УДК 517.977, 531.38

©2008. **А.Л. Зуев, Т.Н. Чумаченко**

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛОКАЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ВОЗВРАТА

Рассмотрена задача конструктивной проверки управляемости нелинейных систем, линейное приближение которых не удовлетворяют критерию Калмана. Доказано утверждение о достаточных условиях управляемости. Предложено приближенное решение двухточечной задачи управления.

Введение. Свойство управляемости является ключевым в математической теории управления. Для линейных систем известно необходимое и достаточное условие управляемости – ранговый критерий Калмана. Существует ряд необходимых, а также достаточных условий управляемости для нелинейных систем в терминах свойств соответствующих алгебр Ли [1–3]. Однако, в общем случае конструктивная проверка управляемости нелинейных систем является сложной задачей, поскольку, в частности, не существует эффективной оценки числа итерированных скобок Ли при проверке соответствующего рангового условия. В данной статье использован иной метод исследования управляемости нелинейных систем – метод возврата [4, 5].

Пусть задана система управления

$$\dot{x} = f(x,u), \quad x \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subseteq \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

где x – фазовый вектор, u – управление; точка обозначает производную по времени t. Будем предполагать, что D – область, $0 \in D$, U – замкнутая область, $f \in C^1(D \times U)$.

Мы будем использовать следующее определение управляемости:

Определение. Система (1) называется *управляемой*, если для любых точек $x^{(0)}, x^{(1)} \in D$ найдутся $\tau > 0$, $u \in L_\infty([0,\tau] \to U)$, при которых система (1) имеет решение $x(t)$, $t \in [0,\tau]$, удовлетворяющее граничным условиям $x(0) = x^{(0)}$, $x(\tau) = x^{(1)}$.

Если в определении возможно выбрать управление для любых $x^{(0)}, x^{(1)}$ из некоторой ε-окрестности точки $x = 0$, то система (1) называется *локально управляемой* в точке $x = 0$.

Для линейных систем необходимым и достаточным условием управляемости является ранговый критерий Калмана. Этот результат позволяет установить управляемость по линейному приближению. Сформулируем известное утверждение о локальной управляемости.

Утверждение 1. [6] *Пусть* $0 \in \operatorname{int} U$, $f(0,0) = 0$,

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,u)=(0,0)}, \quad B = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x,u)=(0,0)}, \quad \operatorname{rank}(B, AB, ..., A^{n-1}B) = n.$$

Тогда система (1) локально управляема в окрестности точки $x = 0$.

Здесь и далее $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ обозначают матрицы Якоби отображения f.

Это утверждение описывает лишь достаточное условие управляемости, но не необходимое.

1. Основной результат. Докажем условие управляемости нелинейной системы (1), основанное на модификации метода возврата [4].

Теорема 1. *Для фиксированного $\tau > 0$ рассмотрим семейство управлений $u(t, a) \in U$, $0 \le t \le \tau$, зависящих от параметра $a = (a_1, ..., a_k) \in \mathbb{R}^k$. Предположим, что при каждом $a \in \mathbb{R}^k$ существует единственное $x(t, a)$ решение задачи Коши:*

$$\dot{x}(t, a) = f(x(t, a), u(t, a)), \quad x \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \quad t \in [0, \tau]; \tag{2}$$

$$x(0, a) = 0. \tag{3}$$

Пусть существует $a = a^*$, где $a^* \in R^k$, при котором соответствующее решение $x(t, a^*)$ удовлетворяет условию

$$x(\tau, a^*) = 0.$$

Тогда, если

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial x(\tau, a)}{\partial a}\right)\bigg|_{a=a^*} = n, \tag{4}$$

то система (1) *локально управляема в окрестности точки $x = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим ε-окрестность $B_\varepsilon = \{x : |x| < \varepsilon\}$ точки $x = 0$, где число ε подлежит определению. Для произвольной точки $x^{(1)} \in B_\varepsilon$ построим управление $u = u(t, a)$, при котором решение задачи (2), (3) удовлетворяет условию $x(\tau, a) = x^{(1)}$.

