

УДК 531.36

©2011. Н.А. Вельмагина, В.Г. Вербицкий

АНАЛИЗ АВТОКОЛЕБАНИЙ КОЛЕСНОГО МОДУЛЯ В ПРЯМОЛИНЕЙНОМ РЕЖИМЕ ДВИЖЕНИЯ

Проведен сравнительный анализ устойчивости прямолинейного движения модели колесного модуля для двух случаев аппроксимации сил увода; результаты аналитического исследования подтверждаются серией фазовых портретов, полученных численным интегрированием.

Ключевые слова: автоколебания, устойчивость, колесный модуль.

Явление автоколебаний управляемых колес автомобиля (шимми) было впервые рассмотрено в работе Г. Брулье в 1925 г. В дальнейшем этот вопрос был предметом исследования многих авторов, как представителей теоретического направления [1–6], так и инженеров-исследователей авиационного и автомобильного транспорта [7–11].

С точки зрения современного анализа вопроса, шимми – это интенсивные самовозбуждающиеся колебания катящихся колес, проявляющиеся в виде крутильных движений колес в горизонтальной плоскости (их верчения), которые сопровождаются другими движениями из продольной вертикальной плоскости. Устойчивое поддержание этих колебаний зависит в первую очередь от наличия упругого пневматика (имеется много моделей для описания взаимодействия колеса с абсолютно ровной и идеально шероховатой горизонтальной плоскостью, учитывающих подвод энергии в систему за счет неконсервативных позиционных сил) и особого сочетания таких параметров системы, как жесткость рулевого управления, коэффициент демпфирования в системе рулевого управления и момент инерции колеса относительно оси поворота.

В целом задачу о возникновении шимми можно разбить на две части: задачу определения границы устойчивости в пространстве параметров (линейная задача) и задачу определения характера потери устойчивости (опасная–безопасная), а также определения характеристик автоколебаний (амплитуда, частота), что потребует учета нелинейных членов.

В данной работе проведен сравнительный анализ устойчивости прямолинейного движения модели колесной сцепки для двух случаев аппроксимации нелинейной гипотезы увода [12], описывающей взаимодействие колеса с опорной поверхностью в боковом направлении (монотонной зависимости сил увода как функции угла увода и немонотонной).

1. Исходные соотношения. Колесная сцепка (см. рис. 1) может быть прототипом как управляемого колесного модуля, так и самоориентируемых колесных опор различных транспортных средств. Она имеет возможность отклоняться от своего невозмущенного положения ($\psi = 0$), в этом случае возникает восстанавливающий момент, пропорциональный углу отклонения (c

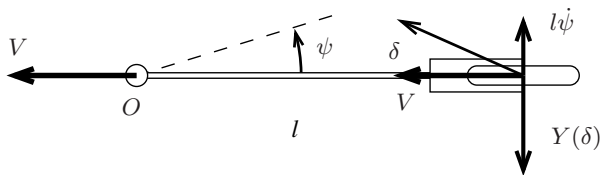


Рис. 1. Общий вид колесной сцепки.

– коэффициент крутильной жесткости) и момент демпфирования, пропорциональный скорости изменения угла поворота ψ .

Расстояние от центра колеса до оси вращения колесной сцепки – l ; вынос колеса – $l > 0$, если точка сцепки O располагается впереди точки контакта колеса с опорной поверхностью (рис. 1), $l < 0$ – в противном случае.

Запишем уравнения возмущенного движения передней стойки для случая вертикальной стойки:

$$\begin{aligned} \sigma \dot{\delta} + V \delta - V \psi - l \dot{\psi} &= 0, \\ F \ddot{\psi} + c \psi + k \dot{\psi} + l Y(\delta) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Первое уравнение системы (1) отвечает соотношению, принятому в теории неустановившегося увода, здесь δ – угол увода колеса; V – скорость невозмущенного движения; σ – параметр релаксации. Во втором уравнении системы (1) момент силы увода относительно оси стойки будет рассмотрен, как для случая монотонной зависимости сил увода как функции угла увода, так и для немонотонной зависимости сил увода (имеющей спадающий участок после достижения максимума); конструктивные параметры системы: момент инерции относительно оси вращения стойки – F ; параметры c, k определяют жесткость и демпфирование при колебаниях колесной сцепки относительно вертикальной оси вращения, проходящей через точку сцепки O .

