ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2011. Вып. 41

УДК 539.9

©2011. **А.А. Илюхин, А.К. Попов**

ЗАДАЧА РАСТЯЖЕНИЯ-СЖАТИЯ ЕСТЕСТВЕННО ЗАКРУЧЕННОГО СТЕРЖНЯ В РАМКАХ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Построено решение задачи о растяжении естественно закрученного стержня силой, приложенной к свободному торцевому сечению. Определены компоненты вектора перемещений, тензора напряжений и моментных напряжений, удовлетворяющие граничным условиям на основаниях и боковой поверхности естественно закрученного стержня.

Ключевые слова: *растяжение, естественно закрученный стержень, моментная теория упругости, псевдоконтинуум Коссера.*

Рассмотрим задачу об упругом равновесии стержня под действием растягивающих усилий, приложенных к торцевому сечению и статически эквивалентных силе $\mathbf{P}$, параллельной оси стержня и приложенной в центре тяжести свободного торцевого сечения. Рассматриваемый стержень подвержен осевому растяжению. Массовыми силами пренебрегаем.

Задача об упругом равновесии стержня при указанных условиях сводится к нахождению компонент тензора напряжений σ_{ij}, удовлетворяющих в области, занятой телом, дифференциальным уравнениям равновесия при отсутствии массовых сил и граничным условиям.

Начало координат выберем в центре тяжести одного из сечений, оси x и y направим по главным осям инерции этого сечения, а за ось z примем ось стержня. При описании деформации упругой микрополярной среды будем использовать криволинейные координаты x^1, x^2, x^3, связанные с декартовыми координатами x, y, z соотношениями [1, 2]:

$$\begin{gathered} x^1 = \mathrm{x} + \tau_0 \mathrm{yz}, \qquad x^2 = \mathrm{y} - \tau_0 \mathrm{xz}, \qquad x^3 = z, \\ \mathrm{x} = x^1 - \tau_0 x^2 x^3, \qquad \mathrm{y} = x^2 + \tau_0 x^1 x^3, \qquad \mathrm{z} = x^3\,. \end{gathered} \tag{1}$$

Величину τ_0 назовем естественной круткой. В настоящем исследовании будем считать величину τ_0 малой.

Проекции вектора нормали $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3)$ к боковой поверхности естественно закрученного стержня с учетом взаимосвязи (1) определяются выражениями [3]

$$n_1 = \frac{dx^2}{dl}, \qquad n_2 = -\frac{dx^1}{dl}, \quad n_3 = \tau_0(x^2 n_1 - x^1 n_2)\,. \tag{2}$$

Решение в перемещениях поставленной задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned} \mathrm{u}_1 = A_{11}\mathrm{x}^1 + A_{12}\mathrm{x}^2 + A_{13}\mathrm{x}^3 + \tau_0\Big(\mathrm{D}_{11}\mathrm{x}^1 + \mathrm{D}_{12}\mathrm{x}^2 + \mathrm{D}_{13}\mathrm{x}^3 + \\ + B_{11}(\mathrm{x}^1)^2 + B_{12}\mathrm{x}^1\mathrm{x}^2 + B_{13}\mathrm{x}^1\mathrm{x}^3 + B_{22}(\mathrm{x}^2)^2 + B_{23}\mathrm{x}^2\mathrm{x}^3 + B_{33}(\mathrm{x}^3)^2\Big), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{u}_2 = A_{21}\mathrm{x}^1 + A_{22}\mathrm{x}^2 + A_{23}\mathrm{x}^3 + \tau_0\Big(C_{11}(\mathrm{x}^1)^2 + C_{12}\mathrm{x}^1\mathrm{x}^2 + \mathrm{D}_{21}\mathrm{x}^1 + \\
&\quad + \mathrm{D}_{22}\mathrm{x}^2 + \mathrm{D}_{23}\mathrm{x}^3 + C_{13}\mathrm{x}^1\mathrm{x}^3 + C_{22}(\mathrm{x}^2)^2 + C_{23}\mathrm{x}^2\mathrm{x}^3 + C_{33}(\mathrm{x}^3)^2\Big), \\
&\mathrm{u}_3 = A_{31}\mathrm{x}^1 + A_{32}\mathrm{x}^2 + A_{33}\mathrm{x}^3 + \tau_0\Big(\mathrm{p}_1\varphi(\mathrm{x}^1,\mathrm{x}^2) + \mathrm{E}_{13}\mathrm{x}^1\mathrm{x}^3 + \\
&\quad + \mathrm{E}_{23}\mathrm{x}^2\mathrm{x}^3 + \mathrm{E}_{33}(\mathrm{x}^3)^2\Big),
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где $\varphi(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$ – некоторая функция, подлежащая определению, p_1 – константа, зависящая от величины растягивающих усилий **P.**

Взаимосвязь компонент ковариантного тензора деформаций γ_{ij} с компонентами вектора перемещений u_i и псевдовектора собственного микроповорота ω^k имеет вид [4]

$$\gamma_{ij} = \mathrm{u}_{\mathrm{i,j}} - \in_{kij}\omega^k\,. \tag{4}$$

Псевдовектор микроповорота в рамках псевдоконтинуума Коссера связан с вектором перемещений следующими равенствами:

$$\omega^k = \frac{1}{2}\in^{skt} r_t\left(\frac{\partial u_k}{\partial x^s} - \Gamma^m_{sk}u_m\right), \tag{5}$$

где r_t – базисные векторы криволинейной системы координат x^1, x^2, x^3.

