

УДК 531.534

©2003. Ю.В. Михлин, Т.В. Шматко, Г.В. Манучарян

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕГУЛЯРНЫХ И ХАОТИЧЕСКИХ ФОРМ КОЛЕБАНИЙ В УПРУГИХ СИСТЕМАХ С НЕСКОЛЬКИМИ ПОЛОЖЕНИЯМИ РАВНОВЕСИЯ

Рассматриваются вынужденные колебания нелинейной системы с двумя степенями свободы и несколькими положениями равновесия. Такие системы могут быть получены путем дискретизации моделей упругих систем в закритическом состоянии. Анализируются формы колебаний, которые являются периодическими, если амплитуда внешнего периодического воздействия мала, и становятся хаотическими, если эта амплитуда возрастает. Формулируется и решается задача устойчивости таких форм колебаний с использованием так называемого "ограниченного критерия устойчивости по Ляпунову" и некоторых вычислительных процедур. Исследуется устойчивость форм колебаний нелинейных стержней, оболочек, арок. Взаимная неустойчивость фазовых траекторий используется в качестве критерия появления хаотического поведения в нелинейной системе. Сравнение траекторий с очень близкими начальными условиями проводится на основе предложенного критерия устойчивости. Конкретные вычисления, которые проводятся для уравнения Дуффинга, позволяют наблюдать возникновение и развитие областей хаотического поведения.

Введение. Рассматриваемые модели могут быть получены путем дискретизации упругих систем, исходное положение равновесия которых становится неустойчивым под действием сжимающей силы. Если перемещение нелинейной упругой системы аппроксимируется одной гармоникой ряда Фурье по пространственным координатам, то после применения процедуры Бубнова-Галеркина может быть получена система с одной степенью свободы, которая описывается неавтономным уравнением Дуффинга. При малых амплитудах внешнего периодического воздействия в такой системе наблюдаются периодические колебания, однако с ростом этих амплитуд происходит переход к хаотическим колебаниям [1, 2].

Если удерживаются две гармоники ряда Фурье по пространственным координатам, то после дискретизации получаем систему с двумя степенями свободы. В этом случае можно формулировать и решать задачу устойчивости одной формы периодических или хаотических колебаний в пространстве большей размерности. Неустойчивость этой формы колебаний означает "перекачку энергии" в другую форму колебаний. Имеется чрезвычайно много публикаций по общим и специальным проблемам устойчивости периодических или почти-периодических решений. Однако проблема устойчивости форм хаотических колебаний не имеет аналитического решения в общем случае, поскольку аналитическое представление хаотических колебаний невозможно, и теория Флоке-Ляпунова не имеет места в этом случае. Цель настоящей работы – получить из классического определения устойчивости по Ляпунову достаточно простой и в то же время эффективный критерий, который позволяет определить границы областей неустойчивости в пространстве параметров системы с использованием вычислений на компьютере.

В настоящей работе используется так называемый "ограниченный критерий устойчивости по Ляпунову", который обсуждается в п. 3. Вычисления в соответствии с этим критерием продолжаются до тех пор, пока не стабилизируются границы областей устой-

чивости и неустойчивости в пространстве параметров системы. Эффективность предложенного критерия демонстрируется на модельном примере в п. 4. Устойчивость форм регулярных и хаотических колебаний стержней, оболочек и арок анализируется в п. 5.

Новый подход к определению начала хаотических колебаний в нелинейных системах, основывающийся на ограниченном критерии устойчивости по Ляпунову, рассмотрен в п. 6. Хаотическое поведение нелинейных систем является объектом исследования в многочисленных публикациях. Критерии появления хаотических колебаний очень различны [1, 2] и др. Существенно, что все фазовые траектории в области так называемого "странного аттрактора" взаимно неустойчивы, то есть траектории, которые были близки между собой в какой-то момент времени, затем расходятся экспоненциально [2-4] и др. Именно эта взаимная неустойчивость фазовых траекторий используется в настоящей работе в качестве критерия начала хаотического поведения в динамической системе. Сравниваются траектории с близкими начальными условиями. Ограниченный критерий устойчивости по Ляпунову позволяет оценить взаимную устойчивость/неустойчивость этих траекторий. Вычисления в узлах некоторой сетки в избранной области фазового пространства позволяют наблюдать процесс появления и расширения областей хаотического поведения при изменении параметров системы. Конкретные результаты получены для неавтономного уравнения Дуффинга в случае, когда изменяется амплитуда внешнего периодического воздействия.

