}B_2$ область изменения параметра b_0 конечна.

Действительность функций (30) и, следовательно, действительность решения уравнения (31) можно показать следующим образом. Пусть решение уравнения (26) удовлетворяет условию $c_2 - d_3 > 0$, где, очевидно, c_2 имеет значение $\varkappa_0 - d_3$. Тогда, накладывая на произвольный параметр $\varkappa_*$ ограничение $d_3 < \varkappa_* < c_2$, из формул (30) получим $\nu_2^2(0) > 0,\ \nu_3^2(0) > 0$. Т. е. в силу непрерывности этих функций существует промежуток по $\nu_1 \in \left[\nu_1^{(1)}, \nu_1^{(2)}\right]$, в котором функции (30) принимают положительное значение.

В случае $c_2 - d_3 < 0$ параметр $\varkappa_*$ выберем согласно неравенству $c_2 < \varkappa_* < d_3$ и получим результат, аналогичный изложенному выше.

Функция $\nu_1(t)$ находится из (31) путем обращения интеграла

$$\int\limits_{\nu_1^{(1)}}^{\nu_1} \frac{d\nu_1}{\sqrt{(B_2\nu_1^2 - \alpha_0\nu_1 - d_3 + \varkappa_*)\left[(d_3 - c_2 - B_2)\nu_1^2 + \alpha_0\nu_1 + c_2 - \varkappa_*\right]}} = a_2(t - t_0), \tag{33}$$

который стандартным образом сводится к эллиптическому интегралу в форме Лежандра. Следовательно, $\nu_1 = \nu_1(t)$ – эллиптическая функция времени. Из формулы (28) следует, что $\lambda(t)$ также является эллиптической функцией времени. Остальные переменные задачи $\nu_2 = \nu_2(t),\ \nu_3 = \nu_3(t),\ x_i = x_i(t)$ $(i = \overline{1,3})$ можно определить соответственно из формул (30), (10). Указанными выше формулами описывается новое решение уравнений (1).

Случай $c_0^2 + d_0^2 \neq 0$. Из системы (12)–(16) следует

$$d_3 = c_2, \qquad \alpha_0 = \frac{a_1 b_0}{a_2}, \qquad b_0 = -\frac{s_1}{a_1(c_2 + B_1)}, \tag{34}$$

$$b_1 = -\frac{a_2}{a_1}(c_2 + 2B_2), \qquad c_2 = \frac{-a_2(B_1 + 2B_2) \pm \sqrt{D}}{2a_2}, \tag{35}$$

$$D = a_2\left[a_2(B_1 + 2B_2)^2 - 4(C_1 - C_2)\right]. \tag{36}$$

Т.е. параметры c_0 и d_0 могут принимать произвольные значения. Для действительности величин (34), (35) потребуем выполнение неравенства

$$a_2(B_1 + 2B_2)^2 \geq 4(C_1 - C_2),$$

которое ограничивает сверху разность $C_1 - C_2$.

Уравнения Пуассона из (17) в силу $d_3 = c_2$ запишем так:

$$\begin{gathered} \dot\nu_1 = a_2(d_0\nu_2 - c_0\nu_3), \\ \dot\nu_2 = a_1b_0\nu_3 - a_2d_0\nu_1 + (a_1b_1 - a_2c_2)\nu_1\nu_3, \\ \dot\nu_3 = a_2c_0\nu_1 - a_1b_0\nu_2 + (a_2c_2 - a_1b_1)\nu_1\nu_2. \end{gathered} \tag{37}$$

Уравнения (37) имеют интегралы: $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$ и

$$2a_1 b_0 \nu_1 + 2a_2 c_0 \nu_2 + 2a_2 d_0 \nu_3 + (a_1 b_1 - a_2 c_2)\nu_1^2 = K, \tag{38}$$

где K – произвольная постоянная.

