УДК 62-50:519.7

©2011. **В.Ф. Щербак**

РЕДУЦИРОВАННЫЙ НАБЛЮДАТЕЛЬ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматривается задача построения нелинейного наблюдателя пониженного порядка для механических систем, приведенных к виду, при котором правые части дифференциальных уравнений, описывающих их движение, являются линейными функциями относительно неизвестных компонент фазового вектора. Предложена схема построения нелинейного наблюдателя, порядок которого равен размерности ненаблюдаемых компонент. В качестве приложения рассмотрена задача определения вектора угловой скорости твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, по измерениям ее проекции на одну из связанных с телом осей.

Ключевые слова: *нелинейный наблюдатель, инвариантные многообразия, твердое тело с неподвижной точкой.*

1. Редуцированный наблюдатель. Задача наблюдения для динамических систем возникает во многих практических приложениях теории управления, когда состояние исследуемого объекта известно не полностью и должно быть восстановлено по имеющейся информации о его движении. Одним из способов ее решения является построение для динамической системы, моделирующей движение реального объекта, наблюдателя – вспомогательной системы дифференциальных уравнений, все решения которой стремятся к неизвестному решению исходной системы. Для линейных систем методы построения асимптотических наблюдателей, а также редуцированных наблюдателей пониженного порядка были предложены в [1]. Для нелинейных систем проблема построения асимптотического наблюдателя остается открытой. Классический подход к построению нелинейных наблюдателей состоит в нахождении преобразования координат, приводящего систему к виду, в котором нелинейность в правой части дифференциальных уравнений представлена в виде функции известного выхода системы [2, 3] и не зависит от неизвестных координат.

В работе рассматривается более общий класс систем, а именно, системы линейные относительно неизвестных компонент фазового вектора. Предлагаемый способ определения неизвестных компонент фазового вектора основан на построении дополнительных алгебраических уравнений, которые получены в результате синтеза инвариантных соотношений для специальным образом расширенной системы дифференциальных уравнений.

Предположим, что поведение исследуемого объекта при измерениях, проводимых во время его движения, может быть описано в виде

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n, \tag{1}$$

$$y = h(x), \quad y \in R^k. \tag{2}$$

Здесь $x(t)$ – решение дифференциальных уравнений (1), начальное значение $x_0 = x(0)$ которого считается неизвестным, что не позволяет определить состояние объекта в результате решения задачи Коши. Требуется оценить значения $x(t)$ по информации о выходе системы – функции $y(t)$, которая считается известной для любого момента времени $t > 0$.

Предположим, что система (1), (2) с помощью невырожденной замены переменных приведена к виду, при котором измеряются первые k координат $x_1(t) = (x^1, x^2, \ldots, x^k)^T$. Остальные $m = n - k$ компонент вектора состояния обозначим $x_2 = (x^{k+1}, x^{k+2}, \ldots, x^n)^T$ и, таким образом, $x = (x_1, x_2)^T$. Кроме того, будем считать, что в результате этой замены правые части уравнений линейны относительно неизвестных переменных $x_2(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2, \\ \dot{x_2} = f_2(x_1) + g_2(x_1)x_2, \\ \;\; y = x_1, \end{cases} \tag{3}$$

где $g_1(x_1), g_2(x_1)$ – соответственно матрицы размерностей $k \times m$ и $m \times m$.

Целью решения задачи наблюдения для системы (3) является определение вектора $x_2(t)$ по известным значениям $x_1(t)$. В работах [4, 5] предложен метод построения нелинейных наблюдателей, основанный на использовании нескольких траекторий в обратных задачах управления [6]. В соответствии с этим методом в уравнения для второй траектории системы (3) вводится управление, которое подбирается из условия, что исходная система (3) и ее управляемый прототип имеют заданное инвариантное многообразие. Соотношения, описывающие это многообразие, могут быть использованы как вспомогательные алгебраические уравнения, связывающие вектор $x_2(t)$ и известные величины. В данной статье предложено обобщение указанного подхода: в качестве наблюдателя пониженного порядка формируется система инвариантных соотношений [7] для расширенной системы дифференциальных уравнений без использования вспомогательных траекторий.

