

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ВЫПУСК

32

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Межведомственный сборник научных трудов

Основан в 1969 г.

ДОНЕЦК 2002

УДК 531.35

©2002. Б.И. Коносевиц

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ КЛАССИЧЕСКОЙ СХЕМЫ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО СНАРЯДА

Изучается движение осесимметричного артиллерийского снаряда в поле силы тяжести под действием аэродинамических сил и моментов. При малых углах атаки динамика полета снаряда обычно моделируется системой дифференциальных уравнений, линеаризованной по переменным, описывающим угловые колебания оси симметрии. Для приближенного интегрирования этих уравнений в классической баллистике разработана трехэтапная схема, которая в наиболее полном виде изложена в известной работе В.С. Пугачева [1]. В настоящей статье получена оценка погрешности этой схемы.

Введение. В первых теоретических исследованиях по внешней баллистике сферический снаряд (ядро) рассматривался как материальная точка. С появлением нарезных орудий усилия многих ученых были направлены на разработку методов исследования динамики полета и вычисления траектории снаряда как твердого тела. Как отмечается в [2], превратить разработанную ими интуитивно очевидную схему в строгую математическую теорию удалось В.С. Пугачеву в работе [1].

Эта схема состоит из трех этапов. Сначала интегрируются уравнения движения снаряда, моделируемого материальной точкой. В результате известными функциями времени становятся коэффициенты уравнений углового движения оси симметрии, линеаризованных при малых углах атаки. Затем с помощью специального асимптотического метода строится в явном виде приближенное решение уравнений углового движения. Наконец, это решение подставляется в уравнения поступательного движения и определяются поправки к исходной траектории.

Основное внимание в работе [1] уделяется оценке погрешности приближенного решения уравнений углового движения, получаемого на втором этапе. Оценка погрешности траектории центра масс снаряда, получаемой на третьем этапе, в указанной работе отсутствует. В книге [3] показано, что классическая трехэтапная схема может быть обоснована для случая оперенного снаряда, если воспользоваться теорией дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Однако обосновать правомочность применения классической схемы к быстровращающемуся артиллерийскому снаряду на основе этой теории нельзя, хотя опыт показывает целесообразность и эффективность расчетов по такой схеме ([3], с. 342).

Обоснование классической схемы должно, очевидно, состоять в установлении малости погрешности определяемой по этой схеме траектории полета снаряда по сравнению с "точной" траекторией, определяемой исходной системой уравнений движения. Выводу такой оценки и посвящена данная статья, а именно, в ней найден порядок искомой погрешности по отношению к введенному в уравнения движения малому параметру.

1. Уравнения движения снаряда. Уравнения движения осесимметричного снаряда, содержащие малый параметр ε , получены в [4] в виде системы (4), (7). В этих уравнениях фазовые переменные $x, y, z, v, \theta, \psi, p, q, r, \alpha, \beta$ отнесены к модулям их верхних характерных значений, которые указаны в таблице, приведенной в [4]. Чтобы вывести

из них систему уравнений движения снаряда, линеаризованную по переменным углового движения q, r, α, β , достаточно отбросить дополнительные члены h_Ω, h_Δ в (7), а в (4) вместо аэродинамических функций $K_x = R_x/m, K_y = R_y/mv \sin \delta, K_z = R_z/mv \sin \delta, K_p = M_p/I_1$ удерживать их значения при $\zeta = \sin \delta = 0$, равные

$$\frac{1}{m}R_{x0}, \frac{1}{mv}R'_{y0}, \frac{1}{mv}R'_{z0}, \frac{1}{I_1}M_{p0}(y, v, p). \quad (1)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по углу атаки δ , нулевым нижним индексом отмечены значения функций при $\delta = 0$. Порядки отброшенных членов сохранятся, если дополнительно линеаризовать уравнения движения по переменной ψ . Для сокращения записи в них используются следующие векторные и комплексные переменные

$$\xi = (x, y, \varepsilon^2 z, v, \theta, \varepsilon^2 \psi, p), \quad \xi^5 = (y, v, \theta, \varepsilon^2 \psi, p), \quad \xi^3 = (y, v, p), \\ \Omega = q + ir, \quad \Delta = \alpha + i\beta.$$

Будем обозначать через $O(\varepsilon^n)$ [$O^*(\varepsilon^n)$] величины, порядок которых в рассматриваемой области изменения фазовых переменных и времени больше либо равен ε^n [строго равен ε^n]. При этом для положительных величин будем писать $O_+(\varepsilon^n)$ [$O_+(\varepsilon^n)$].

В отличие от [4], примем более точное предположение для квадрата скорости, а именно, что его наименьшее значение, достигаемое вблизи вершины траектории при больших углах стрельбы, равно $O^*(\varepsilon)$, а не $O^*(\varepsilon^2)$. Тогда при всех возможных траекториях полета снаряда вектор ξ принадлежит замкнутому параллелепипеду

$$\Xi = \{\xi : (0, 0, -\varepsilon^2 C_z^*, \sqrt{\varepsilon} C_{v*}, -C_\theta^*, -\varepsilon^2 C_\psi^*, C_{p*}) \leq \xi \leq (C_x^*, C_y^*, \varepsilon^2 C_z^*, C_v^*, C_\theta^*, \varepsilon^2 C_\psi^*, C_p^*)\}. \quad (2)$$

Здесь буквой C с индексами обозначены положительные постоянные порядка 1. Векторы ξ^5, ξ^3 принадлежат соответствующим областям Ξ^5, Ξ^3 .

Как известно, аэродинамические силы и моменты R_x, R_y, R_z, M_y, M_z в полетном диапазоне скоростей приблизительно пропорциональны v^2 , а коэффициенты демпфирующих моментов $M_p, M_\Omega - v$. Поэтому, относя функции (1), а вместе с ними $M_{\Omega 0}, M'_{y0}, M'_{z0}$ к v^2 или v , получим функции, которые равны $O^*(1)$ в Ξ^3 :

$$R_1, R_2, R_3, M_{1D}, M_{2D}, M_2, M_3(y, v, p) = O^*(1), \quad (y, v, p) \in \Xi^3. \quad (3)$$

Все их частные производные первого и второго порядков считаются равными $O(1)$ в Ξ^3 . Это обозначается следующим образом

$$R_1, R_2, R_3, M_2, M_3, M_{1D}, M_{2D}(y, v, p) = O^2(1), \quad (y, v, p) \in \Xi^3. \quad (4)$$

По смыслу рассматриваемых сил и моментов, $R_2, M_3 > 0; R_1, M_{1D}, M_{2D} < 0$. Одновременно с выделением множителя v^2 в функциях R'_{y0}, R'_{z0} откорректируем порядок соответствующих им членов в уравнениях движения, приняв его равным ε^4 вместо ε^5 в уравнениях поступательного движения и ε^2 вместо ε^3 в уравнениях углового движения.