Выпишем символы Кристоффеля Γ^m_{sk} второго рода

$$
\begin{gathered}
\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{33} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{22} = \Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{33} = \Gamma^3_{11} = 0, \\
\Gamma^3_{12} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{22} = \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{33} = 0, \qquad \Gamma^1_{23} = -\tau_0, \qquad \Gamma^2_{13} = \tau_0\,,
\end{gathered}
\tag{6}
$$

а также ковариантные компоненты тензора деформаций

$$
\begin{gathered}
\gamma_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x^1}, \quad \gamma_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x^2}, \quad \gamma_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x^3}, \quad \gamma_{12} = \gamma_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_2}{\partial x^1}\right), \\
\gamma_{13} = \gamma_{31} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^3} + \frac{\partial u_3}{\partial x^1}\right) - \tau_0 u_2, \qquad \gamma_{23} = \gamma_{32} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x^3} + \frac{\partial u_3}{\partial x^2}\right) + \tau_0 u_1.
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Если среда изотропная, то закон Гука принимает вид [5]

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= \lambda\delta_{ij}\gamma_{kk} + (\mu - \alpha)\,\gamma_{ji} + (\mu + \alpha)\,\gamma_{ij}, \\
\mu_{ij} &= \varepsilon\delta_{ij}\varkappa_{kk} + (\upsilon - \beta)\,\varkappa_{ji} + (\upsilon + \beta)\,\varkappa_{ij}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Учитывая значения компонент вектора перемещений (3), тензора деформаций (7), первое равенство закона Гука (8), получим с точностью до первой степени параметра τ_0 соответствующие значения компонент тензора напряжений

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11} = (2B_{11} + C_{12} + E_{13})x^1 + (E_{23} + B_{12} + 2C_{22})x^2 + \\
&\quad +(C_{23} + B_{13} + 2E_{33})x^3 + \mathrm{D}_{11} + \mathrm{D}_{22}\lambda\tau_0 + \\
&+2\mu(\mathrm{D}_{11} + 2B_{11}x^1 + B_{12}x^2 + B_{13}x^3)\tau_0 + (A_{22} + A_{33})\lambda + (\lambda + 2\mu)A_{11}, \\
&\sigma_{22} = (2B_{11} + C_{12} + E_{13})x^1 + (E_{23} + B_{12} + 2C_{22})x^2 + \\
&\quad + (C_{23} + B_{13} + 2E_{33})x^3 + \mathrm{D}_{11} + \mathrm{D}_{22}\lambda\tau_0 + \\
&\quad +2\mu(\mathrm{D}_{22} + C_{12}x^1 + 2C_{22}x^2 + C_{23}x_3)\tau_0 + (A_{11} + A_{33} + A_{22})\lambda + 2\mu A_{22}, \\
&\sigma_{33} = ((2B_{11} + C_{12} + E_{13})x_1 + (E_{23} + B_{12} + 2C_{22})x_2 + \\
&\quad + (C_{23} + B_{13} + 2E_{33})x_3 + \mathrm{D}_{11} + \mathrm{D}_{22}\lambda)\tau_0 + \\
&\quad +2\mu(E_{13}x_1 + E_{23}x_2 + 2E_{33}x_3)\tau_0 + (A_{11} + A_{22})\lambda + (\lambda + 2\mu)A_{33}, \\
&\sigma_{13} = \sigma_{31} = (\tau_0 p_1(\frac{\partial\varphi(x^1, x^2)}{\partial x^1}) + A_{13})\mu + ((2B_{33} - 2A_{23} + E_{13})x^3 + \\
&\quad +(B_{13} - 2A_{21})x^1 + (B_{23} - 2A_{22})x^2 + \mathrm{D}_{13})\tau_0, \\
&\sigma_{23} = \sigma_{32} = (\tau_0 p_1(\frac{\partial\varphi(x_1, x_2)}{\partial x^2}) + A_{23})\mu + \\
&\quad +((2C_{33} + 2A_{13} + E_{23})x^3 + (C_{13} + 2A_{11})x^1 + (C_{23} + 2A_{12})x^2 + \mathrm{D}_{23})\tau_0, \\
&\sigma_{12} = \sigma_{21} = \mu(A_{21} + A_{12}) + ((2C_{11} + B_{12})x^1 + (2B_{22} + C_{12})x^2 + \\
&\quad +(B_{23} + C_{13})x^3 + \mathrm{D}_{21} + \mathrm{D}_{12})\tau_0\,.
\end{aligned} \tag{9}$$

Заметим, что полученные компоненты тензора напряжений симметричны. Значения компонент ω^k вектора собственного микроповорота (5), учитывая значения компонент вектора перемещений (3), преобразуются к виду:

$$\begin{aligned}
&\omega^1 = -\frac{A_{23}}{2} + \frac{\tau_0}{2}(p_1\frac{\partial\varphi(x^1, x^2)}{\partial x^2} - \mathrm{D}_{23} - C_{13}x_1 - C_{23}x_2 + 2(E_{23} - C_{33})x_3), \\
&\omega^2 = \frac{A_{13}}{2} + \frac{\tau_0}{2}(-p_1\frac{\partial\varphi(x^1, x^2)}{\partial x^1} + \mathrm{D}_{13} + B_{13}x_1 + B_{23}x_2 + (2B_{33} - E_{13})x_3), \\
&\omega^3 = \frac{A_{21} - A_{12}}{2} + \frac{\tau_0}{2}(\mathrm{D}_{21} - \mathrm{D}_{12} + (2\,C_{11} - B_{12})x_1 + \\
&\qquad\qquad + (C_{12} - 2B_{22})x_2 + (C_{13} - B_{23})x_3)\,.
\end{aligned}$$

Компоненты псевдотензора изгиба-кручения и псевдовектора собственного микроповорота связаны равенствами [4]

$$\varkappa_{\mathrm{ji}} = \frac{\partial\omega_{\mathrm{i}}}{\partial \mathrm{x_j}} - \Gamma^{\mathrm{k}}_{\mathrm{ij}}\omega_{\mathrm{k}}, \tag{10}$$