В качестве редуцированного наблюдателя, в дополнение к системе (3), рассмотрим неавтономную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\zeta} = \alpha(x_1(t), \zeta), \tag{4}$$

где $\zeta \in R^m$, $\alpha(x_1, \zeta)$ – неопределенная пока функция, относительно которой будем предполагать, что она обеспечивает выполнение условий существования и единственности решений системы (4) для всех $t > 0$. Поскольку значения $x_1(t)$ – известны, то функция $\zeta(t)$ может быть найдена в результате решения задачи Коши для системы (4) при заданной $\alpha(x_1, \zeta)$ и некотором начальном значении $\zeta(0) = \zeta_0$. Таким образом, $\zeta(t)$ зависит лишь от известных величин и будет рассматриваться далее как известная функция времени.

Традиционное понятие редуцированного наблюдателя состоит в следующем. Если функцию $\alpha(x_1, \zeta)$ можно подобрать таким образом, что решения системы (4) с любыми начальными условиями ζ_0 асимптотически стремятся к ненаблюдаемым компонентам $x_2(t)$, то система (4) будет редуцированным наблюдателем порядка m для системы (3). Более общее понятие редуцированного наблюдателя будет таким.

Определение. Система (4) является редуцированным наблюдателем для системы (3), если существует функция $\Phi(x_1, \zeta)$ такая, что для любого ζ_0 значения

$$\lim_{t\to\infty}[x_2(t) - \Phi(x_1(t), \zeta(t))] = 0.$$

С учетом такого обобщения для построения редуцированного наблюдателя порядка m в нашем распоряжении имеются $2m$ свободных функций $\alpha_i(x_1, \zeta)$ и $\Phi_i(x_1, \zeta), \quad i = 1, ..., m$.

Кроме того, введем в рассмотрение множество

$$M = \{(x, \zeta) : x_2 - \Phi(x_1, \zeta) = 0\}, \tag{5}$$

где M является многообразием в $(n + m)$-мерном пространстве переменных x, ζ размерности n. В случае построения искомого наблюдателя M будет инвариантным многообразием для расширенной системы дифференциальных уравнений (3),(4).

2. Схема построения редуцированного наблюдателя. Основная идея излагаемого подхода (выразить неизвестные величины x_2 как некоторые функции от известных x_1, ζ) может быть переформулирована следующим образом. Будем подбирать имеющиеся свободные функции $\alpha(x_1, \zeta)$ и $\Phi(x_1, \zeta)$ такими, чтобы траектории расширенной системы (3),(4) допускали инвариантное многообразие M. Тогда, если начальные условия выбраны так, что траектория, на которой производятся измерения, принадлежит этому многообразию и функция $\Phi(x_1, \zeta)$ известна, то значения $x_2(t)$ могут быть найдены непосредственно. В общем случае начальное состояние не принадлежит M, но если указанное многообразие будет обладать свойством глобального асимптотического притяжения для всех траекторий расширенной системы (3),(4), то с помощью функции $\Phi(x_1, \zeta)$ можно определить асимптотическую оценку $x_2(t)$.

Покажем, что выбором функций $\alpha(x_1, \zeta)$ любое многообразие вида (5) можно сделать инвариантным для некоторых траекторий расширенной системы (3),(4). Обозначим отклонение траекторий от M через

$$e(t) = x_2(t) - \Phi(x_1(t), \zeta(t)).$$

Потребуем, чтобы отклонения $e(t)$ удовлетворяли линейной системе дифференциальных уравнений

$$\dot{e} = G(x_1, \zeta)e, \tag{6}$$

где матрица $G(x_1, \zeta)$ зависит только лишь от известных величин. Так как система (6) допускает тривиальное решение, то выполнения этого требования будет достаточно для инвариантности M.

Действительно, дифференцируя $e(t)$ в силу системы (3),(4), получаем

$$\dot{e} = f_2(x_1) + g_2(x_1)(\Phi + e) - \Phi_{x_1}[f_1(x_1) + g_1(x_1)(\Phi + e)] - \Phi_\zeta \alpha(x_1, \zeta), \qquad (7)$$

где через Φ_{x_1}, Φ_ζ обозначены якобиевы матрицы

$$\Phi_{x_1} = \frac{\partial \Phi(x_1, \zeta)}{\partial x_1}, \quad \Phi_\zeta = \frac{\partial \Phi(x_1, \zeta)}{\partial \zeta}.$$