Полученная линеаризованная система уравнений движения снаряда состоит из *подси-*

стемы уравнений поступательного движения и продольного вращения

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \varepsilon^3 v \cos \theta, & \dot{y} &= \varepsilon^3 v \sin \theta, & \varepsilon^2 \dot{z} &= \varepsilon^5 v \psi, \\
 \dot{v} &= \varepsilon^3 \frac{v^2}{m} R_1(y, v) - \varepsilon^4 g \sin \theta, \\
 \dot{\theta} &= -\varepsilon^4 \frac{g \cos \theta}{v} + \varepsilon^4 \frac{v}{m} [R_2(y, v) \alpha - R_3(y, v, p) \beta], \\
 \varepsilon^2 \dot{\psi} &= \varepsilon^6 \frac{g}{v} \psi \sin \theta + \varepsilon^4 \frac{v}{m} [R_3(y, v, p) \alpha + R_2(y, v) \beta], \\
 \dot{p} &= \varepsilon^4 \frac{P}{I_1} v M_{1D}(y, v)
 \end{aligned} \tag{5}$$

и подсистемы уравнений углового движения оси симметрии снаряда

$$\dot{\Omega} = a(y, v, p, \varepsilon) \Omega + b(y, v, p, \varepsilon) \Delta, \quad \dot{\Delta} = -i \Omega - k(y, v, p, \varepsilon) \Delta + l(v, \theta, \varepsilon^2 \psi, \varepsilon). \tag{6}$$

В (6) приняты обозначения

$$\begin{aligned}
 a(y, v, p, \varepsilon) &= [\varepsilon^2 v M_{2D}(y, v) + i I_1 p] / I_2, & b(y, v, p, \varepsilon) &= v^2 [\varepsilon^2 M_2(y, v, p) + i M_3(y, v)] / I_2, \\
 k(y, v, p, \varepsilon) &= \varepsilon^2 v [R_2(y, v) + i R_3(y, v, p)] / m, & l(v, \theta, \psi, \varepsilon) &= \varepsilon^2 g (\cos \theta - i \varepsilon^2 \psi \sin \theta) / v.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Система (5),(6) рассматривается на отрезке времени $[t_0; t_{max}]$ длины $t_{max} - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$; здесь t_0 — момент выстрела, t_{max} — верхняя граница моментов t_1 падения снаряда на землю. При этом из последнего уравнения (5) с учетом начального условия $p(t_0, \varepsilon) = O^*(1)$ следует, что $p(t, \varepsilon) = O^*(1)$ для $t \in [t_0; t_{max}]$. В векторной форме подсистема (5) записывается так

$$\dot{\xi} = f(\xi, \varepsilon) + f_\alpha(\xi, \varepsilon) \alpha + f_\beta(\xi, \varepsilon) \beta. \tag{8}$$

Определения векторов-столбцов f, f_α, f_β вытекают из сравнения (5) и (8).

2. Приближенное решение уравнений углового движения. Обозначим через $\xi, \Omega, \Delta(t, \varepsilon)$ точное решение исходной системы (6),(8) при заданных в момент t_0 начальных условиях $\xi(t_0, \varepsilon) \in \Xi; \Omega, \Delta(t_0, \varepsilon) = O(1)$. Предполагается, что $\xi(t, \varepsilon) \in \Xi$ при $t \in [t_0; t_{max}]$ для всех возможных траекторий полета снаряда.

Пусть $e_1, d_1(\xi^5, \varepsilon)$ — значения Ω, Δ , при которых зануляются правые части (6):

$$e_1 = bl / (ib - ak), \quad d_1 = -al / (ib - ak). \tag{9}$$

Определенная в (7) функция $a(\xi^3, \varepsilon)$ имеет производную по t в силу (5) вида $\dot{a}(\xi^5, \varepsilon) = a_0^1(\xi^3, \varepsilon) + a_1^1(\xi^5, \varepsilon)$, где $a_0^1(\xi^3, \varepsilon) = i \varepsilon^4 p v M_{1D}(y, v) / I_2 = O(\varepsilon^4)$ — главный, $a_1^1 = O(\varepsilon^5)$ — дополнительные члены. Введем функции $w, \lambda_j = n_j + i \omega_j$, зависящие от ξ^3, ε , и функции $\lambda_j^+(\xi^5, \varepsilon)$ ($j = 1, 2$) по формулам

$$w = \frac{(a - k)^2}{4} - ib + ak - \frac{a_0^1}{2}, \quad \lambda_j = \frac{a - k}{2} \pm \sqrt{w}, \quad \lambda_j^+ = \lambda_j - \frac{\dot{w}}{4w} \quad (j = 1, 2), \tag{10}$$

верхний знак соответствует $j = 1$, а нижний — $j = 2$.

В статье [4] на основе нелинейных уравнений движения снаряда установлен следующий результат, который верен и для линеаризованных уравнений (5),(6). Пусть $\Omega, \Delta(t_0; \varepsilon) = O(1)$, а на траектории полета снаряда выполнено условие Маиевского $1 - 4I_2 v^2 M_3 / I_1^2 p^2 > 0$ и неравенства $n_1, n_2 \leq O_+(\varepsilon^4)$. Тогда $\Omega, \Delta(t; \varepsilon) = O(1)$, $t \in [t_0; t_{max}]$.