С этой целью определим

$$g(x^{(1)}, a) = x(\tau, a) - x^{(1)}.$$

По свойству решений дифференциальных уравнений (см. [7, с. 120]), функция $g(x^{(1)}, a)$ дифференцируема в окрестности точки $(0, a^*) \in \mathbb{R}^{n+k}$. Кроме того, по условию теоремы $x(\tau, a^*) = 0$, а значит $g(0, a^*) = 0$. Из условия (4) и теоремы о неявном отображении (см. [8]) следует, что соотношение $g(x^{(1)}, a) = 0$ задает отображение

$$x^{(1)} \in B_\varepsilon \mapsto a = a^{(1)}(x^{(1)}) \in \mathbb{R}^k$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. (Число ε определяется при доказательстве теоремы о неявном отображении). Таким образом, при использовании управления вида $u = u(t, a)$, $a = a^{(1)}(x^{(1)})$, решение задачи Коши (2), (3) удовлетворяет условию $x(\tau, a) = x^{(1)}$.

Из теоремы о неявном отображении следует также, что для всякого значения $x^{(0)} \in B_\varepsilon$ существует вектор параметров $a = a^{(0)}(x^{(0)}) \in \mathbb{R}^k$, при котором решение $x(t,a)$ задачи Коши (2) с начальными данными $x(0,a) = x^{(0)}$ удовлетворяет условию $x(\tau, a) = 0$.

Для произвольных точек $x^{(0)}, x^{(1)} \in B_\varepsilon$ построим функцию управления $u = \tilde{u}_{x^0 x^1}(t) \in U$ на отрезке $t \in [0, 2\tau]$ следующим образом:

$$\tilde{u}_{x^0 x^1}(t) = \begin{cases} u(t, a^{(0)}(x^{(0)})), & t \le \tau, \\ u(t-\tau, a^{(1)}(x^{(1)})), & t > \tau. \end{cases}$$

При таком управлении система (1) имеет решение $x(t)$, $t \in [0, 2\tau]$, удовлетворяющее краевым условиям $x(0) = x^{(0)}$, $x(2\tau) = x^{(1)}$. Теорема доказана.

Примеры. Приведем примеры нелинейных систем, для которых можно установить управляемость с помощью теоремы 1.

Пример 1.

$$\begin{cases} \dot{x_1} = u, \\ \dot{x_2} = \cos x_1, \\ \dot{x_3} = \sin x_1, \quad u \in [-1, +1]. \end{cases} \tag{5}$$

Система (5) является кинематической моделью движения тележки в случае управления угловой скоростью (см. [3]). Для $k \ge 1$, $j = 2, 3, ..., k$ и вектора $a = (a_1, ..., a_k)$, $\quad a_j \ge 0$, обозначим через S_j полуинтервал вида $S_j = \left[\sum_{i=1}^{j-1} a_i, \sum_{i=1}^{j} a_i\right)$, в случае $j = 1$ положим $S_1 = [0, a_1)$. Определим $u(t,a)$ следующим образом:

$$u(t,a) = \begin{cases} +1, \text{ если } & t \in \bigcup\limits_{r=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} S_{2r-1}; \\ -1, \text{ если } & t \in \bigcup\limits_{r=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} S_{2r}; \\ \ \ 0, \text{ если } & t \ge a_1 + a_2 + ... + a_k. \end{cases} \tag{6}$$

Положим $k = 4$ и рассмотрим управление $u = u(t,a)$ вида (6). Найдем соответствующее решение задачи Коши для системы (5) с начальными условиями $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$:

$$x_1(t) = \int_0^t u(s)ds = \begin{cases} t, \quad t \in S_1, \\ 2a_1 - t, \quad t \in S_2, \\ -2a_2 + t, \ \ t \in S_3, \\ 2(a_1 + a_3) - t, \ \ t \in \bar{S}_4; \end{cases}$$