где по повторяющимся индексам ведется суммирование от 1 до 3. Тогда ковариантные компоненты тензора изгиба-кручения (10) примут вид

$$\varkappa_{11} = \frac{\tau_0}{2}\left(p_1\frac{\partial^2\varphi\left(x^1,x^2\right)}{\partial x^2\partial x^1} - C_{13}\right), \qquad \varkappa_{22} = \frac{\tau_0}{2}\left(B_{23} - p_1\frac{\partial^2\varphi\left(x^1,x^2\right)}{\partial x^2\partial x^1}\right),$$
$$\varkappa_{33} = \frac{\tau_0}{2}\left(C_{13} - B_{23}\right), \qquad \varkappa_{12} = \frac{\tau_0}{2}\left(B_{13} - p_1\frac{\partial^2\varphi\left(x^1,x^2\right)}{\partial\left(x^1\right)^2} + A_{21} - A_{12}\right),$$
$$\varkappa_{21} = \frac{\tau_0}{2}\left(-C_{23} + p_1\frac{\partial^2\varphi\left(x^1,x^2\right)}{\partial\left(x^2\right)^2} + A_{12} - A_{21}\right),$$
$$\varkappa_{13} = ((A_{12} - A_{21} - B_{13})\,x_1 - B_{23}x_2 + (E_{13} - 2\,B_{33})\,x_3 -$$
$$- \mathrm{D}_{13} + p_1\frac{\partial\varphi\left(x^1,x^2\right)}{\partial x^1})\frac{\tau_0^2}{2} + (2\,C_{11} - B_{12})\,\frac{\tau_0}{2},$$
$$\varkappa_{31} = ((A_{12} - A_{21} - B_{13})\,x_1 - B_{23}x_2 + (E_{13} - 2\,B_{33})\,x_3 -$$
$$- \mathrm{D}_{13} + p_1\frac{\partial\varphi\left(x^1,x^2\right)}{\partial x^1})\frac{\tau_0^2}{2} + (E_{23} - 2C_{33} - A_{13})\,\frac{\tau_0}{2},$$
$$\varkappa_{23} = (-\,C_{13}x_1 + (A_{12} - C_{23} - A_{21})\,x_2 + (E_{23} - 2\,C_{33})\,x_3 + \tag{11}$$
$$+ p_1\frac{\partial\varphi\left(x^1,x^2\right)}{\partial x^2} - \mathrm{D}_{23})\frac{\tau_0^2}{2} + (C_{12} - 2\,B_{22})\,\frac{\tau_0}{2},$$
$$\varkappa_{32} = (-\,C_{13}x_1 + (A_{12} - C_{23} - A_{21})\,x_2 + (E_{23} - 2C_{33})\,x_3 +$$
$$+ p_1\frac{\partial\varphi\left(x^1,x^2\right)}{\partial x^2} - \mathrm{D}_{23})\frac{\tau_0^2}{2} + (2\,B_{33} - E_{13} - A_{23})\,\frac{\tau_0}{2}.$$

Во второй формуле закона Гука (8) в рамках псевдоконтинуума Коссера первое слагаемое равно 0, так как $\varkappa_{\mathrm{kk}}=\frac{1}{2}\mathrm{divrot}\mathbf{u}=0$, что и следует в нашем случае из равенств (11). В результате вторая формула закона Гука (8) примет вид

$$\mu_{\mathrm{ij}}=(\upsilon-\beta)\,\varkappa_{\mathrm{ji}}+(\upsilon+\beta)\,\varkappa_{\mathrm{ij}}. \tag{12}$$

С учетом значения компонент псевдотензора изгиба-кручения компоненты тензора моментных напряжений, получаемые из закона Гука (12), представимы в следующем виде:

$$\mu_{11} = \nu\tau_0\left(p_1\frac{\partial^2\phi\left(x^1,x^2\right)}{\partial x^2\partial x^1} - C_{13}\right), \qquad \mu_{22} = \nu\tau_0\left(B_{23} - p_1\frac{\partial^2\phi\left(x^1,x^2\right)}{\partial x^2\partial x^1}\right),$$
$$\mu_{33} = \nu\tau_0\left(C_{13} - B_{23}\right),$$
$$\mu_{12} = -\frac{\tau_0}{2}(p_1\left(\nu+\beta\right)\frac{\partial^2\phi\left(x^1,x^2\right)}{\partial\left(x^1\right)^2} - p_1\left(\nu-\beta\right)\frac{\partial^2\phi\left(x^1,x^2\right)}{\partial\left(x^2\right)^2} +$$
$$+ (2(A_{12} - A_{21}) - B_{13} - C_{23})\,\beta - \nu\,(B_{13} - C_{23})),$$

$$\mu_{21} = -\frac{\tau_0}{2}(p_1(\nu-\beta)\frac{\partial^2\phi\left(x^1,x^2\right)}{\partial\left(x^1\right)^2} - p_1(\nu+\beta)\frac{\partial^2\phi\left(x^1,x^2\right)}{\partial\left(x^2\right)^2} +$$
$$+(2(A_{21}-A_{12})+C_{23}+B_{13})\beta-\nu(B_{13}-C_{23})),$$

$$\mu_{13} = (\nu \mathrm{p}_1\frac{\partial\phi\left(x^1,x^2\right)}{\partial x^1} + ((-B_{13}-A_{21}+A_{12})x^1 +$$
$$+(-2B_{33}+E_{13})x^3 - \mathrm{D}_{13} - B_{23}x^2)\nu)\tau_0^2 + ((-2C_{33}-A_{13}-B_{12}+E_{23}+2C_{11})\nu +$$
$$+\beta(2C_{33}+2C_{11}-B_{12}+A_{13}-E_{23}))\frac{\tau_0}{2}, \tag{13}$$

$$\mu_{31} = (\nu \mathrm{p}_1\frac{\partial\phi\left(x^1,x^2\right)}{\partial x^1} + ((-B_{13}-A_{21}+A_{12})x^1 +$$
$$+(-2B_{33}+E_{13})x^3 - \mathrm{D}_{13} - B_{23}x^2)\nu)\tau_0^2 +$$
$$+((-2C_{33}-A_{13}-B_{12}+E_{23}+2C_{11})\nu - \beta(2C_{33}+2C_{11}-B_{12}+A_{13}-E_{23}))\frac{\tau_0}{2},$$

$$\mu_{23} = (\nu \mathrm{p}\frac{\partial\phi\left(x^1,x^2\right)}{\partial x^2} + ((-C_{23}-A_{21}+A_{12})x^2 +$$
$$+(E_{23}-2C_{33})x^3 - C_{13}x^1 - \mathrm{D}_{23})\nu)\tau_0^2 +$$
$$+((-2B_{22}+C_{12}+2B_{33}-A_{23}-E_{13})\nu + \beta(A_{23}-2B_{22}+C_{12}+E_{13}-2B_{33}))\frac{\tau_0}{2},$$

$$\mu_{32} = (\nu p\frac{\partial\varphi\left(x^1,x^2\right)}{\partial x^2} + ((-C_{23}-A_{21}+A_{12})x^2 +$$
$$+(E_{23}-2C_{33})x^3 - C_{13}x^1 - \mathrm{D}_{23})\nu)\tau_0^2 + ((-2B_{22}+C_{12} +$$
$$+2B_{33}-A_{23}-E_{13})\nu - \beta(A_{23}-2B_{22}+C_{12}+E_{13}-2B_{33}))\frac{\tau_0}{2}.$$