Заметим, что поскольку $t_{max} - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$, то при $n_1, n_2 \leq O_+(\varepsilon^4)$ будет

$$\left| \exp \int_{t_0}^t \lambda_j(\tau, \varepsilon) d\tau \right| = \exp \int_{t_0}^t n_j(\tau, \varepsilon) d\tau = 1 + O_+(\varepsilon), \quad t \in [t_0; t_{max}], \quad j = 1, 2. \quad (11)$$

При известной точной зависимости $\xi(t, \varepsilon)$ рассмотрим следующее приближенное решение подсистемы (6), построенное асимптотическим методом:

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}(t, \varepsilon) &= i\tilde{s}_1(t, \varepsilon)[\lambda_1^+(\xi(t, \varepsilon), \varepsilon) + k(\xi(t, \varepsilon), \varepsilon)] \exp i\varphi_1(t, \varepsilon) + \\ &\quad + i\tilde{s}_2(t, \varepsilon)[\lambda_2^+(\xi(t, \varepsilon), \varepsilon) + k(\xi(t, \varepsilon), \varepsilon)] \exp i\varphi_2(t, \varepsilon) + e_1(\xi(t, \varepsilon), \varepsilon), \\ \tilde{\Delta}(t, \varepsilon) &= \tilde{s}_1(t, \varepsilon) \exp i\varphi_1(t, \varepsilon) + \tilde{s}_2(t, \varepsilon) \exp i\varphi_2(t, \varepsilon) + d_1(\xi(t, \varepsilon), \varepsilon). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tilde{s}_j(t, \varepsilon) &= C_j \frac{w^{1/4}(\xi(t_0, \varepsilon), \varepsilon)}{w^{1/4}(\xi(t, \varepsilon), \varepsilon)} \exp \nu_j(t, \varepsilon), \\ \nu_j(t, \varepsilon) &= \int_{t_0}^t n_j(\xi(\tau, \varepsilon), \varepsilon) d\tau, \quad \varphi_j(t, \varepsilon) = \int_{t_0}^t \omega_j(\xi(\tau, \varepsilon), \varepsilon) d\tau \quad (j = 1, 2). \end{aligned} \quad (13)$$

Выражения для комплексных постоянных $C_j = \tilde{s}_j(t_0, \varepsilon)$, $j = 1, 2$, получаются из условий $\tilde{\Omega}, \tilde{\Delta}(t_0, \varepsilon) = \Omega, \Delta(t_0, \varepsilon)$. Отсюда следует, что $C_j = O(1)$, $j = 1, 2$.

Так же, как в [5, 6], устанавливается следующая оценка погрешности приближенного решения (12) подсистемы (6) по сравнению с ее точным решением при одинаковых начальных условиях:

$$\Omega(t, \varepsilon) - \tilde{\Omega}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad \Delta(t, \varepsilon) - \tilde{\Delta}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad t \in [t_0; t_{max}]. \quad (14)$$

Вывод этой оценки основан на преобразовании (6) к квазидиагональному виду путем перехода от Ω, Δ к переменным s_1, s_2 по формулам

$$\begin{aligned} \Omega &= is_1[\lambda_1^+(\xi(t, \varepsilon), \varepsilon) + k(\xi(t, \varepsilon), \varepsilon)] \exp i\varphi_1(t, \varepsilon) + \\ &\quad + is_2[\lambda_2^+(\xi(t, \varepsilon), \varepsilon) + k(\xi(t, \varepsilon), \varepsilon)] \exp i\varphi_2(t, \varepsilon) + e_1(\xi(t, \varepsilon), \varepsilon), \\ \Delta &= s_1 \exp i\varphi_1(t, \varepsilon) + s_2 \exp i\varphi_2(t, \varepsilon) + d_1(\xi(t, \varepsilon), \varepsilon). \end{aligned} \quad (15)$$

3. Постановка задачи. Согласно классической схеме интегрирования, приближенное решение уравнений (6),(8) выражается формулами

$$\xi_c = \xi^{(0)} + \tilde{\xi}^{(1)}, \quad \Omega_c = \tilde{\Omega}^{(0)}, \quad \Delta_c = \tilde{\Delta}^{(0)}. \quad (16)$$

Здесь зависимость $\xi^{(0)}(t, \varepsilon)$ определяется по модели материальной точки:

$$\dot{\xi}^{(0)} = f(\xi^{(0)}), \quad (17)$$

при $\xi^{(0)}(t_0, \varepsilon) = \xi(t_0, \varepsilon)$. После этого $\tilde{\Omega}^{(0)}, \tilde{\Delta}^{(0)}(t, \varepsilon)$ определяются системой (6), рассматриваемой при $\xi = \xi^{(0)}(t, \varepsilon)$, как ее приближенное решение, аналогичное (12):

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}^{(0)}(t, \varepsilon) &= i\tilde{s}_1^{(0)}(t, \varepsilon)[\lambda_1^+(\xi^{(0)}(t, \varepsilon), \varepsilon) + k(\xi^{(0)}(t, \varepsilon), \varepsilon)] \exp i\varphi_1^{(0)}(t, \varepsilon) + \\ &\quad + i\tilde{s}_2^{(0)}(t, \varepsilon)[\lambda_2^+(\xi^{(0)}(t, \varepsilon), \varepsilon) + k(\xi^{(0)}(t, \varepsilon), \varepsilon)] \exp i\varphi_2^{(0)}(t, \varepsilon) + e_1(\xi^{(0)}(t, \varepsilon), \varepsilon), \\ \tilde{\Delta}^{(0)}(t, \varepsilon) &= \tilde{s}_1^{(0)}(t, \varepsilon) \exp i\varphi_1^{(0)}(t, \varepsilon) + \tilde{s}_2^{(0)}(t, \varepsilon) \exp i\varphi_2^{(0)}(t, \varepsilon) + d_1(\xi^{(0)}(t, \varepsilon), \varepsilon). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь

$$\tilde{s}_j^{(0)}(t, \varepsilon) = C_j \frac{w^{1/4}(\xi(t_0, \varepsilon), \varepsilon)}{w^{1/4}(\xi^{(0)}(t, \varepsilon), \varepsilon)} \exp \nu_j^{(0)}(t, \varepsilon), \quad (19)$$

$$\nu_j^{(0)}(t, \varepsilon) = \int_{t_0}^t n_j(\xi^{(0)}(\tau, \varepsilon), \varepsilon) d\tau, \quad \varphi_j^{(0)}(t, \varepsilon) = \int_{t_0}^t \omega_j(\xi^{(0)}(\tau, \varepsilon), \varepsilon) d\tau \quad (j = 1, 2),$$

а комплексные постоянные $C_j = \tilde{s}_j(t_0, \varepsilon)$, $j = 1, 2$, выражаются теми же формулами, что и для решения (12). Наконец, полагая $\tilde{\Delta}^{(0)}(t, \varepsilon) = \tilde{\alpha}^{(0)}(t, \varepsilon) + i\tilde{\beta}^{(0)}(t, \varepsilon)$, при $\tilde{\xi}^{(1)}(t_0, \varepsilon) = 0$ находим зависимость $\tilde{\xi}^{(1)}(t, \varepsilon)$ из уравнения

$$\tilde{\xi}^{(1)} = \frac{\partial f(\xi^{(0)}(t, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial \xi} \tilde{\xi}^{(1)} + f_\alpha(\xi^{(0)}(t, \varepsilon), \varepsilon) \tilde{\alpha}^{(0)}(t, \varepsilon) + f_\beta(\xi^{(0)}(t, \varepsilon), \varepsilon) \tilde{\beta}^{(0)}(t, \varepsilon). \quad (20)$$

Целью данной работы является оценка погрешности $\xi_\varepsilon(t, \varepsilon)$ в решении (16).