Для того, чтобы система (7) стала линейной относительно отклонений $e(t)$ достаточно выполнения равенств

$$f_2(x_1) + g_2(x_1)\Phi - \Phi_{x_1}[f_1(x_1) + g_1(x_1)\Phi] - \Phi_\zeta \alpha(x_1, \zeta) = 0. \qquad (8)$$

Отсюда получаем вид правых частей системы дифференциальных уравнений (4) в предположении, что матрица $\Phi_\zeta(x_1, \zeta)$ является невырожденной и для всех значений ее аргументов существует обратная матрица ${\Phi_\zeta}^{-1}(x_1, \zeta)$. Тогда

$$\dot{\zeta} = {\Phi_\zeta}^{-1}[f_2(x_1) + g_2(x_1)\Phi - \Phi_{x_1}(f_1(x_1) + g_1(x_1)\Phi)]. \qquad (9)$$

В результате система (7) приводится к виду (6) с матрицей $G(x_1, \zeta)$ равной

$$G(x, \zeta) = g_2(x_1) - \Phi_{x_1} g_1(x_1). \qquad (10)$$

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 1. Для любой дифференцируемой функции $\Phi(x_1, \zeta)$ такой, что матрица $\Phi_\zeta(x_1, \zeta)$ является невырожденной, существует функция $\alpha(x_1, \zeta)$ такая, что M становится инвариантным многообразием для траекторий системы дифференциальных уравнений (3),(4).

Замечание. Отметим, что требование невырожденности $\Phi_\zeta(x_1, \zeta)$ не ограничевает общности, поскольку в силу имеющейся свободы на выбор функций, $\Phi(x_1, \zeta)$ можно представить, например, в виде $\Phi(x_1, \zeta) = \zeta + \Phi_0(x_1)$ и тогда $\Phi_\zeta(x_1, \zeta)$ – единичная матрица.

Для того чтобы обеспечить свойство глобального притяжения траекторий к инвариантному многообразию M, в нашем распоряжении остается выбор функции $\Phi(x_1, \zeta)$. Как известно, нахождение условий асимптотической устойчивости тривиального решения неавтономной системы дифференциальных уравнений (6) является сложной проблемой. Излагаемая в работе схема построения наблюдателя подразумевает отдельное ее рассмотрение для каждой конкретной динамической системы.

3. Определение угловой скорости твердого тела. Сведение уравнений Эйлера к системе, линейной относительно неизмеряемых компонент. Рассмотрим уравнения, описывающие вращение по инерции твердого тела вокруг неподвижной точки, совпадающей с центром тяжести тела. Обозначим $a_1 = \dfrac{A_2 - A_3}{A_1}$, $a_2 = \dfrac{A_3 - A_1}{A_2}$, $a_3 = \dfrac{A_1 - A_2}{A_3}$, где A_1, A_2, A_3 –

моменты инерции тела относительно главных осей. Запишем динамические уравнения Эйлера

$$\dot{\omega}_1 = a_1\omega_2\omega_3, \quad \dot{\omega}_2 = a_2\omega_1\omega_3, \quad \dot{\omega}_3 = a_3\omega_1\omega_2. \tag{11}$$

Предположим, что выходом системы (11), известным в любой момент времени, является первая компонента $\omega_1(t)$ вектора угловой скорости $\omega(t)$. Нашей задачей является определение по этой информации значений $\omega_2(t), \omega_3(t)$.

Вначале приведем систему (11) к виду (3), для которого применима описанная выше схема решения задачи наблюдения. Выполним замену переменных по формулам:

$$x_1 = \omega_1, \quad x_2 = a_1\omega_2\omega_3, \quad x_3 = a_1(a_2\omega_3^2 + a_3\omega_2^2). \tag{12}$$

Определитель якобиевой матрицы преобразования (12)

$$\det\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\omega_1, \omega_2, \omega_3)} = 2a_1^2(a_2{\omega_3}^2 - a_3{\omega_2}^2).$$

Далее будем считать, что рассматриваются такие траектории системы (11), для которых выполнено следующее

Предположение. Наблюдаемый объект не является осесимметричным $A_2 \neq A_3$, т.е. $a_1 \neq 0$ и в течении всего процесса наблюдения выражение $a_2{\omega_3}^2 - a_3{\omega_2}^2$ отлично от нуля.

В частности, для несимметричных тел с распределением масс, удовлетворяющих неравенствам $A_1 < A_2, A_1 < A_3$ либо $A_1 > A_2, A_1 > A_3$ знаки a_2, a_3 различны и указанное предположение выполнено при $\omega_2^2 + \omega_3^2 \neq 0$, т.е. когда выход $\omega_1(t)$ не равен тождественно константе.