Уравнения равновесия микрополярной среды при отсутствии массовых сил и моментов запишем [4] при помощи тензора напряжений σ^{ij} и моментных напряжений μ^{ij}:

$$\sigma^{ji}_{,j}=0, \qquad \mu^{\mathrm{ji}}_{,\mathrm{j}} + \in^{\mathrm{ijk}}\sigma_{jk}=0,$$

где ,j означает ковариантное дифференцирование по соответствующей компоненте.

Первая группа уравнений равновесия преобразуется к виду

$$[-(2\mu(\mathrm{C}_{11}+2(\mathrm{C}_{33}+\mathrm{A}_{13}))+2(\lambda+2\mu)\mathrm{E}_{23}+(\mu+2\lambda)\mathrm{B}_{12}+$$
$$+4(\lambda+\mu)\mathrm{C}_{22})x^1+(4(\lambda+\mu)\mathrm{B}_{11}+(\mu+2\lambda)\ \mathrm{C}_{12}+2(\lambda+2\mu)\mathrm{E}_{13}+$$
$$+2\mu(\mathrm{B}_{22}+2(\mathrm{B}_{33}-\mathrm{A}_{23})))x^2]\tau_0^2+\tau_0\mu\mathrm{p}_1\Delta\varphi\left(\mathrm{x}^1,\mathrm{x}^2\right)+$$
$$+(2\mu(\mathrm{A}_{12}-\mathrm{A}_{21})+(\lambda+\mu)(\mathrm{C}_{23}+\mathrm{B}_{13})+2(\lambda+2\cdot\mu)\mathrm{E}_{33})\tau_0=0,$$

$$[-\left(2\left(\mathrm{C}_{33}+\mathrm{A}_{13}\right)+\ \mathrm{E}_{23}\right)\mu \mathrm{x}^3-\mu \mathrm{p}_1\frac{\partial\varphi\left(x^1,x^2\right)}{\partial x^2}+$$
$$+\left(2\left(\ \mathrm{A}_{22}-\ \mathrm{A}_{11}\right)-2\left(\mathrm{B}_{23}+\mathrm{C}_{13}\right)-\ \mathrm{p}_1\frac{\partial^2\varphi\left(x^1,x^2\right)}{\partial x^2\partial x^1}\right)\mu x^1+$$
$$+(\mu \mathrm{D}_{23}-2\lambda\left(\mathrm{C}_{23}+\mathrm{B}_{13}\right)-4\mu\left(\mathrm{B}_{13}-\mathrm{A}_{21}\right)-4\left(\lambda+\mu\right)E_{33}-$$
$$-\mu\ \mathrm{p}_1\left(2\frac{\partial^2\varphi\left(x^1,x^2\right)}{\partial (x^1)^2}+\frac{\partial^2\varphi\left(x^1,x^2\right)}{\partial (x^2)^2}\right))x^2]\tau_0^2+$$
$$+\left(2\left(\lambda\ +2\mu\right)\mathrm{B}_{11}+\left(\lambda+\mu\right)\left(\mathrm{C}_{12}+E_{13}\right)+\ \mu\left(2\left(\mathrm{B}_{22}+\mathrm{B}_{33}\right)-3\mathrm{A}_{23}\right)\right)\tau_0=0,$$

$$[-\left(2\ \lambda\left(\mathrm{C}_{23}+\mathrm{B}_{13}\right)+4\mu\left(\mathrm{C}_{23}+\mathrm{A}_{12}\right)+4\left(\lambda+\mu\right)E_{33}+\right.$$
$$+\mu \mathrm{p}_1\left(2\frac{\partial^2\varphi\left(x^1,x^2\right)}{\partial (x^2)^2}+\frac{\partial^2\varphi\left(x^1,x^2\right)}{\partial (x^1)^2}\right))x^1+$$
$$+\left(\mathrm{p}_1\left(\frac{\partial^2\varphi\left(x^1,x^2\right)}{\partial x^2\partial x^1}\right)+2\left(\mathrm{A}_{11}-\mathrm{A}_{22}\right)+2\left(\mathrm{B}_{23}+\mathrm{C}_{13}\right)\right)\mu \mathrm{x}^2+$$
$$+\left(\mathrm{E}_{13}+2\left(\mathrm{B}_{33}-\mathrm{A}_{23}\right)\right)\mu x^3]\tau_0^2+(\mu \mathrm{p}_1\frac{\partial\varphi\left(x^1,x^2\right)}{\partial x^1}+\mu\ \mathrm{D}_{13})\tau_0^2+$$
$$+\left(2\left(\lambda\ +2\mu\right)\mathrm{C}_{22}+\left(\lambda+\mu\right)\left(\mathrm{B}_{12}+\mathrm{E}_{23}\right)+\ \mu\left(2\left(\mathrm{C}_{11}+\ \mathrm{C}_{33}\right)+3\ \mathrm{A}_{13}\right)\right)\tau_0=0.$$

