УДК 517.934

©2011. В.Р. Барсегян, С.Г. Шагинян, Т.В. Барсегян

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО ПРИОРИТЕТНОМУ ОПТИМАЛЬНОМУ УПРАВЛЕНИЮ

Рассматривается задача оптимальной стабилизации линейных динамических систем по приоритетному управлению. Решение задачи построено вторым методом Ляпунова и проведением повторной минимизации функционала. В качестве приложения решена задача стабилизации по приоритетному оптимальному управлению возмущенного движения центра масс искусственного спутника Земли по круговой орбите.

Ключевые слова: *оптимальное управление, приоритетное управление, оптимальная стабилизация, динамические системы.*

Введение. Проблемы управления и стабилизации движения несколькими управляющими воздействиями естественным образом возникают в ряде важных прикладных задач. Такие системы отдельно по каждому управляющему воздействию могут быть не вполне управляемы, но по совокупности управляющих воздействий такая система может стать вполне управляемой. В таких задачах возникает необходимость учитывать присутствие параметров, характеризующих управляющие воздействия, выбором которых можно определить приоритетность соответствующих управляющих воздействий.

В работах [1, 2] поставлены и исследованы задачи приоритетного управления и оптимального управления движением линейных систем несколькими управляющими воздействиями.

В настоящей работе рассматривается задача оптимальной стабилизации линейных динамических систем по приоритетному оптимальному управлению. Предполагается, что в динамике системы присутствуют параметры, характеризующие управляющие воздействия. Задача оптимальной стабилизации решается вторым методом Ляпунова. Полученные оптимальные управляющие воздействия и значение функционала зависят от параметров приоритетности. Предлагается с помощью повторной минимизации функционала по этим параметрам найти значения коэффициентов приоритетности управляющих воздействий и приоритетные оптимальные стабилизирующие воздействия. В качестве приложения рассмотрена задача оптимальной стабилизации возмущенного движения центра масс искусственного спутника Земли по круговой орбите и приведен числовой пример.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_j(t) = \sum_{s=1}^{n} a_{js}(t)x_s + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left(\sum_{s=1}^{r_i} b_{j\,s}^{(i)}(t) u_s^{(i)} \right) \quad (j = 1, ..., n), \tag{1}$$

где $a_{js}(t)$ и $b_{jl}^{(i)}(t)$ – ограниченные непрерывные функции на $[t_0; +\infty)$ $(j, s = 1, ..., n;\ l = 1, ..., r_i;\ i = 1, ..., k)$; $u^{(i)}$ – r_i-мерные вектор-столбцы управляющих воздействий (i-й управляющий орган). Предполагается, что управляющие воздействия $u^{(i)} \in R^{r_i}$, а параметры $\alpha_i \in [0; 1]$ характеризуют i-й орган управления $u^{(i)}$ и являются коэффициентами его приоритетности.

Предполагается, что отдельно по каждому управляющему воздействию $u^{(i)}$ $(i = 1, ..., k)$ система (1) может быть не вполне управляемой, но по совокупности этих управляющих воздействий система является вполне управляемой [2].

Сформулируем следующую задачу.

Задача. Требуется найти оптимальные управляющие воздействия $u^{(i)0}$ и параметры α^i $(i = 1, ..., k)$, которые обеспечивают асимптотическую устойчивость решения $x_j = 0$ $(j = 1, ..., n)$ системы (1) и минимизируют функционал

$$I\,[\boldsymbol{.}] = \int\limits_{t_0}^{\infty} \left[\sum_{j,s=1}^{n} \beta_{js} x_j x_s + \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j,s=1}^{r_i} \gamma_{js}^{(i)} u_j^{(i)} u_s^{(i)} \right) \right] dt. \tag{2}$$

Здесь предполагается, что квадратичные формы

$$\sum_{j,s=1}^{n} \beta_{js} x_j x_s \quad \text{и} \quad \sum_{j,s=1}^{r_i} \gamma_{js}^{(i)} u_j^{(i)} u_s^{(i)} \quad (i = 1, ..., k)$$

– определенно-положительные.