В случае когда $a_1 = 0$, выход $\omega_1(t)$ постоянен и система (11) очевидно ненаблюдаема. Отметим также, что для симметричных тел, когда $a_2 = 0$ или $a_3 = 0$, уравнения (11) становятся линейными и решение задачи наблюдения может быть найдено путем построения соответствующего наблюдателя Луенбергера [1].

В новых переменных система (11) приобретает вид, линейный относительно неизвестных переменных x_2, x_3

$$\dot{x_1} = x_2,\ \dot{x_2} = x_1x_3,\ \dot{x_3} = ax_1x_2, \tag{13}$$

где $a = 4a_2a_3$. Так как при этом $x_1(t) \equiv \omega_1(t)$, то выход системы (13) известен. Таким образом, задача получения значений компонент $\omega_2(t), \omega_3(t)$ фазового вектора системы (11) сводится к нахождению переменных $x_2(t), x_3(t)$ системы (13) и последующему решению алгебраических уравнений (12).

4. Дополнительные алгебраические соотношения для оценки неизвестных компонент. Для определения $x_2(t), x_3(t)$ составим уравнения редуцированного наблюдателя с неопределенными пока правыми частями

$$\dot{\zeta}_2 = \alpha_2(x_1, \zeta_2, \zeta_3), \quad \dot{\zeta}_3 = \alpha_3(x_1, \zeta_2, \zeta_3). \tag{14}$$

В соответствии с замечанием к теореме 1 будем искать такие дифференцируемые фукции $\alpha_2(x_1,\zeta_2,\zeta_3),\alpha_3(x_1,\zeta_2,\zeta_3),\Phi_2(x_1),\Phi_3(x_1)$ чтобы равенства

$$x_2=\zeta_2+\Phi_2(x_1),\quad x_3=\zeta_3+\Phi_3(x_1) \tag{15}$$

стали инвариантными соотношениями [7] для системы (13), (14), а соответствующее многообразие

$$M=\{(x,\zeta):x_2-\zeta_2-\Phi_2(x_1)=0,\ x_3-\zeta_3-\Phi_3(x_1)=0\} \tag{16}$$

было инвариантным. Составим уравнения ошибок, обозначив отклонения траекторий от многообразия M через $e_i=x_i-\zeta_i-\Phi_i(x_1),\quad i=2,3.$

Выберем правые части вспомогательной системы (14) согласно (9). Получаем

$$\alpha_2=x_1(\zeta_3+\Phi_3)-\acute{\Phi}_2(\zeta_2+\Phi_2),\quad \alpha_3=(ax_1-\acute{\Phi}_3)(\zeta_2+\Phi_2). \tag{17}$$

Здесь $\acute{\Phi}_i$ – производная функции $\Phi_i(x_1),\quad i=2,3$. В результате система дифференциальных уравнений в отклонениях (7) становится линейной и однородной относительно e_2,e_3:

$$\dot e_2=-\acute{\Phi}_2e_2+x_1e_3,\quad \dot e_3=(ax_1-\acute{\Phi}_3)e_2. \tag{18}$$

Получили, что $e_2=0,e_3=0$ являются решением системы (18), а значит, для любых дифференцируемых функций $\Phi_2(x_1),\Phi_3(x_1)$ алгебраические связи (15) становятся инвариантными соотношениями системы дифференциальных уравнений (13), (14), а соответствующее им M – инвариантным многообразием. Так как $x_2(0),x_3(0)$ неизвестны, то в общем случае траектории систем (13), (14) не принадлежат указанному многообразию. В то же время, если M будет обладать свойством глобального притяжения, тогда формулы (15) позволят находить асимптотические оценки для переменных $x_2(t),x_3(t)$.