4. Вспомогательные оценки. По предположению, $\xi(t, \varepsilon) \in \Xi$ при $t \in [t_0; t_{max}]$ для всех траекторий полета снаряда. Введем в векторном пространстве R^7 норму

$$\|\xi\| = \max_{j=1, \dots, 7} |\xi_j|. \quad (21)$$

Поскольку функция $f(\xi, \varepsilon)$ в правых частях уравнений (8), (17) непрерывно дифференцируема в Ξ , то она удовлетворяет в этой области условию Липшица

$$\|f(\xi, \varepsilon) - f(\tilde{\xi}, \varepsilon)\| \leq l_f \|\xi - \tilde{\xi}\|, \quad (22)$$

где в качестве постоянной l_f можно принять

$$l_f = \max_{\xi \in \Xi} \|\partial f(\xi, \varepsilon) / \partial \xi\| = \max_{\xi \in \Xi} \max_{i=1, \dots, 7} \sum_{j=1}^7 |\partial f_i(\xi, \varepsilon) / \partial \xi_j|$$

или любое большее число. Так как пятая и шестая компоненты f содержат v в знаменателях, а $1/v^2 = O(\varepsilon^{-1})$, то частные производные этих компонент по v равны $O(\varepsilon^3)$ и $O(\varepsilon^5)$. Все остальные частные производные от компонент f имеют те же порядки, что и сами компоненты. Следовательно, в (22) будет $l_f = O(\varepsilon^3)$, то есть $l_f = \varepsilon^3 L_f$, где $L_f = O_+(1)$.

Из того, что $\xi(t, \varepsilon) \in \Xi$, не следует, что $\xi^{(0)}(t, \varepsilon) \in \Xi$. Поэтому некорректно применять условие (22) при $\xi = \xi^{(0)}(t, \varepsilon)$. Чтобы преодолеть это затруднение, воспользуемся тем, что постоянная l_f слабо изменяется при переходе от исходной области Ξ к некоторым содержащим ее областям. Рассмотрим сначала область Ξ_1 , которая получается, если в (2) заменить неравенства $|\varepsilon^2 z| \leq \varepsilon^2 C_z^*$, $|\varepsilon^2 \psi| \leq \varepsilon^2 C_\psi^*$ неравенствами $|\varepsilon^2 z| \leq 1$, $|\varepsilon^2 \psi| \leq 1$. Функция f от z не зависит, а порядки производных ее компонент по $\varepsilon^2 \psi$ не ниже, чем ε^3 . Поэтому оценка $l_f = \varepsilon^3 L_f$ сохраняется в Ξ_1 . Рассмотрим теперь область Ξ_ε , содержащую область Ξ_1 и близкую к ней:

$$\begin{aligned} \Xi_\varepsilon = \{ \xi : (-\varepsilon, -\varepsilon, -1, \sqrt{\varepsilon}(C_{v^*} - \varepsilon), -C_\theta^* - \varepsilon, -1, C_{p^*} - \varepsilon) \leq \xi \leq \\ \leq (C_x^* + \varepsilon, C_y^* + \varepsilon, 1, C_v^* + \varepsilon, C_\theta^* + \varepsilon, 1, C_p^* + \varepsilon) \}. \end{aligned} \quad (23)$$

В (23) все постоянные порядка 1 изменены не более, чем на ε , по сравнению с определением Ξ_1 . Поэтому в Ξ_ε функция f удовлетворяет условию (22) с постоянной $l_f = \varepsilon^3 L_f$.

В дальнейшем понадобятся оценки порядков в Ξ (а следовательно, и в Ξ_ε) для функций в правых частях уравнений (6), (8) и в формулах (12), (13). Уравнения (5) и выражения (7) для коэффициентов уравнений (6) записаны таким образом, что порядки по ε всех входящих в них функций определяются только порядком v . Значения порядка 1 скорость v принимает на начальном участке траектории, а на остальной части траектории (при больших углах стрельбы) будет $v = O^*(\varepsilon^{1/2})$. Таким образом, для каждой из функций необходимо определить ее порядки при $v = O^*(\varepsilon^{1/2})$ и $v = O^*(1)$, и тогда наименьший из них будет равен результирующему порядку данной функции на всей траектории полета снаряда. Не приводя здесь эти оценки, отметим, что для функций f, f_α, f_β и функций (7): a, b, k, l они непосредственно следуют из их выражений. Чтобы получить оценки порядков функций (9), (10): $e_1, d_1, w, \lambda_j = n_j + w_j$ ($j = 1, 2$), их частных производных и производных по t в силу уравнений движения, следует выделить ведущие члены их разложений по степеням ε и с учетом (3), (4) найти порядки этих членов при $v = O^*(\varepsilon^{1/2})$ и $v = O^*(1)$.

5. Погрешность модели материальной точки. Пусть $\xi, \Omega, \Delta(t, \varepsilon), t \in [t_0; t_{max}]$ – решение полной системы (6), (8) при заданных в момент выстрела начальных условиях $\xi, \Omega, \Delta(t_0, \varepsilon) = O(1)$, а $\xi^{(0)}(t, \varepsilon)$ – решение уравнения (17) при начальном условии $\xi^{(0)}(t_0, \varepsilon) = \xi(t_0, \varepsilon)$. Тогда

$$\|\xi(t, \varepsilon) - \xi^{(0)}(t, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^2), \quad t \in [t_0; t_{max}]. \quad (24)$$

Чтобы вывести оценку (24), подставим точное решение $\xi, \Omega, \Delta(t, \varepsilon)$ уравнений (6), (8) в уравнение (8). Получим векторное тождество по t , причем, согласно (5), переменные α, β входят только в его пятую и шестую компоненты. Умножив шестую компоненту на мнимую единицу и сложив с пятой, будем иметь комплексное тождество

$$\dot{\theta}(t, \varepsilon) + i\dot{\psi}(t, \varepsilon) = \hat{f}(\xi(t, \varepsilon), \varepsilon) + \hat{f}_\Delta(\xi(t, \varepsilon), \varepsilon)\Delta(t, \varepsilon), \quad t \in [t_0; t_{max}],$$