2. Решение задачи. Задачу решим вторым методом Ляпунова [3, 4]. Предполагаем, что $V(x_1, ..., x_n, t)$ – некоторая определенно-положительная функция Ляпунова. Составим выражение $B[V;\, t; x_1, ..., x_n;\ u_1^{(1)}, ..., u_{r_k}^{(k)}]$ [3, 4]:

$$B[\boldsymbol{.}] = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} \left[\sum_{s=1}^{n} a_{js}(t) x_s + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left(\sum_{s=1}^{r_i} b_{js}^{(i)}(t) u_s^{(i)} \right) \right] +$$

$$+ \sum_{j,s=1}^{n} \beta_{js} x_j x_s + \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j,s=1}^{r_i} \gamma_{js}^{(i)} u_j^{(i)} u_s^{(i)} \right). \tag{3}$$

Так как при оптимально управляющих воздействиях $u^{(i)} = u^{(i)0}$, $i = 1, ..., k$, выражение (3) имеет минимум [3, 4], следовательно

$$\left. \frac{\partial B[\boldsymbol{.}]}{\partial u_s^{(i)}} \right|_{u_s^{(i)0}} = 0 \quad (s = 1, ..., r_i;\ i = 1, ..., k),$$

т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} \alpha_i b_{js}^{(i)}(t) + 2 \sum_{j=1}^{r_i} \gamma_{js}^{(i)} u_j^{(i)0} = 0 \quad (s = 1, ..., r_i;\ i = 1, ..., k). \tag{4}$$

Систему (4) можно привести к виду

$$\sum_{j=1}^{r_i}\gamma_{js}^{(i)}u_j^{(i)0}=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_j}\alpha_i b_{js}^{(i)}(t)\quad (s=1,...,r_i;\ i=1,...,k). \tag{5}$$

Обозначим через $r=\sum\limits_{i=1}^{k}r_i$. Система (5) является системой r линейных алгебраических неоднородных уравнений относительно r неизвестных управляющих воздействий $u_1^{(1)0},...,u_{r_k}^{(k)0}$.

Так как для любого i $(i=1,...,k)$ квадратичные формы $\sum\limits_{j,s=1}^{r_i}\gamma_{js}^{(i)}u_j^{(i)}u_s^{(i)}$ определенно-положительны, то $\Delta^{(i)}\neq 0$, где

$$\Delta^{(i)}=\begin{vmatrix}\gamma_{11}^{(i)} & \gamma_{12}^{(i)} & \dots & \gamma_{1r_i}^{(i)}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \gamma_{r_i1}^{(i)} & \gamma_{r_i2}^{(i)} & \dots & \gamma_{r_ir_i}^{(i)}\end{vmatrix}.$$

Обозначим через

$$\Delta_m^{(i)}=\begin{vmatrix}\gamma_{11}^{(i)} & \dots & \gamma_{1\,m-1}^{(i)} & -\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_j}\alpha_i b_{j1}^{(i)} & \gamma_{1\,m+1}^{(i)} & \dots & \gamma_{1r_i}^{(i)}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \gamma_{r_i1}^{(i)} & \dots & \gamma_{r_i\,m-1}^{(i)} & -\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_j}\alpha_i b_{jr_i}^{(i)} & \gamma_{r_i\,m+1}^{(i)} & \dots & \gamma_{r_ir_i}^{(i)}\end{vmatrix}.$$

Тогда решение системы (5) будет

$$u_m^{(i)0}=\frac{\Delta_m^{(i)}}{\Delta^{(i)}}=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r_i}\frac{\Delta_{ms}^{(i)}}{\Delta^{(i)}}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_j}\alpha_i b_{js}^{(i)}\right)\quad (i=1,...,k;\ m=1,...,r_i). \tag{6}$$

В правые части (6) входят параметры α_i, $i=1,...,k$, т.е. управляющие воздействия зависят от коэффициентов α_i.

Выбирая функцию Ляпунова $V(x_1,...,x_n,t)$ в виде квадратичной формы, следуя [3,4] и выполняя соответствующие необходимые вычисления, получим оптимальные выражения управляющих воздействий

$$u^{(i)0}=u^{(i)0}(t,x_1,...,x_n,\,\alpha_1,...,\alpha_k),\quad i=1,...,k. \tag{7}$$

Подставляя выражения управляющих воздействий в (2), будем иметь минимальное значение функционала (2) в виде

$$I[\alpha_1,...,\alpha_k]=I[u^{(1)0}(\alpha_1,...,\alpha_k),...,u^{(k)0}(\alpha_1,...,\alpha_k)], \tag{8}$$

зависящего от параметров $\alpha_i \quad (i = 1, ..., k)$.