2. Аппроксимация сил бокового увода. Монотонная аппроксимация сил увода будет представлена в виде дробно-иррациональной функции

$$Y(\delta) = C_1 \delta / \sqrt{1 + (C_1 \delta / \varphi N)^2}, \quad (2)$$

коэффициент сопротивления боковому уводу C_1 ; реакция опоры N , коэффициент сцепления в поперечном направлении φ , безразмерный коэффициент сопротивления боковому уводу $c_1 = C_1 / N$.

Зависимость силы увода с немонотонной характеристикой будет представлена в параметрической форме

$$Y = At / (t^2 + 1), \quad \delta = t / (B \sqrt{1 - (t/C)^2}). \quad (3)$$

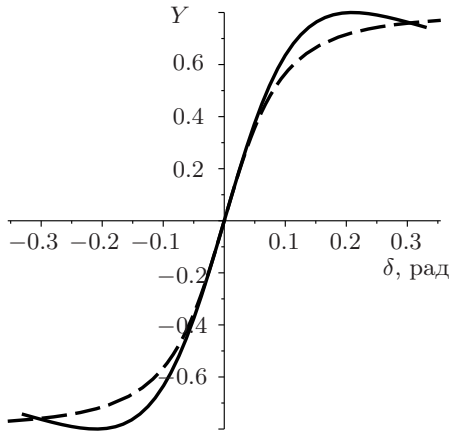


Рис. 2. Графики сил увода при двух способах аппроксимации.

Второе уравнение в (3) получено как решение уравнения (2), описывающего монотонную зависимость боковой силы как функцию угла увода:

$$Y = B\delta / \sqrt{1 + (B\delta/C)^2} \quad (4)$$

(уравнение (4) было разрешено относительно аргумента δ , далее Y заменено на t). Параметрически заданная функция $Y(\delta)$ будет иметь три “свободные” константы A, B, C , выбор которых обеспечивает требуемый наклон в окрестности нуля, величину локального максимума и его положение. Параметрически заданная зависимость (3) может быть представлена в явном виде, если (4) (где Y заменено на t) подставить в первое уравнение (3).

На рис. 2 представлены графики силы увода $Y(\delta)$ как функции углов увода при двух способах аппроксимации: монотонной (формула (2), штрихпунктир) и немонотонной (уравнения (3), сплошная линия).

3. Результаты анализа условий устойчивости по линейному приближению. Из условия равенства нулю характеристического определителя системы

$$\begin{vmatrix} \sigma\lambda + V & -V - l\lambda \\ lC_1 & F\lambda^2 + c + k\lambda \end{vmatrix} = 0$$

получим характеристическое уравнение

$$A_0\lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3 = 0, \quad (5)$$

где $A_3 = Vc + lC_1V$; $A_2 = Vk + l^2C_1 + \sigma c$; $A_1 = \sigma k + VF$; $A_0 = \delta F$. В данном случае необходимое условие устойчивости невозмущенного движения $A_i > 0$. Положительность всех коэффициентов характеристического

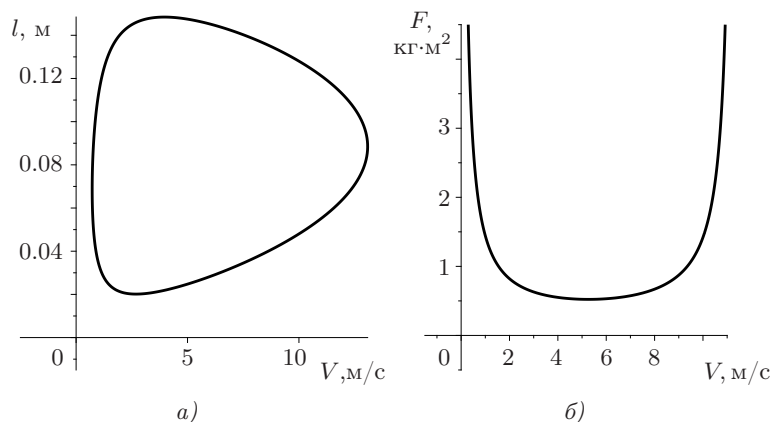


Рис. 3. Области флаттерной неустойчивости.