Вторая группа уравнений равновесия с учетом значений компонент тензора напряжений (9) и моментных напряжений (13) имеет вид

$$\left(\frac{(3\ \nu+\beta)}{2}\left(E_{13}-2B_{33}\right)\ +\frac{(\nu+\beta)\ A_{23}}{2}-\frac{(\nu-\beta)}{2}\left(C_{12}-B_{22}\right)\right)\tau_0^2+$$
$$+\frac{(\nu+\beta)\ \mathrm{p}_1}{2}\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\Delta\varphi\left(x^1,x^2\right)\right)\tau_0=0,$$
$$\left(\frac{(3\ \nu+\beta)}{2}\left(E_{23}-2\ C_{33}\right)\ -\frac{(\nu+\beta)\ A_{13}}{2}-\frac{(\nu-\beta)}{2}\left(B_{12}-C_{11}\right)\right)\tau_0^2+$$
$$+\frac{(\nu+\beta)\ \mathrm{p}_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\Delta\varphi\left(x^1,x^2\right)\right)\tau_0=0,$$
$$\left(\left(2C_{33}-\ E_{23}\right)x_1+2\left(\ E_{13}-2\ B_{33}\right)x_2\right)\nu\tau_0^3+$$
$$+\left(\nu+\beta\right)(\frac{1}{2}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\Delta\varphi\left(x^1,x^2\right)\right)+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\Delta\varphi\left(x^1,x^2\right)\right)\right)+$$
$$+2\left(A_{12}-A_{21}\right)-\ \left(B_{13}+C_{23}\right)+\mathrm{p}_1\Delta\varphi\left(x^1,x^2\right))\tau_0^2=0.$$

Так как уравнения равновесия представлены в виде разложения в ряд по степеням параметра τ_0, то коэффициенты, стоящие при соответствующих степенях параметра τ_0, должны равняться нулю. Учитывая независимость компонент x^1, x^2, x^3 друг от друга, константы, стоящие при соответствующих независимых переменных, также приравняем нулю:

$$2\,(\lambda\ +2\mu)\,\mathrm{B}_{11}+(\lambda+\mu)\,(\mathrm{C}_{12}+E_{13})+\ \mu\,(2\,(\mathrm{B}_{22}+\mathrm{B}_{33})-3\mathrm{A}_{23})=0,$$

$$2\,(\mathrm{C}_{33}+\mathrm{A}_{13})+\ \mathrm{E}_{23}=0,\qquad\qquad \mathrm{E}_{13}+2\,(\mathrm{B}_{33}-\mathrm{A}_{23})=0,$$

$$\begin{gathered}2\,(\lambda\ +2\mu)\,\mathrm{C}_{22}+(\lambda+\mu)\,(\mathrm{B}_{12}+\mathrm{E}_{23})+\ \mu\,(2\,(\mathrm{C}_{11}+\ \mathrm{C}_{33})+3\ \mathrm{A}_{13})=0,\\ 2\ \mu\,(\mathrm{C}_{11}+2\,(\mathrm{C}_{33}+\mathrm{A}_{13}))+2\,(\lambda\ +2\mu)\,\mathrm{E}_{23}+(\mu+2\lambda)\,\mathrm{B}_{12}+4\,(\lambda+\mu)\,\mathrm{C}_{22}=0,\\ 4\,(\lambda+\mu)\,\mathrm{B}_{11}+(\mu+2\ \lambda)\ \ \mathrm{C}_{12}+2\,(\lambda\ +2\mu)\,\mathrm{E}_{13}+2\ \mu\,(\mathrm{B}_{22}+2\,(\mathrm{B}_{33}-\mathrm{A}_{23}))=0,\end{gathered}\tag{14}$$

$$2C_{33}-\ E_{23}=0,\qquad E_{13}-2\ B_{33}=0,$$
$$(3\ \nu+\beta)\,(E_{13}-2B_{33})\ +(\nu+\beta)\,A_{23}-(\nu-\beta)\,(C_{12}-B_{22})=0,$$

$$(3\ \nu+\beta)\,(E_{23}-2\ C_{33})\ -(\nu+\beta)\,A_{13}-(\nu-\beta)\,(B_{12}-C_{11})=0.$$

Граничные условия на основаниях естественно закрученного стержня

$$\mathrm{V}_1=0,\qquad \mathrm{V}_2=0,\qquad \mathrm{V}_3=\mathrm{P},\qquad \mathrm{M}_1=\mathrm{M}_2=\mathrm{M}_3=0.\tag{15}$$

Из формул (15) две группы граничных условий на основаниях естественно закрученного стержня представимы следующим образом:

$$(((C_{23}+B_{13})\,\lambda+2\,(\lambda+2\mu)\,E_{33})\,\ell+(\mathrm{D}_{11}+\mathrm{D}_{22})\,\lambda)\,\tau_0+$$
$$+(A_{11}+A_{22})\,\lambda+(\lambda+2\mu)\,A_{33}=\frac{P}{S}=p,$$

$$\begin{aligned}&2((\lambda\,(B_{12}+2C_{22})+(\lambda+2\mu)\,E_{23})\,I_{11}+\\&\quad+\nu\mathrm{S}\tau_0\,(-\,(2\,(B_{33}-A_{23})\,\ell)-2\mathrm{D}_{13}-2B_{33}\ell)+\\&\quad+S(\nu\,((E_{23}-A_{13}-B_{12})+2(C_{11}-C_{33}))-\\&\quad-\beta\,(2\,(C_{11}+C_{33})+A_{13}-B_{12}-E_{23})-\nu\mathrm{A}_{13}))=0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&2(-\,(\lambda\,(C_{12}+2B_{11})+(\lambda+2\mu)\,E_{13})\,I_{22}+\\&\quad+\nu\mathrm{S}\tau_0\,(-\,(2\,(C_{33}+A_{13})\,\ell)-2\mathrm{D}_{23}-2C_{33}\ell)+\\&\quad+S(\nu\,(C_{12}+2B_{33}-A_{23}-2B_{22}-E_{13})-\\&\quad-\beta\,(-2\,(B_{22}+B_{33})+A_{23}+C_{12}+E_{13})-\nu\mathrm{A}_{23}))=0;\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}p_1\,T+\mu\,((C_{13}+2A_{11})\,I_{22}+(-B_{23}+2A_{22})\,I_{11})+\ S\,(C_{13}-B_{23})=0,\\ \tau_0\int_S\frac{\partial\varphi\left(x^1,x^2\right)}{\partial x^2}dS=-\,(((2\,(C_{33}+A_{13})+E_{23})\,\ell+\mathrm{D}_{23})\,\tau_0+A_{23})\,\frac{S}{p_1},\\ \tau_0\int_S\frac{\partial\varphi\left(x^1,x^2\right)}{\partial x^1}dS=-\,(((2\,(B_{33}-A_{23})+E_{13})\,\ell+\mathrm{D}_{13})\,\tau_0+A_{13})\,\frac{S}{p_1},\\ T=\mu\int_S\left(x^1\frac{\partial\varphi\left(x^1,x^2\right)}{\partial x^2}-x^2\frac{\partial\varphi\left(x^1,x^2\right)}{\partial x^1}+\left(x^1\right)^2+\left(x^2\right)^2\right)dS.\end{gathered}\tag{16}$$