5. Стабилизация отклонений от инвариантного многообразия. Выбор правых частей редуцированного наблюдателя в виде (17) позволяет синтезировать семейство инвариантных многообразий M для системы (13), (14). Рассмотрим задачу подбора имеющихся свободных функций с целью обеспечения условий притяжения всех траекторий этой системы к одному из этих многообразий. Так как правые части вспомогательной системы уже зафиксированы равенствами (17), то для обеспечения свойства глобальной асимптотической устойчивости для тривиального решения системы (18) в нашем распоряжении остается выбор функций $\Phi_2(x_1),\Phi_3(x_1)$. Введем обозначения

$$v_2(x_1)=-\acute{\Phi}_2,\quad v_3(x_1)=ax_1-\acute{\Phi}_3, \tag{19}$$

с учетом которых система (18) примет вид

$$\dot e_2=v_2(x_1)e_2+x_1e_3,\quad \dot e_3=v_3(x_1)e_2. \tag{20}$$

В силу имеющегося произвола в выборе $\Phi_2(x_1),\Phi_3(x_1)$ можем рассматривать функции v_2,v_3 как управления. Выберем эти управления такими, чтобы нулевое решение системы (20) стало глобально асимптотически устойчивым.

Теорема 2. Пусть значения выхода $x_1(t)$ системы (13) в течение процесса измерений принадлежат отрезку $x_1(t) \in [x_1^{min}; x_1^{max}]$, не содержащему точку 0. Тогда существуют дифференцируемые функции $\Phi_2(x_1), \Phi_3(x_1)$ такие, что система (13), (14) имеет инвариантное многообразие M, обладающее свойством глобального притяжения для всех своих траекторий.

Доказательство проведем в два этапа. На первом, в соответствии с предложенной в предыдущих разделах методикой, найдем семейство управлений v_2, v_3, при которых отклонения e_2, e_3 связаны линейным однородным инвариантным соотношением. На втором этапе, устремив одну из переменных $e_i,\ i = 2, 3$, к нулю, автоматически обеспечиваем стремление к нулю другой координаты.

Потребуем вначале, чтобы уравнения (20) имели линейное инвариантное многообразие вида $e_3 = ke_2$, где k – константа, $\operatorname{sign} k = \operatorname{sign} x_1$ (по условию теоремы $x_1(t)$ не меняет знак). В общем случае, траектории не будут лежать на этой прямой, поэтому введем переменную η – отклонение траекторий (20) от этого многообразия: $e_3 = ke_2 + \eta$. Уравнение для η имеет вид

$$\dot{\eta} = -k\eta x_1 + (v_3 - kv_2 - k^2 x_1)e_2. \tag{21}$$

Чтобы уравнение стало однородным относительно η, накладываем ограничение на управление v_3, полагая $v_3 = kv_2 + k^2 x_1$. Обозначим $w = v_2 + kx_1$, рассматривая ее как функцию, на которую пока еще не наложено никаких условий. Перепишем (20) в виде

$$\dot{e}_2 = we_2 + x_1\eta, \qquad \dot{\eta} = -kx_1\eta. \tag{22}$$

Не ограничивая общности, предположим для определенности, что $x_1 > 0$. Рассмотрим функцию Ляпунова $V = \dfrac{1}{2}({e_2}^2 + \eta^2)$ и вычислим ее производную:

$$\dot{V} = \varepsilon_2(we_2 + x_1\eta) + \eta(-k\eta x_1) = {e_2}^2 w + e_2\eta x_1 - k\eta^2 x_1.$$

Оценим последнее выражение

$$\dot{V} \le e_2^2 w + \frac{{e_2}^2 + \eta^2}{2}x_1 - k\eta^2 x_1 = (w + \frac{x_1}{2}){e_2}^2 + (\frac{x_1}{2} - kx_1)\eta^2.$$

Требуя для k, w выполнения условий $w + \dfrac{x_1}{2} \le -1$ и $k \ge \dfrac{1}{x_1^{min}} + \dfrac{1}{2}$, получаем

$$\dot{V} \le -{e_2}^2 - \eta^2.$$

Таким образом показано, что при выборе управляющих функций, удовлетворяющих приведенным ограничениям, переменные $e_2,\ \eta$ асимптотически стремятся к нулю. Так как при этом выполнено равенство $e_3 = ke_2 + \eta$, то переменная e_3 также стремится к нулю. А это и означает, что инвариантное многообразие M является притягивающим. Теорема доказана.