уравнения может быть нарушена при достаточно большом отрицательном выносе l (центр колеса движется впереди точки сцепки O).

Отрицательность свободного члена A_3 указывает на дивергентную неустойчивость (один из действительных корней характеристического уравнения переходит через нуль в правую часть комплексной плоскости).

Для построения областей устойчивости в плоскости различных пар параметров системы воспользуемся критерием Рауса–Гурвица [13]. Так как первый определитель $\Delta_1 > 0$, а $\Delta_3 = A_3\Delta_2$, анализ флаттерной неустойчивости сводится к проверке знака Δ_2 , где

$$\Delta_2 = \frac{1}{\sigma^2 F^2} (\sigma k^2 V + \sigma k l^2 C_1 + \sigma^2 k c + V^2 F k + V F l^2 C_1 - V \sigma F l C_1). \quad (6)$$

Приравнявая Δ_2 к нулю, получаем уравнение, которое может быть рассмотрено как неявно заданное относительно выбранной пары конструктивных параметров (l, V) или (F, V) . Численным методом, с использованием пакета Maple, найдем границы в плоскости параметров, где нарушается условие $\Delta_2 > 0$ (рис. 3).

Как видно из рис. 3, *а*, кроме дивергентной неустойчивости при $l < -c/C_1$, может существовать интервал скорости, где реализуется флаттерная неустойчивость при $l > 0$ (область неустойчивости ограничена замкнутой кривой). Положение и размеры области неустойчивости могут существенно изменяться в зависимости от конкретных численных значений как других конструктивных параметров (рис. 3, *б* – иллюстрирует влияние величины момента инерции системы относительно вертикальной оси, проходящей через точку сцепки O), так и группы эксплуатационных параметров (например, вертикальная нагрузка может иметь широкий диапазон значений), что осложняет выбор рациональных значений конструктивных параметров, обеспечивающих устойчивость невозмущенного движения во всех возможных условиях эксплуатации.

Пусть при $V = V_{\text{кр}}$ линейное приближение теряет устойчивость – пара собственных значений проходит через мнимую ось. Тогда, согласно теореме Андронова–Хопфа [13], в системе реализуется замкнутая фазовая траектория (существует предельный цикл при $V < V_{\text{кр}}$, или при $V > V_{\text{кр}}$). Условия устойчивости предельного цикла могут быть определены косвенно: при $V < V_{\text{кр}}$ имеем неустойчивый предельный цикл, при $V > V_{\text{кр}}$ – устойчивый. Характер (опасной–безопасной) границы области устойчивости в смысле Н.Н. Баутина [13, 14], определяемый первым ляпуновским коэффициентом, носит локальный характер (справедлив в малой окрестности критического значения параметра V). Ниже воспользуемся способом [13], позволяющим проанализировать явление автоколебаний во всем интервале колебательной неустойчивости.

4. Анализ автоколебаний и оценка амплитуд автоколебаний.

Предполагается, что периодическое решение системы (1) в моменты наибольшего отклонения от положения равновесия и в моменты, когда отклонения равны нулю, изменяется по гармоническому закону, имея некоторое запаздывание по фазе $\delta = a \sin \omega t$, $\psi = a \sin(\omega t + \varphi)$; здесь a – амплитуда, φ – запаздывание фазы. В характерные моменты времени фазовые переменные и их производные принимают значения

$$\begin{aligned} \omega t = \pi/2 : \quad & \delta = a, \quad \dot{\delta} = 0, \quad \ddot{\delta} = -a\omega^2; \\ & \psi = p_0 \cos \varphi, \quad \dot{\psi} = -p_0\omega \sin \varphi; \quad \ddot{\psi} = -p_0\omega^2 \cos \varphi; \\ \omega t = 0 : \quad & \delta = 0, \quad \dot{\delta} = a\omega, \quad \ddot{\delta} = 0; \\ & \psi = p_0 \sin \varphi; \quad \dot{\psi} = p_0\omega \cos \varphi; \quad \ddot{\psi} = -p_0\omega^2 \sin \varphi. \end{aligned}$$