Минимизируя выражение (8) по параметрам $\alpha_1, ..., \alpha_k$, т.е. выбирая подходящие значения коэффициентов $\alpha_i^0 \in (0; 1] \quad (i = 1, ..., k)$, можно обеспечить для выражения (8) минимальное значение $I[\alpha_1^0, ..., \alpha_k^0]$.

Таким образом, найдены значения параметров $\alpha_1^0, ..., \alpha_k^0$, которые соответствуют приоритетности управляющим воздействиям. Подставляя значения найденных параметров в (7), будем иметь

$$u^{(i)0} = u^{(i)0}(t, x_1, ..., x_n, \alpha_1^0, ..., \alpha_k^0) \quad (i = 1, ..., k)$$

– приоритетные оптимальные управляющие воздействия, которые стабилизируют тривиальное решение системы (1).

3. Пример. Для иллюстрации вышеизложенного рассмотрим дифференциальные уравнения первого приближения возмущенного движения центра масс искусственного спутника Земли [5], которые в нормальной форме записываются в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= 3\omega^2 x_1 + 2\omega r_0 x_5, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= -2\omega^2 x_3 + \alpha_1 u_1, \\ \dot{x}_5 &= -2\frac{\omega}{r_0} x_2 + \alpha_2 u_2, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\omega = \sqrt{\dfrac{\mu}{r_0^3}}$ – угловая скорость вращения радиуса-вектора r_0 спутника; μ – гравитационный параметр Земли. Здесь u_1 и u_2 – управляющие воздействия, а $\alpha_1, \alpha_2 \in (0; 1]$.

Требуется найти оптимальные управляющие воздействия u_i^0 и значения параметров $\alpha_i^0 \quad (i = 1, 2)$, которые обеспечивают асимптотическую устойчивость тривиального решения системы (9) и минимизируют функционал

$$I\left[u_1, u_2\right] = \int\limits_0^\infty \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + u_1^2 + u_2^2\right) dt. \tag{10}$$

Здесь предполагается, что коэффициенты $\beta_{jj} = 1, \ \beta_{js} = 0, \ j \neq s, \quad (j, s = = 1, ..., 5)$ и $\gamma_{11}^{(1)} = 1, \ \gamma_{22}^{(2)} = 1$.

Для этой задачи, согласно формуле (6), получим

$$u_1^0 = -\frac{\alpha_1}{2}\frac{\partial V}{\partial x_4}, \qquad u_2^0 = -\frac{\alpha_2}{2}\frac{\partial V}{\partial x_5}. \tag{11}$$

Будем искать функцию Ляпунова в виде

$$V = c_{11}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + 2c_{15}x_1x_5 + c_{22}x_2^2 + 2c_{25}x_2x_5 + c_{33}x_3^2 + 2c_{34}x_3x_4 + c_{44}x_4^2 + c_{55}x_5^2. \tag{12}$$

Для определения коэффициентов квадратичной формы (12) получаем систему следующих алгебраических уравнений:

$$
\begin{aligned}
&1 + 6\omega^2 c_{12} - c_{15}\alpha_2^2 = 0,\\
&c_{11} + 3\omega^2 c_{22} - \frac{2\omega}{r_0} c_{15} - c_{15}c_{25}\alpha_2^2 = 0,\\
&1 + 2c_{12} - \frac{4\omega}{r_0} c_{25} - c_{25}^2\alpha_2^2 = 0,\\
&1 - 4\omega^2 c_{34} - c_{34}^2\alpha_1^2 = 0,\\
&c_{33} - 2\omega^2 c_{44} - c_{34}c_{44}\alpha_1^2 = 0,\\
&1 + 2c_{34} - c_{44}^2\alpha_1^2 = 0,\\
&3\omega^2 c_{25} + 2\omega c_{12} r_0 - c_{15}c_{55}\alpha_2^2 = 0,\\
&c_{15} - \frac{2\omega}{r_0} c_{55} + 2\omega r_0 c_{22} - c_{25}c_{55}\alpha_2^2 = 0,\\
&1 + 4\omega c_{25} r_0 - c_{55}^2\alpha_2^2 = 0.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Из 4-го – 6-го уравнений системы (13) находим, что

$$
c_{33} = \frac{b}{\alpha_1^2}\sqrt{2b - 4\omega^2 + \alpha_1^2}, \quad c_{34} = \frac{b - 2\omega^2}{\alpha_1^2}, \quad c_{44} = \frac{1}{\alpha_1^2}\sqrt{2b - 4\omega^2 + \alpha_1^2}, \tag{14}
$$

где $b = \sqrt{4\omega^4 + \alpha_1^2}$.