Для сведения задачи интегрирования уравнений (37) к квадратурам введем вместо ν_i новые переменные θ и φ:

$$\nu_1 = \cos\theta, \qquad \nu_2 = \sin\theta\cos\varphi, \qquad \nu_3 = \sin\theta\sin\varphi. \tag{39}$$

В силу (39) геометрический интеграл обращается в тождество, интеграл (38) преобразуется к виду

$$\sin(\varphi + \varphi_0) = \frac{F(\theta)}{2a_2\sqrt{c_0^2 + d_0^2}\sin\theta}, \tag{40}$$

$$F(\theta) = K - 2a_1 b_0 \cos\theta - (a_1 b_1 - a_2 c_2)\cos^2\theta, \quad \operatorname{tg}\varphi_0 = c_0/d_0,$$

а первое уравнение системы (37) с учетом (39) запишется так

$$\dot\theta = a_2\sqrt{c_0^2 + d_0^2}\cos(\varphi + \varphi_0). \tag{41}$$

Подставляя (40) в (41), находим

$$\int\limits_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{4a_2^2(c_0^2 + d_0^2)\sin^2\theta - F^2(\theta)}} = \frac{1}{2}(t - t_0), \tag{42}$$

где θ_0 – значение θ при $t = t_0$. Если обратить интеграл (42), то получим функцию $\theta = \theta(t)$. Подставив эту функцию в первое равенство из (40), определим

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \arcsin\frac{F(\theta(t))}{2a_2\sqrt{c_0^2 + d_0^2}\sin\theta(t)}. \tag{43}$$

Функции $\theta(t)$ и $\varphi(t)$, полученные из (42), (43), позволяют с помощью (10), (39) получить зависимость основных переменных $x_1, x_2, x_3;\ \nu_1, \nu_2, \nu_3$ от времени. В силу структуры формулы (42) все указанные функции являются эллиптическими функциями времени. Действительность решения вытекает из условия, что величины c_0, d_0, K – произвольные.

Выводы. Таким образом, получены условия существования у уравнений движения (1) трех линейных инвариантных соотношений специального вида (10). При этом указаны два класса частных решений. Они выражаются эллиптическими функциями времени.

1. *Козлов В.В.* К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1985. – № 6. – С. 28–33.

2. *Самсонов В.А.* О вращении твердого тела в магнитном поле // Там же. – 1984. – № 4. – С. 32–34.
3. *Barnett S.I.* Gyromagnetic and Electron-Inertia Effects // Rev. Modern Phys. – 1935. – **7**(2). – P. 129–166.
4. *London F.* Superfluids. – New-York: Weley, 1950. – 372 p.
5. *Егармин М.Е.* О магнитном поле вращающегося сверхпроводящего тела // Аэрофизика и геокосмические исследования. – М.: Физ.-техн. ин-т, 1983. – С. 95–96.
6. *Урман Ю.М.* Динамические эффекты, обусловленные вращательным движением сверхпроводника в магнитном подвесе // Докл. АН СССР. – 1984. – **276**, № 6. – С. 1402–1404.
7. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
8. *Волкова О.С.* Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховик // Там же. – 2008. – Вып. 38. – С. 80–86.
9. *Волкова О.С.* Регулярные прецессии тяжелого гиростата вокруг вертикальной оси // Тр. ИПММ НАНУ. – 2009. – **19**. – С. 30–35.
10. *Волкова О.С., Гашененко И.Н.* Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 42–49.
11. *Мазнев А.В.* Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Там же. – 2010. – Вып. 40. – С. 91–104.

S.V. Skrypnyk, E.K. Schetinina

On the three invariant relations of motion's equations of the symmetric gyrostat in a magnetic field

The conditions for the existence of three invariant relations of the motion' equations of a gyrostat with a variable gyrostatic moment in a magnetic field, taking into account the Barnett–London effect, were studied. A new integrable cases of the original equations were obtained.

Keywords: *symmetric gyrostat, invariant relation, magnetic field.*

С.В. Скрипник, О.К. Щетініна

Про три інваріантні співвідношення рівнянь руху симетричного гіростата в магнітному полі

Розглянуто задачу про рух гіростата в магнітному полі з урахуванням ефекту Барнетта–Лондона. Передбачається, що гіростатичний момент залежить від часу. Визначено умови існування у рівняннях руху трьох інваріантних співвідношень спеціального виду. Знайдені розв'язки рівнянь руху характеризуються еліптичними функціями часу.

Ключові слова: *симетричний гіростат, інваріантне співвідношення, магнітне поле.*

Национальный ун-т экономики и торговли им. М. Туган-Барановского, Донецк

elenaschetinina@mail.ru

Получено 24.10.11