Первая группа граничных условий на боковой поверхности естественно закрученного стержня имеет вид

$$(\sigma^{1k} + \tau_0 x^2 \sigma^{3k})n_1 + (\sigma^{2k} - \tau_0 x^1 \sigma^{3k})n_2 = 0, \quad k = 1,2,3, \tag{17}$$

при этом третье уравнение граничных условий (17) сводится к условию Неймана

$$\frac{\partial\varphi\left(x^1,x^2\right)}{\partial n} = \frac{1}{\mu \mathrm{p}_1}\Big[((-\left(2A_{11} + C_{13}\right)\mu + 3\,\lambda\, A_{11} + \left(3\,\lambda + 2\,\mu\right)A_{22} -$$
$$-\left(4\,\mu + 3\,\lambda\right)A_{33})x^1 - \left(C_{23} + 3A_{12} + A_{21}\right)\mu x^2 - \left(2\,C_{33} + E_{23}\right)\mu x^3 - \mathrm{D}_{23}\mu)\frac{dx^1}{dl} +$$
$$+((B_{13} + 3A_{21} + A_{12})\,\mu x^1 + (\mu\left(2\,A_{22} - B_{23}\right) - (3\lambda + 2\mu)\,A_{11} - 3\,\lambda\,A_{22} -$$
$$-\left(4\mu + 3\lambda\right)A_{33})x^2 - \mu\,\left(2\,B_{33} + E_{13}\right)x^3 - \mu \mathrm{D}_{13})\frac{dx^2}{dl}\Big]. \tag{18}$$

Задача определения функции $\varphi\left(x^1,x^2\right)$ есть, таким образом, задача Неймана (18) для уравнения Пуассона

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\mu \mathrm{p}_1}(2\mu\left(\mathrm{A}_{21} - \mathrm{A}_{12}\right) - \left(\lambda + \mu\right)\left(\mathrm{C}_{23} + \mathrm{B}_{13}\right) - 2\left(\lambda\; + 2\mu\right)\mathrm{E}_{33}). \tag{19}$$

С учетом взаимосвязей между константами (14), (16) равенство (19) преобразуется к виду

$$\Delta\varphi = 0\,. \tag{20}$$

Вторая группа граничных условий на боковой поверхности естественно закрученного стержня имеет вид

$$(\mu^{1k} + \tau_0 x^2 \mu^{3k})n_1 + (\mu^{2k} - \tau_0 x^1 \mu^{3k})n_2 = 0\,, \tag{21}$$

где $k = 1,2,3$. Первое и второе равенства (21), с учетом значений компонент тензора напряжений (9) и интегрирования от точки к точке контура ℓ примут вид:

$$\frac{\partial\varphi\left(\mathrm{x}^1,\mathrm{x}^2\right)}{\partial \mathrm{x}^1} = \frac{1}{\nu \mathrm{p}_1}\Big[\mathrm{C}_1 + [-((2\left(\mathrm{C}_{11} - \mathrm{C}_{33}\right) + \mathrm{E}_{23} - \;\mathrm{B}_{12} - \;\mathrm{A}_{13})\,\frac{3\nu}{2} +$$
$$+\left(-2\left(\mathrm{C}_{33} + \mathrm{C}_{11}\right)\mathrm{B}_{12} + \mathrm{E}_{23} - \;\mathrm{A}_{13}\right)\frac{\beta}{2})\frac{\left(\mathrm{x}^2\right)^2}{2} +$$
$$+((2\left(\mathrm{C}_{33} - \mathrm{C}_{11}\right) + \mathrm{B}_{12} - \mathrm{E}_{23} + \mathrm{A}_{13})\,\nu + \tag{22}$$
$$+\beta\left(2\left(\mathrm{C}_{33} + \mathrm{C}_{11}\right) - \mathrm{E}_{23} - \mathrm{B}_{12} + \mathrm{A}_{13}\right))\frac{\left(\mathrm{x}^1\right)^2}{2}]\tau_0 +$$
$$+\nu \mathrm{C}_{13}\mathrm{x}_2 + \mathrm{x}^1(-\frac{(\nu + \beta)}{2}(\frac{1}{\mu \mathrm{p}_1}[2\,\mu\left(\mathrm{A}_{12} - \mathrm{A}_{21}\right) + \left(\lambda + \mu\right)\left(\mathrm{C}_{23} + \mathrm{B}_{13}\right) +$$
$$+2\left(\lambda + 2\,\mu\right)\mathrm{E}_{23}]) + (\mathrm{B}_{13} - \;\mathrm{C}_{23})\,\frac{\nu}{2} + \left(2\left(\mathrm{A}_{12} - \mathrm{A}_{21}\right) - \left(\,\mathrm{B}_{13} + \mathrm{C}_{23}\right)\right)\frac{\beta}{2})\Big];$$

$$\frac{\partial\varphi(\mathrm{x}^1,\mathrm{x}^2)}{\partial\mathrm{x}^2}=\frac{1}{\nu\mathrm{p}_1}\Big[\mathrm{C}_2+[((2(\mathrm{B}_{22}-\mathrm{B}_{33})+\mathrm{A}_{23}+\mathrm{E}_{13}-\mathrm{C}_{12})\frac{3\nu}{2}+$$
$$+(-2(\mathrm{B}_{22}+\mathrm{B}_{33})+\mathrm{A}_{23}+\mathrm{C}_{12}+\ \mathrm{E}_{13})\frac{\beta}{2})\frac{(\mathrm{x}^1)^2}{2}+$$
$$+((\mathrm{A}_{23}-2\mathrm{B}_{33}+2\mathrm{B}_{22}+\mathrm{E}_{13}-\mathrm{C}_{12})\nu+$$
$$+(-2\mathrm{B}_{22}+\mathrm{C}_{12}-2\mathrm{B}_{33}+\mathrm{A}_{23}+\mathrm{E}_{13})\beta)\frac{(\mathrm{x}^2)^2}{2}]\tau_0+\mathrm{p}_1\nu\mathrm{B}_{23}\mathrm{x}^1- \tag{23}$$
$$-\mathrm{x}^2[(\mathrm{B}_{13}-\ \mathrm{C}_{23})\frac{\nu}{2}+(2(\mathrm{A}_{21}-\mathrm{A}_{12}t)+\ \mathrm{B}_{13}+\mathrm{C}_{23})\frac{\beta}{2}+$$
$$+\frac{(\nu+\beta)}{2}(\frac{1}{\mu\mathrm{p}_1}[2\,\mu(\mathrm{A}_{12}-\mathrm{A}_{21})+(\lambda+\mu)(\mathrm{C}_{23}+\mathrm{B}_{13})+2(\lambda+2\,\mu)\mathrm{E}_{33}])]\Big].$$