где

$$\hat{f}(\xi, \varepsilon) = \varepsilon^4 \frac{g}{v} (-\cos \theta + i\varepsilon^2 \sin \theta), \quad \hat{f}_\Delta(\xi, \varepsilon) = \varepsilon^4 \frac{v}{m} [R_2(y, v) + iR_3(y, v, p)]. \quad (25)$$

Подставим сюда выражение (15) для Δ и перейдем к интегральной форме записи. Получим тождественное по $t \in [t_0; t_{max}]$ равенство

$$\theta(t, \varepsilon) + i\psi(t, \varepsilon) = \theta(t_0, \varepsilon) + i\psi(t_0, \varepsilon) + \int_{t_0}^t \hat{f}(\xi(\tau, \varepsilon), \varepsilon) d\tau + h_1(t, \varepsilon) + h_2(t, \varepsilon) + h_d(t, \varepsilon), \quad (26)$$

в котором

$$h_j(t, \varepsilon) = \int_{t_0}^t \hat{f}_\Delta(\xi(\tau, \varepsilon), \varepsilon) s_j(\tau, \varepsilon) \exp \varphi_j(\tau, \varepsilon) d\tau \quad (j = 1, 2), \quad (27)$$

$$h_d(t, \varepsilon) = \int_{t_0}^t \hat{f}_\Delta(\xi(\tau, \varepsilon), \varepsilon) d_1(\tau, \varepsilon) d\tau. \quad (28)$$

Из (9), (25) следует, что $f_{\Delta}d_1 = O(\varepsilon^5)$ при $v = O_+^*(\varepsilon^{1/2})$, и $f_{\Delta}d_1 = O(\varepsilon^6)$ при $v = O_+^*(1)$, так что в результате $f_{\Delta}d_1 = O(\varepsilon^5)$. А поскольку $t \in [t_0; t_{max}]$, $t_{max} - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$, то из (28) сразу находим

$$h_d(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad t \in [t_0; t_{max}]. \quad (29)$$

Для интегралов вида (27) в [6] получена оценка, которая после сделанной в п. 1 коррективы переходит в следующую:

$$h_j(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^3), \quad t \in [t_0; t_{max}], \quad j = 1, 2. \quad (30)$$

Можно показать, что фактически порядки h_1, h_2 выше, чем в (30), но с учетом (29) это никак не влияет на окончательный результат.

Из (29), (30) следует, что комплексное тождество (26) может быть записано в виде

$$\theta(t, \varepsilon) + i\psi(t, \varepsilon) = \theta(t_0, \varepsilon) + i\psi(t_0, \varepsilon) + \int_{t_0}^t \hat{f}(\xi(\tau, \varepsilon), \varepsilon) d\tau + \hat{h}(t, \varepsilon), \quad t \in [t_0; t_{max}],$$

где $\hat{h}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^2)$. Это означает, что векторное тождество, которое получается при подстановке точного решения $\xi, \Omega, \Delta(t, \varepsilon)$ в (8), записывается в виде

$$\xi(t, \varepsilon) = \xi(t_0, \varepsilon) + \int_{t_0}^t f(\xi(\tau, \varepsilon), \varepsilon) d\tau + h(t, \varepsilon), \quad t \in [t_0; t_{max}], \quad (31)$$

где $h(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^2)$, то есть

$$\|h(t, \varepsilon)\| \leq \varepsilon^2 C_h, \quad t \in [t_0; t_{max}] \quad (C_h = O_+(1)). \quad (32)$$

В результате подстановки $\xi^{(0)}(t, \varepsilon)$ в уравнение (17) и интегрирования получаем тождество

$$\xi^{(0)}(t, \varepsilon) = \xi(t_0, \varepsilon) + \int_{t_0}^t f(\xi^{(0)}(\tau, \varepsilon), \varepsilon) d\tau, \quad t \in [t_0; t_{max}]. \quad (33)$$

Так как $\xi(t, \varepsilon) \in \Xi \subset \Xi_{\varepsilon}$ для всех $t \in [t_0; t_{max}]$, а $\xi^{(0)}(t_0, \varepsilon) = \xi(t_0, \varepsilon)$, то $\xi^{(0)}(t, \varepsilon)$ вследствие непрерывности по t лежит в Ξ_{ε} в течение некоторого времени после выстрела. Точнее, существует момент $t' \in (t_0; t_{max}]$ такой, что $\xi^{(0)}(t, \varepsilon) \in \Xi_{\varepsilon}$ для всех $t \in [t_0; t']$. Следовательно, на отрезке $[t_0; t']$ для векторов $\xi = \xi(t, \varepsilon)$, $\tilde{\xi} = \xi^{(0)}(t, \varepsilon)$ выполнено условие Липшица (22) с постоянной $l_f = \varepsilon^3 L_f$. Из (31)–(33) тогда следует, что

$$\|\xi(t, \varepsilon) - \xi^{(0)}(t, \varepsilon)\| \leq \varepsilon^3 L_f \int_{t_0}^t \|\xi(\tau, \varepsilon) - \xi^{(0)}(\tau, \varepsilon)\| d\tau + \varepsilon^2 C_h, \quad t \in [t_0; t'].$$

Воспользовавшись леммой Гронуолла (см. [7]), получаем на $[t_0; t']$ оценку (24):

$$\|\xi(t, \varepsilon) - \xi^{(0)}(t, \varepsilon)\| \leq \varepsilon^2 C_h \exp \varepsilon^3 L_f (t - t_0) = O(\varepsilon^2), \quad t \in [t_0; t'].$$