1. Основная модель. Рассмотрим систему, которая может быть получена путем дискретизации модели, описывающей динамику нелинейного стержня в рамках гипотезы Кирхгофа [5], а также моделей динамики длинных пологих цилиндрических оболочек [6, 7] и др. (Конкретные вычисления с использованием стандартной процедуры метода Бубнова-Галеркина здесь не приводятся. Они достаточно полно представлены в литературе, их можно найти также в работах авторов [8 – 11]):

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \gamma \dot{y}_1 - \alpha y_1 + \beta y_1^3 + c y_1 y_2^2 &= f \cos \omega t, \\ \ddot{y}_2 + \gamma \dot{y}_2 + a y_2 + b y_2^3 + c y_2 y_1^2 &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

здесь $y_1(t)$ и $y_2(t)$ – искомые функции; γ – коэффициент, определяющий демпфирование; все коэффициенты, кроме α , предполагаются положительными. В случае $\alpha > 0$ уравнения (1) описывают закритическую динамику соответствующих упругих систем.

Если $y_2 = 0$, то мы получаем неавтономное уравнение Дуффинга с двумя потенциальными ямами. Известно [1, 2] и др., что при возрастании амплитуды внешнего периодического воздействия f поведение решений этого уравнения существенно меняется. Происходит последовательное удвоение периода колебаний и, начиная с некоторого значения f , можно наблюдать появление хаотических колебаний (например, если $\alpha = 10$, $\beta = 100$, $\gamma = 1$, $\omega = 3,76$, такие хаотические колебания начинаются, если значение f примерно равно единице).

2. Ограниченный критерий устойчивости по Ляпунову. Здесь обсуждается проблема орбитальной устойчивости формы регулярных или хаотических колебаний $y_2 = 0$ в системе (1). Неустойчивость этой формы означает "перекачку" энергии из одной гармоники ряда Фурье по пространственным координатам в другую. Переменные y_2, \dot{y}_2 являются вариациями рассматриваемого решения (или возмущениями). Предполагаем, что значения этих переменных в области устойчивости рассматриваемой формы колебаний существенно меньше значений переменных y_1, \dot{y}_1 . Это предположение соответствует общепринятой постановке задачи локальной устойчивости. Поскольку за-

дача устойчивости форм хаотических колебаний не может быть решена аналитически (теория Флоке-Ляпунова не имеет места в этом случае), ставится задача получить из классического определения устойчивости по Ляпунову некоторые следствия, которые позволяют найти границы областей неустойчивости в пространстве параметров системы с использованием численного расчета.

Рассмотрим хорошо известное определение устойчивости по Ляпунову [12, 13] и др., которое может быть сформулировано, например, таким образом: произвольное решение $y = 0$ устойчиво, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такую постоянную $\delta > 0$, что для всех $y_0 \in N_\delta^{(0)}$ и $t \geq 0$ будет выполнено условие $y(t) \in N_\varepsilon^{(0)}$. Здесь $N_\delta^{(0)}$ и $N_\varepsilon^{(0)}$ означают δ - и ε -окрестность формы колебаний $y = 0$. Такая окрестность может быть выбрана по-разному, например, $N_\sigma = \{y \in R^n : |y| \leq \sigma\}$.

Введем связь между величиной ε и начальным значением переменной y . Пусть

$$\varepsilon = \rho |y_0| \leq \rho \delta \quad (\rho = \text{const}). \quad (2)$$

Условие (2) означает, что величина δ не может быть произвольно малой, так как $\delta \geq \frac{\varepsilon}{\rho}$.

Перепишем последнее неравенство следующим образом: $\rho \geq \frac{\varepsilon}{\delta}$; таким образом, постоянная ρ – это верхний предел отношения $\frac{\varepsilon}{\delta}$. Кроме того, из условия устойчивости по Ляпунову, принимая во внимание соотношение (2), находим, что $|y(t)| \leq \rho |y(0)|$.

Получаем из предыдущего следующий критерий, который формулируется для решений системы (1): орбитальная неустойчивость формы регулярных или хаотических колебаний $y_1 = y_1(t)$, $y_2 = 0$ фиксируется, если:

$$\sup_{t \in [0, T]} |y_2(t)| \geq \rho |y_2(0)|. \quad (3)$$

Предложенный критерий (3), полученный при условии, что величина δ не может быть сколь угодно малой, может быть назван "ограниченным критерием устойчивости по Ляпунову".