В заключение выберем окончательный вид управлений из семейства функций, удовлетворяющих всем приведенным ограничениям. Чтобы производная от функции Ляпунова стала отрицательной, выберем k достаточно большим положительным числом и положим $w = -2 - \frac{x_1}{2} < -1 - \frac{x_1}{2}$. Тогда $v_3 = -k$, а $v_2 = -k - x_1$. В соответствии с (19) для определения вида инвариантных соотношений имеем уравнения

$$\acute{\Phi}_2 = 1 + x_1, \quad \acute{\Phi}_3 = (a-1)x_1 + k. \tag{23}$$

В качестве частного решения выберем функции

$$\Phi_2(x_1) = x_1 + \frac{x_1^2}{2}, \quad \Phi_3(x_1) = kx_1 + \frac{a-1}{2}{x_1}^2. \tag{24}$$

Тогда искомый наблюдатель (14) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_2 = -(1+x_1)\zeta_2 + x_1\zeta_3 + x_1 + (\frac{3}{2} + k){x_1}^2 + \frac{a}{2}{x_1}^3, \\ \dot{\zeta}_3 = (x_1 + k)(\zeta_2 + x_1 + {x_1}^2). \end{cases} \tag{25}$$

Интегрируем систему (25) с произвольными начальными условиями. С учетом (15), асимптотические оценки неизвестных компонент системы (13) находим из равентсв

$$x_2 = \zeta_2 + \frac{x_1^2}{2} + x_1 + \varepsilon_2, \qquad x_3 = \zeta_3 + kx_1 + \frac{a-1}{2}{x_1}^2 + \varepsilon_3, \tag{26}$$

где по теореме 2 переменные $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ стремятся к нулю.

Заключение. В работе предлагается метод построения редуцированного наблюдателя для динамических систем, правые части которых линейны по неизвестным компонентам фазового вектора. Он основан на использовании методов управляемой стабилизации нелинейных систем относительно части переменных. Уравнения исходной системы дополняются уравнениями наблюдателя, порядок которого равен количеству ненаблюдаемых компонент вектора состояния. Для полученной расширенной системы решается задача синтеза уравнений наблюдателя, при которых многообразие, описываемое системой произвольных дополнительных соотношений, становится интегральным многообразием. Вид дополнительных алгебраических соотношений выбирается так, чтобы полученное инвариантное многообразие стало глобально притягивающим.

1. *Luenberger D.* Introduction to observers // IEEE Trans. Aut. Contr. – 1977. – **3**. – P. 47–52.
2. *Krener A., Respondek W.* Nonlinear observers with linearizable error dynamics // SIAM J. Control Optim. – 1985. – **23**, № 2. – P. 197–216.

3. *Hou M., Pugh A.* Observer with linear error dynamics for nonlinear multi-output systems // Systems and Control Letters. – 1999. – **37**. – P. 1–9.
4. *Щербак В.Ф.* Синтез дополнительных соотношений в задаче наблюдения // Тр. ИПММ НАНУ. – 2003. – **8**. – С. 229–235.
5. *Shcherbak V. F.* Synthesis of virtual measurements in nonlinear observation problem // Proc. Appl. Math. Mech. (PAMM). – 2004. – **4**, Issue 1. – P. 139–140.
6. *Ковалев А. М., Щербак В. Ф.* Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1993. – 285 с.
7. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы диференциальных уравнений //Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.

V.F. Shcherbak

Reduced observer for mechanical systems

The problem of nonlinear reduced order observer design for mechanical systems is considered. It is assumed that a system is represented in a linear form with respect to unobserved components of the phase vector. The method is based on a synthesis of invariant relations for the extended system of differential equations. This relations are considered as additional algebraic equations for unknown components of the state. As an application of this method the problem of determination of the angular velocity vector of rotating rigid body under measuring of its projection on one of the connected with the body axes is studied.

Keywords: *nonlinear observer, invariant manifolds, rigid body with a fixed point.*

В.Ф. Щербак

Редукований спостерігач механічних систем

Розглянуто задачу побудови нелінійного спостерігача зниженого порядку для механічних систем, які приведено до виду, при якому праві частини диференціальних рівнянь, що описують їх рух, є лінійними функціями щодо невідомих компонент фазового вектора. Запропонований у роботі спосіб засновано на синтезі інваріантних співвідношень для розширеної системи диференціальних рівнянь, які розглядаються як додаткові алгебраїчні рівняння для невідомих компонент стану системи. Як додаток розглянуто задачу визначення вектора кутової швидкості твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки, за вимірюваннями її проекції на одну з пов'язаних з тілом осей.

Ключові слова: *нелінійний спостерігач, інваріантні многовиди, тверде тіло з нерухомою точкою.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
shvf@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 07.02.11