Для разрешимости граничной задачи Неймана (18) и (22), (23) должно выполняться соотношение

$$B_{13}-C_{23}=2\,(A_{12}-A_{21})\,. \tag{24}$$

Таким образом, каждая из двух групп граничных условий на боковой поверхности естественно закрученного стержня приводит к одинаковой для каждой из групп задаче Неймана для уравнения Лапласа (20).

Первые два граничных условия (17) и третье граничное условие (21) на боковой поверхности естественно закрученного стержня удовлетворяются тождественно выбором констант. В результате, учитывая равенства (14), (16), (24), получаем следующие связи между константами:

$$A_{11}=-\frac{\lambda p_1}{2\mu(3\lambda+2\mu)},\qquad A_{22}=-\frac{\lambda\mathrm{p}_1}{2\mu(3\lambda+2\mu)},\qquad A_{33}=\frac{(\lambda+\mu)p_1}{\mu(3\lambda+2\mu)},$$
$$\mathrm{D}_{11}=-\frac{p-p_1}{2\mu\tau_0},\qquad \mathrm{D}_{22}=\frac{(p-p_1)(\lambda+2\mu)}{2\mu\tau_0\lambda},$$
$$B_{23}=\frac{p_1((3\,\lambda+2\,\mu)\,T-I_p\lambda)}{(3\lambda+2\mu)(\mu I_p+2\nu S)},\qquad C_{13}=-B_{23}.$$

Остальные константы равны нулю.

При совпадении p и p_1 компоненты вектора перемещений и вектора собственного микроповорота примут вид

$$\mathrm{u}_1=-\frac{\lambda p_1}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\mathrm{x}^1+\tau_0\frac{p_1((3\,\lambda+2\,\mu)\,T-I_p\lambda)}{(3\lambda+2\mu)(\mu I_p+2\nu S)}\mathrm{x}^2\mathrm{x}^3,$$
$$\mathrm{u}_2=-\frac{\lambda\mathrm{p}_1}{2\mu\,(3\lambda+2\mu)}\mathrm{x}^2-\tau_0\frac{p_1\,((3\,\lambda+2\,\mu)\ T-I_p\lambda)}{(3\lambda+2\mu)(\mu I_p+2\nu S)}\mathrm{x}^2\mathrm{x}^3,$$
$$\mathrm{u}_3=\frac{(\lambda+\mu)\,p_1}{\mu\,(3\lambda+2\mu)}\mathrm{x}^3+\tau_0\mathrm{p}_1\varphi\left(\mathrm{x}^1,\mathrm{x}^2\right).$$

В результате получаем значения компонент тензора напряжений:

$$\sigma_{33}=p_1,\qquad \sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_{12}=\sigma_{21}=0,$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{13} = \sigma_{31} &= \tau_0 \mu p_1 \left(\frac{\partial \varphi\left(x^1, x^2\right)}{\partial x^1} + \Big(\frac{(3\,\lambda + 2\,\mu)\,T - I_p \lambda}{\mu I_p + 2\nu S} + \frac{\lambda}{\mu} \Big) \frac{x^2}{(3\lambda + 2\mu)} \right), \\
\sigma_{23} = \sigma_{32} &= \tau_0 \mu p_1 \left(\frac{\partial \varphi(x^1, x^2)}{\partial x^2} - \Big(\frac{(3\,\lambda + 2\mu)\,T - I_p \lambda}{\mu I_p + 2\nu S} + \frac{\lambda}{\mu} \Big) \frac{x^1}{(3\lambda + 2\mu)} \right)
\end{aligned} \tag{25}
$$

и значения компонент тензора моментных напряжений:

$$
\begin{aligned}
\mu_{11} &= p_1 \nu \tau_0 \left(\frac{\partial^2 \varphi(x^1, x^2)}{\partial x^2 \partial x^1} + \frac{((3\lambda + 2\mu)\,T - I_p \lambda)}{(3\lambda + 2\mu)(\mu I_p + 2\nu S)} \right), \\
\mu_{22} &= p_1 \nu \tau_0 \left(\frac{((3\lambda + 2\mu)\,T - I_p \lambda)}{(3\lambda + 2\mu)(\mu I_p + 2\nu S)} - \frac{\partial^2 \varphi(x^1, x^2)}{\partial x^2 \partial x^1} \right), \\
\mu_{33} &= \frac{2 p_1 (\lambda I_p - (3\lambda + 2\mu)\,T) \nu \tau_0}{(3\lambda + 2\mu)(\mu I_p + 2\nu S)}, \\
\mu_{12} = \mu_{21} &= -\frac{\tau_0 p_1}{2} \left((\nu + \beta) \frac{\partial^2 \varphi(x^1, x^2)}{\partial (x^1)^2} - (\nu - \beta) \frac{\partial^2 \varphi(x^1, x^2)}{\partial (x^2)^2} \right), \\
\mu_{13} = \mu_{31} &= \nu \mathrm{p}_1 \left(\frac{\partial \varphi(x^1, x^2)}{\partial x^1} - \frac{((3\lambda + 2\mu)\,T - I_p \lambda)}{(3\lambda + 2\mu)(\mu I_p + 2\nu S)} x^2 \right) \tau_0^2, \\
\mu_{23} = \mu_{32} &= \nu \mathrm{p}_1 \left(\frac{\partial \varphi(x^1, x^2)}{\partial x^2} + \frac{((3\,\lambda + 2\,\mu)\,T - I_p \lambda)}{(3\lambda + 2\mu)(\mu I_p + 2\nu S)} x^1 \right) \tau_0^2.
\end{aligned} \tag{26}
$$

Следовательно, в каждой точке стержня мы получили чистый сдвиг, определяемый компонентами тензора напряжений σ_{13}, σ_{31}, σ_{23}, σ_{32}.