Обсудим выбор до сих пор не определенных величин ρ и T . Здесь значение ρ^{-1} – это мера малости начальных вариаций по отношению к максимально допустимым вариациям для любых $t \geq 0$. Возрастание величины ρ означает, что допустимые начальные значения вариаций убывают. Имеется некоторый произвол в выборе величины ρ , и это не случайно, так как в области неустойчивости при возрастании t вариации выйдут за пределы ε -окрестности исходного решения при любом выборе ρ . Мы можем выбрать, например, $\rho = 10$.

Обсудим теперь выбор величины T . Анализ устойчивости производится с использованием компьютерного расчета на основе стандартной программы Рунге-Кутты. Расчет ведется в узлах некоторой сетки в избранной области плоскости (или пространства) параметров системы. *Вычисления продолжаются до тех пор, пока в выбранном масштабе сетки не стабилизируются границы областей устойчивости и неустойчивости. Это и есть принципиальный критерий для выбора времени T .* Ясно, что если шаг сетки неограниченно убывает, то время расчета T стремится к бесконечности. Заметим, что стабилизация границы означает, что для выбранного шага сетки новые точки неустойчивости не появляются за время, сравнимое с тем временем, когда эта неустойчивость фиксировалась.

Следует заметить, что величины ρ и T связаны между собой. Для того, чтобы установить это, обсудим связь критерия (3) с определением так называемых постоянных Ляпунова [2, 4] и др., которые, как правило, также определяются путем численного расчета на конечном интервале времени. Появление положительных постоянных Ляпунова означает глобальную взаимную неустойчивость фазовых траекторий, что является одним из критериев начала хаотических колебаний в нелинейной системе. Постоянную Ляпунова можно ввести, например, таким образом:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|y(t)|}{|y(0)|},$$

откуда следует, что

$$\frac{|y(t)|}{|y(0)|} = e^{(\lambda+\Delta)t}, \text{ где } \Delta \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Сравнивая (4) и (3), получаем неравенства

$$\rho \leq e^{(\lambda+\Delta)T}, \quad T \geq \frac{\ln \rho}{\lambda + \Delta} \text{ (при } \lambda > 0), \quad (5)$$

где T – максимальное время расчета. Таким образом, постоянные ρ и T , которые вводятся в критерии (3), оказываются связанными неравенством (5). Ясно, что уменьшение величины ρ ведет к уменьшению времени расчета T (это подтверждается и конкретными расчетами). С приближением к границе областей устойчивости и неустойчивости значения постоянной Ляпунова λ уменьшаются и время расчета увеличивается. Однако значение ρ не может быть выбрано слишком малым, поскольку вблизи границы значения λ малы, и время расчета будет зависеть от неопределенной величины Δ .

Обсудим также зависимость (или независимость) результатов анализа устойчивости от начальных условий. Известно, что анализ устойчивости на основе линеаризованных уравнений в вариациях не зависит от начальных условий. Однако дополнительные области неустойчивости в пространстве параметров системы, обусловленные влиянием нелинейности, имеют меньшую размерность, чем области неустойчивости, полученные из анализа линеаризованных уравнений [14, 15]. Численный расчет подтверждает, что результаты анализа устойчивости на основе критерия (3) не зависят от начальных условий вариаций, если только эти начальные значения достаточно малы.

Замечание 1. Заметим, что критерий, подобный (3), используется в работе [16]. Однако, там никак не обсуждается выбор времени расчета.

Замечание 2. Мы можем использовать вместо критерия (3) следующий "энергетический" критерий устойчивости. А именно, неустойчивость формы колебаний $y_2 = 0$ фиксируется, если

$$\sup_{t \in [0, T]} (y_2^2(t) + \dot{y}_2^2(t)) \geq \rho (y_2^2(0) + \dot{y}_2^2(0)). \quad (6)$$

Ясно, и численные вычисления это подтверждают, что области неустойчивости в пространстве параметров системы более широкие в том случае, когда мы используем критерий (6), чем при использовании критерия (3). Дело в том, что существуют области, где вариации $y_2(t)$ малы, но соответствующие скорости $\dot{y}_2(t)$ велики.