Предполагая, что $r_0 = 7000$ км, и решая остальные уравнения системы (13) приближенным методом, будем иметь

$$
\begin{gathered}
c_{11} = 1.3167\,\alpha_2^{-0.205}, \qquad c_{12} = 0.4187\,\alpha_2^{-0.5991}, \qquad c_{15} = \alpha_2^{-1},\\
c_{22} = 0.4876\,\alpha_2^{-0.7669}, \qquad c_{25} = 1.315\,\alpha_2^{-1.205}, \qquad c_{55} = 6.4078\,\alpha_2^{-1.5991}.
\end{gathered}
\tag{15}
$$

Отметим, что квадратичная форма $V(x_1, ..., x_5,\ \alpha_1, \alpha_2)$ (12) будет положительно определена для найденных значений коэффициентов (14) и (15) при $\alpha_1 \in (0;1],\ \alpha_2 \in (0;1]$.

В качестве начального значения фазового состояния $\{x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_5^0\}$ принимаем следующие значения для фазовых координат $x_1^0 = 10^5,\ x_2^0 = x_3^0 = x_4^0 = x_5^0 = 0.01$.

Учитывая, что [3, 4]

$$
V(x_1^0, ..., x_5^0,\ \alpha_1, \alpha_2) = \min_{u_1, u_2} I[u_1(.), u_2(.)], \tag{16}
$$

подставляя (14), (15) в (12) и вычисляя минимум выражения $V(x_1^0, ..., x_5^0, \alpha_1, \alpha_2)$ по $\alpha_1 \in (0;1]$ и $\alpha_2 \in (0;1]$, получим, что (16) принимает минимальное значение при $\alpha_1^0 = 0,49835$ и $\alpha_2^0 = 1$.

Подставляя выражение построенной функции $V(x_1, ..., x_5, \alpha_1, \alpha_2)$ и оптимальные значения параметров α_1^0, α_2^0 в (5), будем иметь

$$u_1^0 = -0.999995\, x_3 - 2.23903 x_4, \qquad u_2^0 = -x_1 - 1.315\, x_2 - 6.4078 x_5.$$

Таким образом, получены выражения оптимальных управляющих воздействий стабилизирующей системы (9).

1. *Габриелян М.С., Барсегян В.Р.* О приоритете выбора управляющих воздействий // VIII междунар. сем. "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" памяти Е.С. Пятницкого: Тез. докл. – М.: ИПУ РАН, 2004. – С. 36–37.
2. *Барсегян В.Р.* Задача приоритетного оптимального управления движений и управляемости линейных систем // Докл. НАН Армении. – 2005. – **105**, N 3. – С. 235–240.
3. *Красовский Н.Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений // В кн.: Малкин Н.Г. Теория устойчивости движения. Доп. 4. – М.: Наука, 1966. – С. 475–514.
4. *Альбрехт Э.Г., Шелементьев Г.С.* Лекции по теории стабилизации. – Свердловск, 1972. – 274 с.
5. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. – Уч. пособ. для вузов. 3-е изд. – М.: Наука, 1987. – 304 с.

V.R. Barseghyan, S.G. Shahinyan, T.V. Barseghyan

The problem of optimal stabilization of linear dynamical systems on the priority optimal control

The problem of the optimal stabilization of linear dynamical systems for priority control is considers. The solution of the problem is constructed by means of Lyapunov's second method and realizing functional re-minimization. As an example the problem of stabilization for the priority of the perturbed optimal control is solved for the center of mass of an artificial earth satellite in a circular orbit.

Keywords: *optimal control, priority control, optimal stabilization, dynamical systems.*

В.Р. Барсегян, С.Г. Шагинян, Т.В. Барсегян

Задача оптимальної стабілізації лінійних динамічних систем за пріоритетним оптимальним керуванням

Розглядається задача оптимальної стабілізації лінійних динамічних систем за пріоритетним керуванням. Розв'язок задачі побудовано другим методом Ляпунова і проведенням повторної мінімізації функціонала. Як додаток розв'язано задачу стабілізації за пріоритетним оптимальним керуванням збуреного руху центра мас штучного супутника Землі по круговій орбіті.

Ключові слова: *оптимальне керування, пріоритетне керування, оптимальна стабілізація, динамічні системи.*

Ереванский гос. ун-т, Армения
Получено 10.07.11
barseghyan@sci.am; shahinyan@ysu.am