В этом случае параметры автоколебаний $(a, p_0, \omega, \varphi)$ определяются из системы конечных уравнений

$$\begin{cases} \sigma a\omega - Vp_0 \sin(\varphi) - lp_0\omega \cos(\varphi) = 0, \\ Va - Vp_0 \cos(\varphi) + lp_0\omega \sin(\varphi) = 0, \\ -Fp_0\omega^2 \sin(\varphi) + cp_0 \sin(\varphi) + kp_0\omega \cos(\varphi) - lY(0) = 0, \\ -Fp_0\omega^2 \cos(\varphi) + cp_0 \cos(\varphi) - kp_0\omega \sin(\varphi) - lY(a) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

После исключения неизвестных p_0, φ из первых двух уравнений системы (7), получим из двух последних уравнений (7) соотношения, которые определяют усредненную частоту периодического решения

$$FV(-\sigma + l)\omega^2 - cV(-\sigma + l) + k(V^2 + l\omega^2\sigma) = 0 \quad (8)$$

и его амплитуду

$$-FakV^2 + FVY(a)l^2 - FVY(a)\sigma l - k^2a\sigma V + Y(a)k\sigma l^2 - a\sigma^2ck = 0. \quad (9)$$

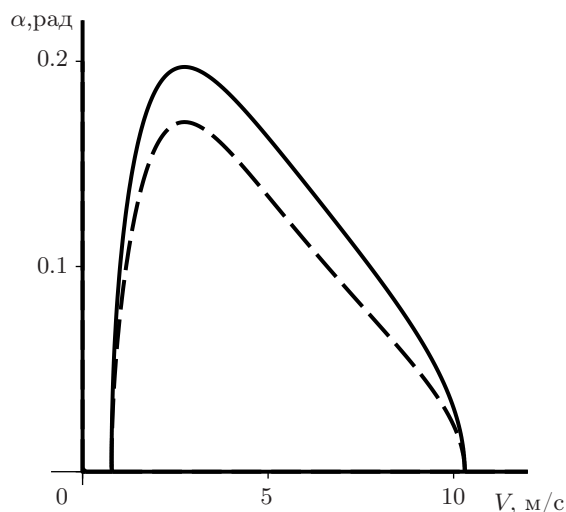


Рис. 4. Зависимости амплитуды угла увода от величины продольной скорости.

Интервал скорости, в котором реализуются автоколебания (где уравнение (9) имеет ненулевое решение) определяет интервал колебательной неустойчивости, следовательно, может быть определен из (9). Если аппроксимировать силу увода лишь линейным и кубическим членами, соотношение (9) будет представлять квадратное уравнение относительно амплитуды автоколебаний, а значения параметра скорости, соответствующие рождению или исчезновению предельных циклов, определяются решением уравнения (условие равенства нулю свободного члена упомянутого квадратного уравнения)

$$\sigma k^2 V + \sigma k l^2 C_1 + \sigma^2 k c + V^2 F k + V F l^2 C_1 - V \sigma F l C_1 = 0, \quad (10)$$

что полностью согласуется с результатом, полученным на основе условий Рауса–Гурвица (6).

Проведем оценку амплитуды автоколебаний для случая, когда сила увода представлена как в виде монотонной зависимости (2), так и для немонотонной зависимости (3) (имеющей ниспадающий участок). На рис. 4 представлены графики зависимости амплитуды угла увода от величины продольной скорости (результат подстановки численных значений следующего набора параметров: $c_1 = 8$; $\sigma = 0.18 \text{ м}$; $l = 0.1 \text{ м}$; $F = 1.8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $N = 490 \text{ Н}$; $k = 2.254 \text{ Н} \cdot \text{мс}$; $c = 392 \text{ Н} \cdot \text{м}$).