Обратим внимание, что также возникают нормальные напряжения, действующие между продольными волокнами стержня или в направлении самих волокон. Также возникают искажения плоскостей поперечных сечений (депланация поперечного сечения стержня), поскольку γ_{11}, γ_{22}, γ_{33}, γ_{12}, γ_{21} не обращаются в нуль.

В отличие от классической задачи растяжения естественно закрученного стержня, без учета моментных напряжений, представленной, например, в работах П.М. Риза [1], А.И. Лурье [3], формулы, определяющие компоненты тензора напряжений, имеют вид:

$$\sigma_{33} = \mathrm{p}, \qquad \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{21} = 0,$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} = \mathrm{p}\tau_0 \left(\frac{I_p}{T} \frac{\partial \varphi \left(\mathrm{x}^1, \mathrm{x}^2\right)}{\partial \mathrm{x}^1} - x^2 \left(\frac{I_p}{T} - 1 \right) \right),$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = \mathrm{p}\tau_0 \left(\frac{I_p}{T} \frac{\partial \varphi \left(\mathrm{x}^1, \mathrm{x}^2\right)}{\partial \mathrm{x}^2} + x^1 \left(\frac{I_p}{T} - 1 \right) \right).$$

Среднее значение кручения для всего поперечного сечения, обозначаемое через τ, определяется формулой

$$\tau = \frac{1}{S} \int_S \varkappa_{x_3 x_3} dS = \frac{\tau_0}{2S} \int_S \left(C_{13} - B_{23}\right) dS = \frac{p_1 \left(\lambda I_p - (3\,\lambda + 2\,\mu)\ T\right) \tau_0}{S(3\lambda + 2\mu)(\mu I_p + 2\nu S)}\,.$$

Окончательные формулы (25)–(27), получившиеся с учетом моментных напряжений, отличаются тем, что

1. Депланация поперечного сечения стержня определяется не только соответствующими классическому случаю компонентами силовых напряжений σ_{13}, σ_{31}, σ_{23}, σ_{32}, но и компонентами моментных напряжений μ_{11}, μ_{22}, μ_{12}, μ_{21}

2. Первая и вторая компоненты вектора перемещений зависят не только от величины растягивающих усилий p, но и от геометрии стержня.

3. Среднее значение кручения для всего поперечного сечения зависит не только от полярного момента и величины T, но и от площади поперечного сечения S.

Следует заметить, что при равенстве нулю естественной крутки τ_0 полученные значения компонент тензора напряжений и моментных напряжений (25), (26) переходят в компоненты тензора напряжений, которые получены в случае прямолинейного стержня в [6]. Т. е. при построении решений основных дифференциальных уравнений в случае равенства нулю параметра τ_0 выяснилось, что решение типа Сен-Венана приводит к отсутствию моментных напряжений.

Сравнивая формулы (25) для компонент тензора напряжений с аналогичными формулами, полученными в [1], обнаруживаем, что зависимости структурно одинаковы, а отличаются лишь коэффициенты, стоящие при x^2.

Если положить, что растягивающие усилия, приложенные к торцевому сечению стержня, отсутствуют, т. е. положить p_1 равным нулю, то поставленное условие приводит к равенству нулю компонент тензора напряжений (25) и моментных напряжений (26). Значит, исследуемое условие не приводит к противоречию.

1. *Риз П.М.* Деформация естественно закрученных стержней // Докл. АН СССР. – 1939. – **3**, № 4. – С. 449–455.
2. *Илюхин А.А., Щепин Н.Н.* К моментной теории упругих стержней // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. Спецвыпуск. – 2001. – С. 92–94.
3. *Устинов Ю.А.* Задачи Сен-Венана для псевдоцилиндров. – М.: Физматлит, 2003. – 128 с.
4. *Пальмов В.А.* Основные уравнения теории несимметричной упругости // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, № 3. – С. 401–408.
5. *Лурье А.И., Джанелидзе Г.Ю.* Задача Сен-Венана для стержней, близких к призматическим // Докл. АН СССР. – 1939. – **XXIV**, № 1–№ 3. – С. 1–8.
6. *Попов А.К.* Осевое растяжение стержня в рамках моментной теории упругости // Вестн. Таганрог. гос. пед. ин-та. Физико-математ. и естеств. науки. – Таганрог: Изд. отдел ГОУВПО "Таганрог. гос. пед. ин-та", 2011. – № 1. – С. 43–50.

A.A. Ilyukhin, A.K. Popov

The stretching-compression problem for a naturally twisted rod in the framework of the moment theory of elasticity

The paper presents a solution to Saint-Venant problem on a naturally twisted rod stretching by a force applied to the free end section. This solution is constructed in terms of displacements. The displacement vector, the stress tensor and the couple stress components that satisfy the boundary conditions on the basis and on the lateral surface are found.

Keywords: *stretching, naturally twisted rod, moment elasticity theory, Cosserat continuum.*

О.О. Ілюхін, О.К. Попов

Задача розтягування-стиску природно закрученого стержня в рамках моментної теорії пружності

У рамках роботи в переміщеннях побудовано розв'язок задачі про розтягування природно закрученого стержня силою, яка прикладається до вільного торцевого перерізу. Визначено компоненти вектора переміщень, тензора напружень і моментних напружень, що задовольняють граничним умовам на основах та боковій поверхні природно закрученого стержня.

Ключові слова: *розтягування, природно закручений стержень, моментна теорія пружності, псевдоконтінуум Коссера.*

Таганрогский гос. пед. ин-т им. А.П. Чехова, Россия
Получено 07.11.11

aleilyukhin@yandex.ru , ASDAlexey@yandex.ru