Заметим, наконец, что для реализации предложенного здесь подхода достаточно использовать стандартную процедуру Рунге-Кутты, которая обеспечивает хорошую точность расчета, вместе с дополнительной проверкой условия (3).

3. Модельный пример: уравнение Матье. В качестве модельного примера рассмотрим устойчивость тривиального решения известного уравнения Матье:

$$\ddot{y} + (a + 16q \cos 2t) y = 0.$$

Выделим следующую область на плоскости параметров (a, q) (плоскости Айнса-Стретта): $0 \leq a \leq 4,8$, $0 \leq q \leq 0,2$. Выбирается следующий шаг сетки: $\Delta a = 0,1$, $\Delta q = 0,001$;

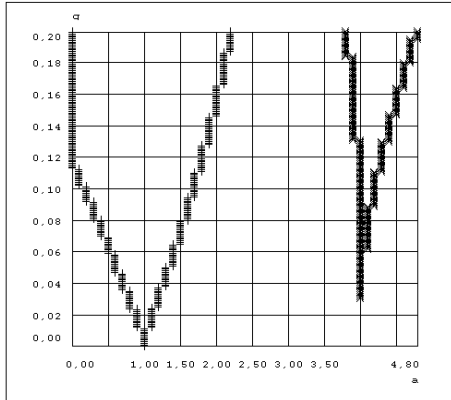


Рис. 1. Границы областей неустойчивости, найденные для уравнения Матье с помощью критерия (3).

таким образом, вычисления на основе критерия (3) ($\rho = 10$) ведутся примерно в 10000 узлах сетки в данной области.

В избранном масштабе границы областей устойчивости и неустойчивости в данной области плоскости Айнса-Стретта стабилизируются на интервале $0 \leq t \leq T = 700$, причем время вычислений в масштабе реального времени очень мало. Результаты вычислений, как и ожидалось, не зависят от начальных условий. Эти результаты совпадают с известными, которые получаются на основе классического критерия Ляпунова, и представлены на рис. 1.

4. Устойчивость форм колебаний нелинейных стержней, оболочек и арок.

Вернемся к рассмотрению системы (1), описывающей нелинейную динамику стержней и оболочек. Используя масштабные преобразования, выберем коэффициенты системы так, чтобы $\alpha = 10$, $\beta = 100$, $\gamma = 1$, $\omega = 3,76$. Эти значения соответствуют системе с одной степенью свободы ($y_2 = 0$), рассмотренной в [1].

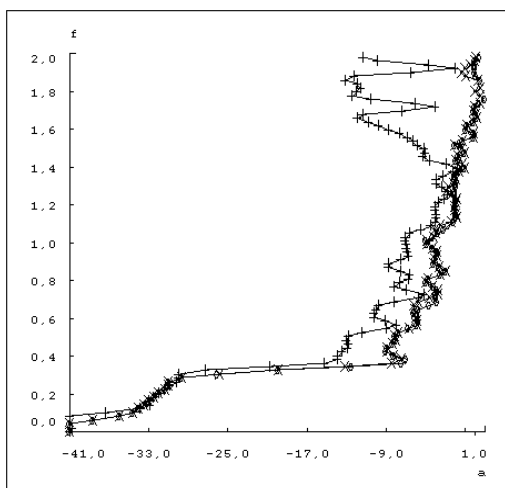


Рис. 2. Стабилизация границ областей устойчивости и неустойчивости формы колебаний $y_2 = 0$ для модели (1) при $\delta = 0,5$.

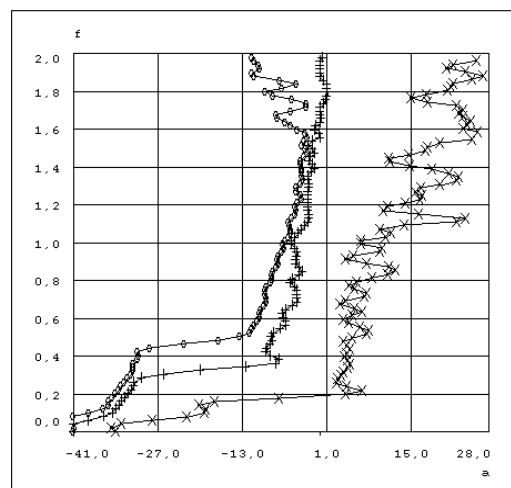


Рис. 3. Границы областей устойчивости и неустойчивости формы колебаний $y_2 = 0$ для модели (1) при различных значениях коэффициента трения.