При данном наборе численных значений параметров невозмущенное движение системы неустойчиво в интервале скоростей от 0.78 м/с до 10.3 м/с , граница области устойчивости является безопасной: соответствует рождению устойчивого предельного цикла на левой границе, на правой границе – его исчезновению. Пунктирной амплитудной кривой соответствует монотонная

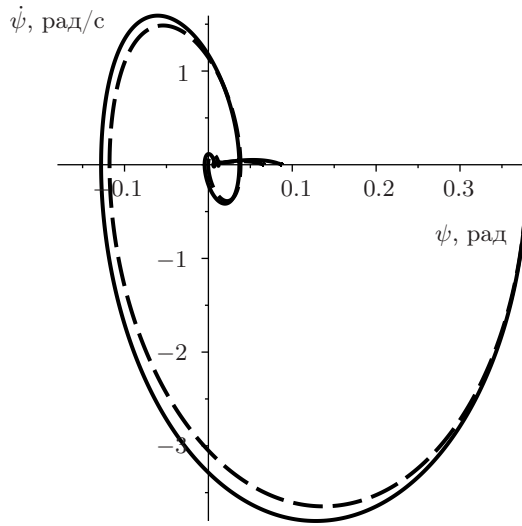


Рис. 5. Фазовые траектории в случае дивергентной неустойчивости.

зависимость силы увода, непрерывной – немонотонная. Случай выпуклости амплитудной кривой в окрестности границ области устойчивости соответствовал бы опасной потере устойчивости: неустойчивые предельные циклы ограничивали бы область устойчивости невозмущенного движения.

5. Проверка результатов приближенного анализа автоколебаний на основе численного интегрирования. Для исходных нелинейных уравнений (1) численным методом построим фазовые траектории, определяющие характер поведения системы при характерных численных значениях конструктивных параметров. Рис. 5 иллюстрирует случай дивергентной неустойчивости, полученный при $l < -c/C_1$ (в частности $l = -0.12 м$, $V = 2.5 м/с$). Пунктирной кривой соответствует монотонная зависимость силы увода (начальное возмущение по углу отклонения от невозмущенного положения $\psi_0 = 0.45$ рад).

Случай флаттерной неустойчивости при $l = 0.1 м$, $V = 2.5 м/с$ представлен на рис. 6. Фазовые траектории, полученные численным интегрированием, наматываются на устойчивый предельный цикл с внутренней и внешней сторон (рис. 6, а, б – случай монотонной зависимости сил увода; рис. 6, в – иллюстрирует характеристики устойчивого предельного цикла при монотонной зависимости сил увода (пунктир) и немонотонной (непрерывная)).

На рис. 7 представлены амплитуды автоколебаний, полученные по переменной δ : (рис. 7, а соответствует немонотонной зависимости сил увода; рис. 7, б – монотонной зависимости сил увода).

Амплитуды, полученные при численном интегрировании по переменной δ ,

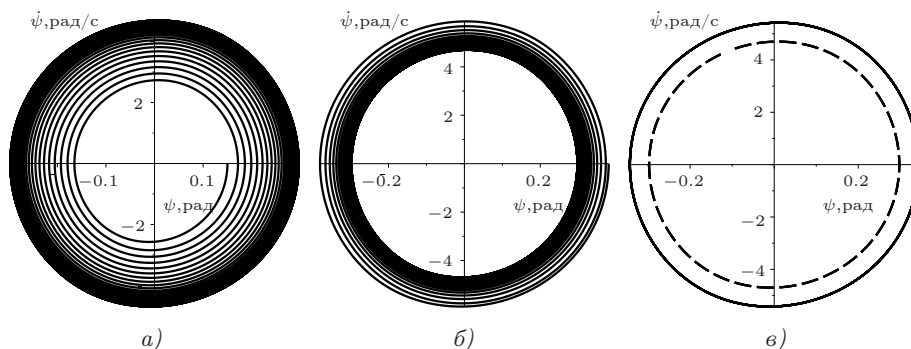


Рис. 6. Фазовые траектории в случае флаттерной неустойчивости.

отличаются от результатов, полученных численным методом по переменной ψ . Различия в амплитудах угла поворота и угла увода могут быть связаны с тем, что при достижении максимума по углу увода скорость изменения угла ψ может быть отличной от нуля.