Покажем, что она выполнена на всем интервале $[t_0; t_{max}]$, то есть $t' = t_{max}$. Для этого установим, что $\xi^{(0)}(t, \varepsilon) \in \Xi_\varepsilon$ при всех $t \in [t_0; t_{max}]$, и тем самым для $\xi = \xi(t, \varepsilon)$, $\tilde{\xi} = \xi^{(0)}(t, \varepsilon)$ обеспечено выполнение условия Липшица (22) на $t \in [t_0; t_{max}]$. Если допустить противное, то вектор $\xi^{(0)}(t', \varepsilon)$ принадлежит границе области Ξ_ε . При этом в момент $t = t'$ будет $\xi(t', \varepsilon) \in \Xi$, поскольку $\xi(t, \varepsilon) \in \Xi$ для всех $t \in [t_0; t_{max}]$. Границами областей Ξ, Ξ_ε являются части плоскостей $\xi_j = \text{const}$ ($j = 1, \dots, 7$), ортогональных осям координат в пространстве векторов $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_7)$. Область Ξ_ε сконструирована таким образом, что расстояние от любой точки $\xi^{(0)}$ ее границы до любой точки $\xi \in \Xi$, отсчитываемое в норме (21), больше либо равно $O^*(1)$, или $O^*(\varepsilon)$, или $O^*(\varepsilon^{3/2})$ в зависимости от того, по какой из компонент вектора $\xi - \xi^{(0)}$ достигается максимум $|\xi_j - \xi_j^{(0)}|$ при $j = 1, \dots, 7$. Но в любом из этих случаев расстояние от точки $\xi^{(0)}$ границы Ξ_ε до любой из точек $\xi \in \Xi$ больше, чем $O(\varepsilon^2)$. В частности, для рассматриваемых точек имеем $\|\xi(t', \varepsilon) - \xi^{(0)}(t', \varepsilon)\| > O(\varepsilon^2)$. Но это невозможно, так как, по доказанному выше, в момент t' оценка (24) еще выполняется.

б. Оценка погрешности $\xi_c = \xi^{(0)} + \tilde{\xi}^{(1)}$. Оценим норму разности

$$\xi(t, \varepsilon) - \xi_c(t, \varepsilon) = \xi(t, \varepsilon) - [\xi^{(0)}(t, \varepsilon) + \tilde{\xi}^{(1)}(t, \varepsilon)], \quad t \in [t_0; t_{max}].$$

Эту разность можно представить в виде $\xi^{(1)}(t, \varepsilon) - \tilde{\xi}^{(1)}(t, \varepsilon)$, где вектор возмущений $\xi^{(1)}(t, \varepsilon) = \xi(t, \varepsilon) - \xi^{(0)}(t, \varepsilon)$ удовлетворяет оценке (24), а $\tilde{\xi}^{(1)}(t, \varepsilon)$ — решение уравнения (20) при нулевом начальном условии.

б.1. Интегральное тождество для $\xi^{(1)}$. Чтобы оценить $\|\xi^{(1)}(t, \varepsilon) - \tilde{\xi}^{(1)}(t, \varepsilon)\|$, запишем в виде тождества по t дифференциальное уравнение (8) для ξ , положим в нем $\xi = \xi^{(0)} + \xi^{(1)}$ и, приняв во внимание (17), преобразуем к интегральному тождеству для $\xi^{(1)}$. Затем выделим в функциях f_α, f_β ($\xi^{(0)} + \xi^{(1)}$) члены, не зависящие от $\xi^{(1)}$, а в функции f ($\xi^{(0)} + \xi^{(1)}$) выделим линейные по $\xi^{(1)}$ члены. Тогда с учетом оценки (24) для $\xi^{(1)}$ дополнительные члены в выражениях этих функций будут равны $O(\varepsilon^6)$ и $O(\varepsilon^{13/2})$. Так как $t_{max} - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$, то в правой части интегрального тождества для $\tilde{\xi}^{(1)}(t, \varepsilon)$ им соответствует дополнительный член, равный $O(\varepsilon^3)$. Далее, в соответствии с (14) полагаем $\alpha = \tilde{\alpha} + O(\varepsilon^2)$, $\beta = \tilde{\beta} + O(\varepsilon^2)$. При этом порядок дополнительного члена не изменяется. Наконец, представив $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ в виде $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}^{(0)} + (\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}^{(0)})$, $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}^{(0)} + (\tilde{\beta} - \tilde{\beta}^{(0)})$, получаем векторное интегральное тождество

$$\begin{aligned} \xi^{(1)}(t, \varepsilon) = \int_{t_0}^t & \left[\frac{\partial f(\xi^{(0)}(\tau, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial \xi} \xi^{(1)}(\tau, \varepsilon) + f_\alpha(\xi^{(0)}(\tau, \varepsilon), \varepsilon) \tilde{\alpha}^{(0)}(\tau, \varepsilon) + \right. \\ & \left. + f_\beta(\xi^{(0)}(\tau, \varepsilon), \varepsilon) \tilde{\beta}^{(0)}(\tau, \varepsilon) \right] d\tau + h(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^3), \quad t \in [t_0; t_{max}], \end{aligned} \quad (34)$$

в котором к дополнительным членам присоединяется еще вектор h , а подынтегральные члены имеют структуру правой части (20).

Поскольку α, β входят только в пятое и шестое уравнения подсистемы (6), то у вектора-столбца h в (34) отличны от нуля только компоненты h_5, h_6 . Объединим пятую и шестую компоненты тождества (34) в комплексное равенство

$$\begin{aligned} \theta^{(1)}(t, \varepsilon) + i\varepsilon^2\psi^{(1)}(t, \varepsilon) = \int_{t_0}^t & \left[\frac{\partial \hat{f}(\xi^{(0)}(\tau, \varepsilon), \varepsilon)}{\partial \xi} \xi^{(1)}(\tau, \varepsilon) + \hat{f}_\Delta(\xi^{(0)}(\tau, \varepsilon), \varepsilon) \tilde{\Delta}^{(0)}(\tau, \varepsilon) \right] d\tau + \\ & + \hat{h}(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^3), \quad t \in [t_0; t_{max}], \end{aligned} \quad (35)$$

где \hat{f} , \hat{f}_Δ определены в (25),

$$\hat{h}(t, \varepsilon) = \int_{t_0}^t \hat{f}_\Delta(\xi^{(0)}(\tau, \varepsilon), \varepsilon) [\tilde{\Delta}(\tau, \varepsilon) - \tilde{\Delta}^{(0)}(\tau, \varepsilon)] d\tau, \quad t \in [t_0; t_{max}]. \quad (36)$$

Тогда $h_5 = \text{Re } \hat{h}$, $h_6 = \text{Im } \hat{h}$, и поэтому $\|h\| = \max(\text{Re } \hat{h}, \text{Im } \hat{h})$. Покажем, что $\hat{h}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^3)$, и следовательно, в (34) будет $\|h(t, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^3)$, $t \in [t_0; t_{max}]$.