Рассмотрены несколько вариантов выбора параметров b, c . Значения параметра a здесь варьируются. Заметим, что интервал $a \in [-400, +8800]$ и другие значения параметров системы соответствуют реальным характеристикам стержней и оболочек. Представленные далее результаты численного расчета не зависят от начальных условий при достаточно малых вариациях. Шаг сетки выбирается таким образом: $\Delta a = 1, \Delta f = 0,04$. В выбранном масштабе границы областей устойчивости и неустойчивости на плоскости (a, f) стабилизируются на интервале $0 \leq t \leq T \approx 125$.

Результаты вычислений на основе критерия (3) ($\rho = 10$) показаны на рис. 2 и 3 ($b = 1600, c = 400$). Области неустойчивости расположены в плоскости параметров слева от полученных границ. Типичный процесс стабилизации границ показан на рис. 2, где кривые, отмеченные значком +, соответствуют $T = 10$, кривые, отмеченные значком \times , соответствуют $T = 50$, кривые, отмеченные значком \circ , соответствуют $T = 100$. Здесь $0 \leq f \leq 2; -41 \leq a \leq 1; \gamma = 0,5$. Границы областей устойчивости и неустойчивости на плоскости (a, f) показаны на рис. 3 для различных значений параметра трения. А именно: кривые, отмеченные знаком \times , соответствуют $\gamma = 0$; кривые, отмеченные знаком +, соответствуют $\gamma = 0,5$; кривые, отмеченные знаком \circ , соответствуют $\gamma = 1$. Здесь $0 \leq f \leq 2; -41 \leq a \leq 28$.

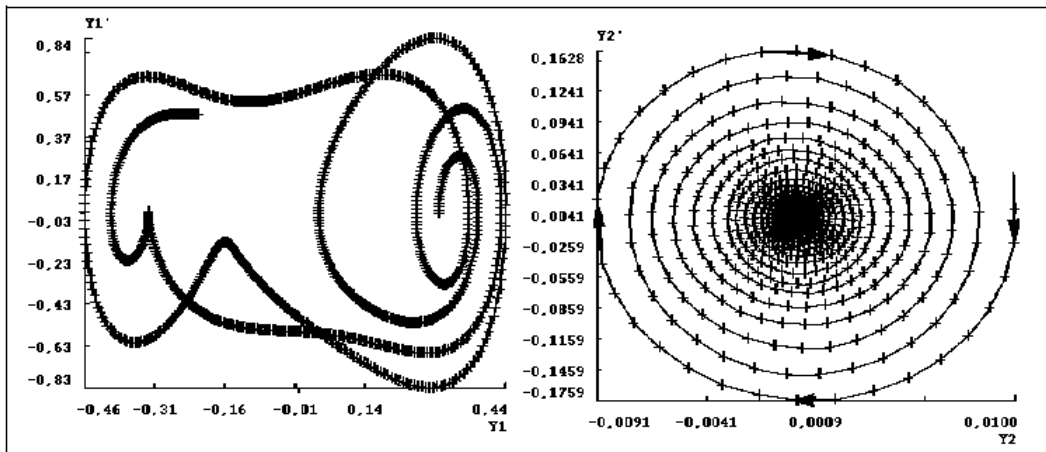


Рис. 4. Траектория движения вблизи формы хаотических колебаний $y_2 = 0$ для модели (1) при $a = 300, f = 1,5, \delta = 1$ на плоскости (y_1, \dot{y}_1) . Поведение вариаций для формы колебаний $y_2 = 0$ при $a = 300, f = 1,5, \delta = 1$ на плоскости (y_2, \dot{y}_2) .

Примеры фазовых плоскостей неустойчивой регулярной и устойчивой хаотической форм колебаний показаны на рисунках. На рис. 4 изображена форма хаотических колебаний $y_2 = 0$, которая является устойчивой по отношению к малым возмущениям y_2 ($f = 1,5, a = 300, \gamma = 1$). Здесь представлены фазовые плоскости y_1, \dot{y}_1 и y_2, \dot{y}_2 .

Уравнения, аналогичные уравнениям (1), получаются после дискретизации уравнений динамики пологой арки в рамках гипотезы Кирхгофа. Результаты расчета форм колебаний на устойчивость на основе критерия (3) приведены в работе [17].