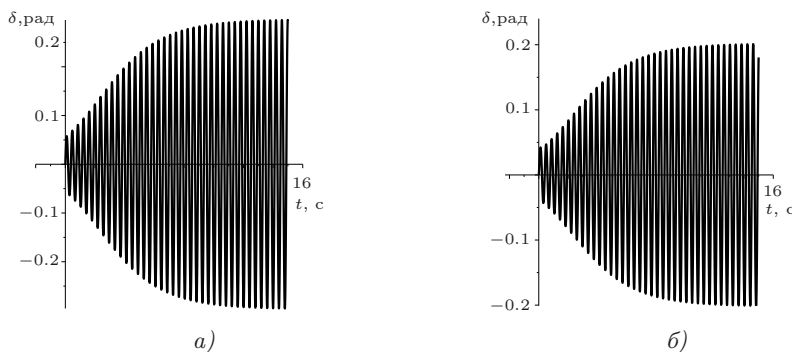


Рис. 7. Амплитуды автоколебаний.

Выводы. Предлагаемый подход в п. 4 дает возможность провести анализ автоколебаний нелинейной модели колесной сцепки в окрестности прямолинейного движения, моделирующей опорные стойки колесных транспортных систем: определить условия опасной–безопасной потери устойчивости; число предельных циклов; оценить амплитуды автоколебаний, либо области притяжения невозмущенного прямолинейного движения.

1. Арнович Г.В. К теории шимми автомобиля и самолета // Прикл. математика и механика. – 1949. – **13**, № 5. – С. 477–488.
2. Келдыш М.В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси. Избранные труды. Механика / М.В. Келдыш. – М: Наука, 1985. – С. 491–530.

3. Метелицын И.И. некоторые теоремы об устойчивости движения неконсервативных систем // Избр. тр. – М.: Наука, 1977. – С. 38–45.
4. Sharp R.S., Jones C.J. A comparison of tyre representations in a simple wheel shimmy problem // Vehicle System Dynamics. – 1980. – 9. – P. 45–57.
5. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем. – М.: Наука, 1967. – 520 с.
6. Лобас Л.Г. Автоколебания колеса на ориентирующей стойке шасси с нелинейным демпфером // Прикл. математика и механика. – 1981. – 45, № 4. – С. 80–87.
7. V. von Schlippe, Dietrich R. Das Flattern eines bepunkteten Rades. – Bericht 140 der Lilienthal Gesellschaft (1941). = English translation: NASA TM 1365, 1954. – P. 125–147.
8. Racejka H.B. The wheel shimmy phenomenon. – Doctoral Thesis. – Delft University of technology. – 1966. – 192 p.
9. Гоздек В.С. О влиянии различных параметров на устойчивость движения ориентирующихся колес самолета // Тр. ЦАГИ. – 1964. – Вып. 917. – С. 1–30.
10. Besselink J.M. Shimmy of aircraft main landing gears.– PhD thesis. – Delft University of Technology, 2000. – 201 p.
11. Goncharenko V.I. Shimmy of nose gear on an asymmetric suspension // Intern. Appl. Mech. – 1997. – 33, № 2. – P. 168–173.
12. Рокар И. Неустойчивость в механике. Автомобили. Самолеты. Висячие мосты. – М.: Изд-во иностр. лит., 1959. – 288 с.
13. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. – Наука, 1984. – 176 с.
14. Лобас Л.Г., Завьялов В.В. О дивергентных бифуркациях в динамических системах с качением // Прикл. механика. – 1994. – 30, № 12. – С. 86–93.
15. Вербицкий В.Г., Садков М.Я. Приближенный анализ автоколебательной системы // Докл. НАН Украины. – 2001. – № 10. – С. 48–52.

N.A. Velmagina, V.G. Verbitskii

Analysis of self-oscillations of wheeled module in rectilinear motion

The analysis of the stability of rectilinear motion of wheeled module for two cases of approximation the lateral force are done; the results of analytical investigations are confirmed by a series of phase portraits, obtained by numerical integration.

Keywords: *self-oscillations, stability, wheeled module.*

Н.А. Вельмагина, В.Г. Вербицкий

Аналіз автоколивань колісного модуля в прямолінійному режимі руху

Проведено порівняльний аналіз стійкості прямолінійного руху моделі колісного модуля для двох випадків апроксимації сил відведення; результати аналітичного дослідження підтверджуються серією фазових портретів, отриманих шляхом чисельного інтегрування.

Ключові слова: *автоколивання, стійкість, колісний модуль.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
oxsi@bigmir.net

Получено 31.10.11