Подставим в (36) выражения (12), (13), (18), (19) для $\tilde{\Delta}$, $\tilde{\Delta}^{(0)}$ и запишем \hat{h} в виде суммы

$$\hat{h}(t, \varepsilon) = \hat{h}_1(t, \varepsilon) + \hat{h}_2(t, \varepsilon) + \hat{h}_3(t, \varepsilon) \quad (37)$$

трех интегралов

$$\begin{aligned} \hat{h}_1(t, \varepsilon) &= \int_{t_0}^t \hat{f}_\Delta(\xi^{(0)}(\tau, \varepsilon), \varepsilon) [d_1(\xi(\tau, \varepsilon), \varepsilon) - d_1(\xi^{(0)}(\tau, \varepsilon), \varepsilon)] d\tau, \\ \hat{h}_2(t, \varepsilon) &= \int_{t_0}^t [(g(\xi(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) - g(\xi^{(0)}(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon)) \sum_{j=1}^2 C_j \exp \int_{t_0}^{\tau} \lambda_j(\xi(\tau_1, \varepsilon), \varepsilon) d\tau_1] d\tau, \\ \hat{h}_3(t, \varepsilon) &= \int_{t_0}^t g(\xi^{(0)}(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \left[\sum_{j=1}^2 C_j \left(\exp \int_{t_0}^{\tau} \lambda_j(\xi(\tau_1, \varepsilon), \varepsilon) d\tau_1 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \exp \int_{t_0}^{\tau} \lambda_j(\xi^{(0)}(\tau_1, \varepsilon), \varepsilon) d\tau_1 \right) \right] d\tau. \end{aligned} \quad (38)$$

где

$$g(\xi, t, \varepsilon) = \hat{f}_\Delta(\xi^{(0)}(t, \varepsilon), \varepsilon) \frac{w^{1/4}(\xi(t_0, \varepsilon), \varepsilon)}{w^{1/4}(\xi, \varepsilon)}. \quad (39)$$

6.2. Оценка \hat{h}_1, \hat{h}_2 . Рассмотрим сначала $\hat{h}_1(t, \varepsilon)$. В области Ξ_ε в соответствии с (25) имеем $\hat{f}_\Delta = O(\varepsilon^4)$, а d_1 , согласно (9), удовлетворяет условию Липшица по ξ с постоянной $L_d = O_+(1)$. Так как $\xi, \xi^{(0)}(t, \varepsilon) \in \Xi_\varepsilon$ (см. п. 5), то эти соотношения справедливы для соответствующих функций под знаком интеграла \hat{h}_1 в (38). Приняв во внимание оценку (24) для $\xi^{(1)}$, заключаем, что подинтегральная функция здесь равна $O(\varepsilon^6)$. Поэтому

$$\hat{h}_1(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^3), \quad t \in [t_0; t_{max}]. \quad (40)$$

Переходя к интегралу $\hat{h}_2(t, \varepsilon)$, заметим, что функция $g(\xi, t, \varepsilon)$ в силу ее определения (39) и оценок $\hat{f}_\Delta(\xi, \varepsilon) = O^2(\varepsilon^4)$, $w^{-1/4}(\xi, \varepsilon) = O^2(1)$ имеет в Ξ_ε постоянную Липшица $l_g = \varepsilon^4 L_g$. Отсюда с учетом соотношений $C_1, C_2 = O(1)$ и оценки (11) следует, что подинтегральная функция для \hat{h}_2 равна $O(\varepsilon^6)$, и значит,

$$\hat{h}_2(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^3), \quad t \in [t_0; t_{max}]. \quad (41)$$

6.3. Оценка \hat{h}_3 . Запишем выражение (38) для \hat{h}_3 в виде

$$\hat{h}_3(t, \varepsilon) = \hat{h}_{31}(t, \varepsilon) + \hat{h}_{32}(t, \varepsilon), \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned}\hat{h}_{31}(t, \varepsilon) &= \int_{t_0}^t g(\xi^{(0)}(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \left[\sum_{j=1}^2 C_j \exp \nu_j(\tau, \varepsilon) (\exp i\varphi_j(\tau, \varepsilon) - \exp i\varphi_j^{(0)}(\tau, \varepsilon)) \right] d\tau, \\ \hat{h}_{32}(t, \varepsilon) &= \int_{t_0}^t g(\xi^{(0)}(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \left[\sum_{j=1}^2 C_j (\exp \nu_j(\tau, \varepsilon) - \exp \nu_j^{(0)}(\tau, \varepsilon)) \exp i\varphi_j^{(0)}(\tau, \varepsilon) \right] d\tau.\end{aligned}\quad (43)$$

Пользуясь формулой $\exp i\varphi_j - \exp i\varphi_j^{(0)} = 2i \sin \frac{1}{2}(\varphi_j - \varphi_j^{(0)}) \exp \frac{1}{2}i(\varphi_j + \varphi_j^{(0)})$, представим интеграл \hat{h}_{31} в виде суммы $\hat{h}_{31}(t, \varepsilon) = \hat{h}_{311}(t, \varepsilon) + \hat{h}_{312}(t, \varepsilon)$ двух интегралов

$$\hat{h}_{31j}(t, \varepsilon) = 2iC_j \int_{t_0}^t g(\xi^{(0)}(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) \exp \nu_j(\tau, \varepsilon) \sin \frac{\varphi_j - \varphi_j^{(0)}}{2} \exp i\frac{\varphi_j + \varphi_j^{(0)}}{2} d\tau.$$

Преобразуем их с помощью формулы интегрирования по частям $\int u dv = uv - \int v du$, взяв $dv = d[\exp \frac{1}{2}i(\varphi_j + \varphi_j^{(0)})]$. Сумму получающихся выражений оценим по модулю при $v = O^*(\varepsilon^{1/2})$ и $v = O^*(1)$. При этом к интегральному выражению, содержащему $d(\exp \nu_j)/d\tau = n_j \exp \nu_j$, при $v = O^*(\varepsilon^{1/2})$ придется снова применять формулу интегрирования по частям.