5. Неавтономное уравнение Дуффинга. Взаимная неустойчивость фазовых траекторий. Рассмотрим хорошо известное неавтономное уравнение Дуффинга

$$\ddot{y} + \gamma \dot{y} - \alpha y + \beta y^3 = f \cos \omega t, \quad (7)$$

где выбраны следующие значения параметров уравнения: $\gamma = 1, \alpha = 10, \beta = 100, \omega = 3,76$, а значение амплитуды f варьируется. Выделим следующую область на фазовой

плоскости уравнения (7): $0 \leq y \leq 0,66$; $0 \leq \dot{y} \leq 0,8$. Вводим в этой области некоторую сетку, используя приращения $\Delta y = 0,02$, $\Delta \dot{y} = 0,016$. Узлы сетки $P_{ij}(y_{i0}, y_{j0})$ выбираются в качестве начальных точек для некоторых решений $y_{ij}^{(1)}(t)$ уравнения (7). Возьмем также другие начальные точки, близкие к выделенным точкам P_{ij} , а именно точки $Q_{ij}(y_{i0} + \Delta y_0, y_{j0})$, где значения Δy_0 достаточно малы, и рассмотрим, соответственно, другие решения $y_{ij}^{(2)}(t)$. Теперь будем сравнивать траектории, исходящие из близких начальных точек, используя ограниченный критерий устойчивости по Ляпунову (3).

Будем полагать, что эти траектории взаимно неустойчивы, если

$$\sup_{t \in [0, T]} \left| y_{ij}^{(1)}(t) - y_{ij}^{(2)}(t) \right| \geq \rho \left| \Delta y_0 \right|. \quad (8)$$

Пусть теперь $\rho = 10$, а $\Delta y_0 = 0,002$. Результаты анализа взаимной неустойчивости с использованием (8) (время стабилизации здесь $T < 100$) представлены на рис. 5 и 6 для различных значений амплитуды внешнего периодического воздействия: $f = 0,8$; $0,9$. На рисунках выделены начальные точки, которые отвечают взаимно неустойчивым траекториям. Вычисления (для выбранной сетки в рассматриваемой области фазовой плоскости уравнения) показывают, что для $f < 0,85$ взаимная неустойчивость фазовых траекторий наблюдается только лишь вблизи ветвей сепаратрисы. Области неустойчивости начинают очень быстро расширяться, если значение амплитуды f немного больше, чем $0,85$. Полученные результаты вполне отвечают ранее полученным границам начала хаотического поведения в уравнении Дуффинга.

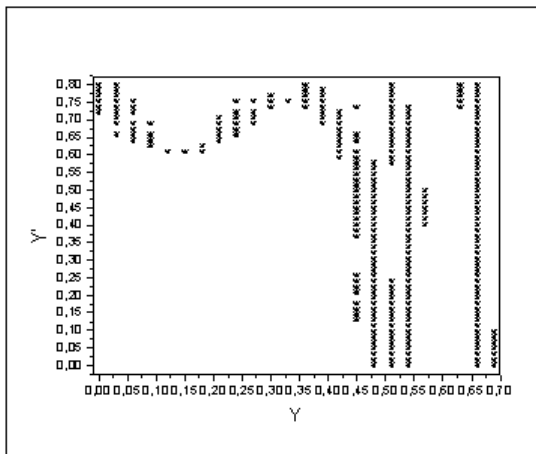


Рис. 5. Анализ взаимной неустойчивости фазовых траекторий для уравнения Дуффинга с использованием (8) при $\rho = 10$, $\Delta y_0 = 0,002$, $f = 0,8$, $T = 25$.

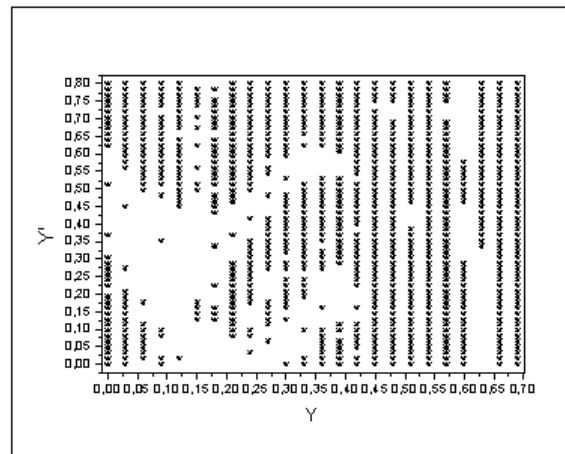


Рис. 6. Анализ взаимной неустойчивости фазовых траекторий для уравнения Дуффинга с использованием (8) при $\rho = 10$, $\Delta y_0 = 0,002$, $f = 0,9$, $T = 25$.

Заключение. В настоящей работе исследуется устойчивость регулярных или хаотических форм колебаний в нелинейных упругих системах с двумя степенями свободы и несколькими положениями равновесия. В работе предложен критерий устойчивости, который является следствием классического критерия устойчивости по Ляпунову в том случае, когда начальные вариации ограничены снизу. Этот критерий может быть легко реализован на компьютере. Вычисления проводятся в узлах некоторой выбранной сетки в пространстве параметров системы и продолжаются до тех пор, пока границы

областей устойчивости и неустойчивости (в выбранном масштабе) не стабилизируются. Это и есть принципиальное условие выбора конечного времени вычислений. Представленный здесь метод исследования устойчивости является достаточно общим и может быть использован при решении задач устойчивости форм колебаний различных типов нелинейных упругих систем.

В работе предложен также численно-аналитический подход определения начала хаотического поведения системы, которое связано здесь со взаимной неустойчивостью фазовых траекторий. Анализ взаимной неустойчивости ведется на основе предложенного критерия устойчивости. Предложенный подход является достаточно эффективным, что подтверждается расчетом начала хаоса для неавтономного уравнения Дуффинга.

1. *Holmes P.J.* A nonlinear oscillator with a strange attractor // Philos. Trans. Royal Soc., London A292. – 1979. – P. 419-448.
2. *Moon F.C.* Chaotic Vibrations. – Wiley, New York, 1987. – 311 p.
3. *Ueda Y.* Randomly transitional phenomena in the system governed by Duffing's equation // J.Stat.Phys. – 20. – 1979. – P.181-196.
4. *Wolf A.* Quantifying chaos with Lyapunov exponents // Nonlinear Sci. Theory Appl., Ed. A.V.Holden, Manchester Univ. Press. – 1984.
5. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. – М.: ИЛ, 1961. – 778 с.
6. *Dowell E.H., Ventres C.S.* Modal equations for the nonlinear flexural vibrations of a cylindrical shell // Int. J. Solids and Structures. – 4. – 1968. – P. 975-991.
7. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 132 с.
8. *Маневич Л.И., Михлин Ю.В., Пилипчук В.Н.* Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем. – М.: Наука, 1989. – 216 с.
9. *Mikhlin Yu.V.* Stability of periodical and chaotic vibrations in systems with more than one equilibrium positions // Proc.of MATHMOD. – Vienna, 1994. – P. 903-905.
10. *Mikhlin Yu.V.* Stability of regular or chaotic post-buckling vibration modes of elastic shells // Nonlinear Dynamics of Shells and Plates (Ed. by M.P.Paidoussis, M.Amabili, P.B.Gonsalves), 2000 ASME International Mechanical Engineering Congress, Orlando. – 2000. – P. 95-103.
11. *Шматко Т.В.* Исследование устойчивости форм колебаний в области закритического поведения нелинейных упругих систем // Вісник Харківського ун-ту. – 2000. – N 456. – С. 263–266.
12. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – Л.; М.: ОНТИ, 1935. – 386 с.
13. *Perko L.* Differential Equations and Dynamical Systems. – New York: Springer-Verlag, 1991. – 404 p.
14. *Siegel C.L. and Moser J.K.* Lectures on Celestial Mechanics. – New York - Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1971. – 383 p.
15. *Pecelli G., Thomas E.S.* Normal modes, incoupling, and stability for a class of nonlinear oscillators // Quart.of Appl.Math. – 1979. – 38. – P. 281–301.
16. *Schiehlen W.* Nonlinear oscillations in multibody systems // Proc. of 1st European Nonlinear Oscillations Conference. Hamburg, 1993. Akademie Verlag GmbH, Berlin, (Mathematical Research, vol.72). – 1993. – P. 85-106.
17. *Шматко Т.В.* Дослідження стійкості просторових форм вимушених згинних коливань нелінійних циліндричних оболонок. // Вісник Київського держ. ун-ту. – 2001. – N 2. – С. 357-364.