Для величин, входящих в эти выражения, необходимые оценки модулей и постоянных Липшица следуют из их определений и соотношений (3), (4), (11), (24). В частности, для частот ω_j ($j = 1, 2$), согласно формулам (23) статьи [4], имеем

$$\omega_j = \frac{pI_1}{I_2} [1 \pm \sigma(y, v, p)] + \varepsilon^2 v O^2(1), \quad \sigma = \left[1 - \frac{4v^2 M_3(y, v) I_2}{p^2 I_1} \right]^{1/2} = 1 + O^2(\varepsilon).$$

Отсюда следуют оценки в Ξ_ε модулей частот: $|\omega_1| \leq M_{\omega_1}^*$, $|\omega_2| \leq \varepsilon M_{\omega_2}^{*'} \text{ при } v = O^*(\varepsilon^{1/2})$, $|\omega_2| \leq M_{\omega_2}^* \text{ при } v = O^*(1)$, и их постоянных Липшица по ξ : $l_{\omega_1} = L_{\omega_1}$, $l_{\omega_2} = \varepsilon^{1/2} L'_{\omega_2}$ при $v = O^*(\varepsilon^{1/2})$, $l_{\omega_2} = L_{\omega_2}$ при $v = O^*(1)$. В результате для \hat{h}_{31} получаем

$$\hat{h}_{31}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^3), \quad t \in [t_0; t_{max}]. \quad (44)$$

Оценим теперь интеграл \hat{h}_{32} , определенный второй формулой (43). Он равен сумме $\hat{h}_{32}(t, \varepsilon) = \hat{h}_{321}(t, \varepsilon) + \hat{h}_{322}(t, \varepsilon)$ двух интегралов

$$\hat{h}_{32j}(t, \varepsilon) = \int_{t_0}^t g(\xi^{(0)}(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon) C_j [\exp \nu_j(\tau, \varepsilon) - \exp \nu_j^{(0)}(\tau, \varepsilon)] \exp i\varphi_j^{(0)}(\tau, \varepsilon) d\tau \quad (j = 1, 2).$$

Преобразуя их по формуле интегрирования по частям и оценивая по модулю при $v = O^*(\varepsilon^{1/2})$ и $v = O^*(1)$, получаем в результате $\hat{h}_{32}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{7/2})$, $t \in [t_0; t_{max}]$.

Подставив это значение вместе с (44) в (42), находим

$$\hat{h}_3(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^3), \quad t \in [t_0; t_{max}]. \quad (45)$$

6.4. Вывод оценки для ξ_c . На основании формул (37), (40), (41), (45) заключаем, что $\hat{h}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^3)$ в интегральном тождестве (35), и поэтому функция $h(t, \varepsilon)$ в (34) удовлетворяет оценке $\|h(t, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^3)$, $t \in [t_0; t_{max}]$. Это означает, что в (34) суммарный дополнительный член $h_{\xi^{(1)}}$ равен $O(\varepsilon^3)$, то есть $\|h_{\xi^{(1)}}\| \leq \varepsilon^3 M_h^*$, $t \in [t_0; t_{max}]$. С другой стороны, из уравнения (20) при нулевом начальном условии следует интегральное тождество для $\tilde{\xi}^{(1)}$, которое отличается от (34) только отсутствием дополнительного члена. Вычитая эти тождества и переходя к нормам, будем иметь неравенство, которое с учетом полученной в п. 4 оценки $\|\partial f(\xi, \varepsilon)/\partial \xi\| \leq \varepsilon^3 L_f$ ($\xi \in \Xi_\varepsilon$) записывается в виде

$$\|\xi^{(1)}(t, \varepsilon) - \tilde{\xi}^{(1)}(t, \varepsilon)\| \leq \int_{t_0}^t \varepsilon^3 L_f \|\xi^{(1)}(\tau, \varepsilon) - \tilde{\xi}^{(1)}(\tau, \varepsilon)\| d\tau + \varepsilon^3 M_h^*, \quad t \in [t_0; t_{max}].$$

Воспользовавшись леммой Гронуолла, выводим отсюда неравенство

$$\|\xi^{(1)}(t, \varepsilon) - \tilde{\xi}^{(1)}(t, \varepsilon)\| \leq \varepsilon^3 M_h^* \exp \varepsilon^3 L_f (t - t_0), \quad t \in [t_0; t_{max}].$$

Так как $t_{max} - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$, а $\xi - \xi_c = \xi^{(1)} - \tilde{\xi}^{(1)}$, приходим к следующему результату.

Пусть $\xi, \Omega, \Delta(t, \varepsilon)$, $t \in [t_0; t_{max}]$ – решение полной системы (6), (8) при заданных в момент выстрела начальных условиях $\xi, \Omega, \Delta(t_0, \varepsilon) = O(1)$, а $\xi_c(t, \varepsilon) = \xi^{(0)}(t, \varepsilon) + \tilde{\xi}^{(1)}(t, \varepsilon)$ – приближенное решение уравнения (8), найденное по описанной в п. 3 схеме. Тогда

$$\|\xi(t, \varepsilon) - \xi_c(t, \varepsilon)\| = O(\varepsilon^3), \quad t \in [t_0; t_{max}]. \quad (46)$$

В статье [6] изучалась система уравнений, которая получается из (8) при подстановке вместо α, β выражений $\operatorname{Re} d_1(\xi, \varepsilon)$ и $\operatorname{Im} d_1(\xi, \varepsilon)$, где функция $d_1(\xi, \varepsilon)$ определена в (9). Такая система не содержит быстро колеблющихся переменных и позволяет определить зависимость ξ от t в один этап, а не в три этапа, как в классической схеме. Для ее погрешности в [6] установлена оценка, которая (с учетом сделанной в п. 1 данной работы корректировки порядков членов, содержащих подъемную и боковую силы) совпадает с (46).

Так как параметр ε введен вместо числа $\varepsilon_0 = 0,1$, и при этом в качестве масштабов для переменных x, y, z выбраны 10^4 м, 10^4 м, 10^2 м, то для исходных декартовых координат центра масс x, y, z оценка (46) устанавливает погрешность порядка 10 м.

1. Пугачев В.С. Общая задача о движении вращающегося артиллерийского снаряда в воздухе // Тр. ВВИА им. Жуковского. – 1940. – Вып. 70. – 90 с.
2. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1969. – 380 с.
3. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 488 с.
4. Коносевиц Б.И. Исследование динамики полета осесимметричного снаряда // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 109–119.
5. Коносевиц Б.И. Оценка погрешности уточненного асимптотического решения линеаризованных уравнений движения оси симметрии снаряда // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2001. – Т. 6. – С. 61–66.
6. Коносевиц Б.И. О применении асимптотических методов в теории полета осесимметричного снаряда // Механика твердого тела. – 2001. – Вып. 31. – С. 63–75.
7. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М: Мир, 1970. – 720 с.