$$x_2(t) = \int_0^t \cos x_1(s)ds = \begin{cases} \sin t, \ t \in S_1, \\ 2\sin a_1 - \sin(2a_1 - t), \ t \in S_2, \\ 2(\sin a_1 - \sin(a_1 - a_2)) - \sin(2a_2 - t), \ t \in S_3, \\ 2(\sin a_1 - \sin(a_1 - a_2) + \sin(a_1 - a_2 + a_3)) - \\ \qquad - \sin(2a_1 + 2a_3 - t), \ t \in \bar{S}_4; \end{cases}$$

$$x_3(t) = \int_0^t \sin x_1(s)ds = \begin{cases} 1-\cos t,\ t\in S_1, \\ 1-2\cos a_1+\cos(2a_1-t),\ t\in S_2, \\ 1-2(\cos a_1-\cos(2a_1-a_2))+\cos(2a_2-t),\ t\in S_3, \\ 1-2(\cos a_1-2\cos(a_1-a_2)+\cos(a_1-a_2+a_3))+ \\ \qquad +\cos(2a_1+2a_3-t), \quad t\in \bar{S}_4. \end{cases}$$

Для того, чтобы в момент времени $\tau = a_1+a_2+a_3+a_4$ решение обращалось в нуль, нам потребуется решить систему уравнений относительно a_1, a_2, a_3, a_4:

$$\begin{cases} x_1(\tau) = 0, \\ x_2(\tau) = 0, \\ x_3(\tau) = 0. \end{cases}$$

В развернутом виде эта система запишется следующим образом:

$$\begin{gathered} a_1+a_3-a_2-a_4=0, \\ 2\sin a_1 - 2(\sin(a_1-a_2)-\sin(a_1-a_2+a_3)) - \sin(a_1-a_2+a_3-a_4) = 0, \\ 1-2(\cos a_1 - \cos(a_1-a_2)+\cos(a_1-a_2+a_3)) + \cos(a_1-a_2+a_3-a_4) = 0. \end{gathered}$$

Данная система имеет семейство решений вида

$$\begin{cases} a_1 = a_1, \\ a_2 = a_1-\pi, \\ a_3 = a_1, \\ a_4 = a_1+\pi. \end{cases} \tag{7}$$

Ранг матрицы Якоби (4) при таких значениях параметров a_1, a_2, a_3, a_4 равен трем и, кроме того, все a_i положительны в случае $a_1 > \pi$. Следовательно, система (5) локально управляема в окрестности нуля.

Пример 2. Рассмотрим нелинейную систему управления, введенную в работе [10]:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = u, \\ \dot{x_2} = x_1^3, \\ \dot{x_3} = x_1x_2, \quad u\in[-1,+1]. \end{cases} \tag{8}$$

Положим $k=4$ и рассмотрим управление $u=u(t,a)$ вида (6).

Найдем соответствующее решение $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$ задачи Коши для системы (8) с $x_1(0)=x_2(0)=x_3(0)=0$ на отрезке $0\le t\le\tau$:

$$x_1(t) = \int_0^t u(s)ds = \begin{cases} t,\ t\in S_1, \\ 2a_1-t,\ t\in S_2, \\ -2a_2+t,\ t\in S_3, \\ 2(a_1+a_3)-t,\ t\in \bar{S}_4; \end{cases} \tag{9}$$

$$x_2(t) = \int_0^t x_1^3(s)ds =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{t^4}{4},\ t \in S_1, \\ \dfrac{1}{2}\left(a_1^4 - \dfrac{1}{2}(2a_1 - t)^4\right),\ t \in S_2, \\ \dfrac{1}{2}\left(a_1^4 - (a_1 - a_2)^4 + \dfrac{1}{2}(2a_2 - t)^4\right),\ t \in S_3, \\ \dfrac{1}{2}\left(a_1^4 - (a_1 - a_2)^4 - (a_1 - a_2 + a_3)^4 - \dfrac{1}{2}(2a_1 + 2a_3 - t)^4\right), \quad t \in \bar{S}_4. \end{cases} \tag{10}$$

Функция $x_3(t)$ определяется в виде интеграла

$$x_3(t) = \int_0^t x_1(s)x_2(s)ds.$$

Вычислим этот интеграл последовательно при $t \in S_1,\ S_2,\ S_3,\ \bar{S}_4$:

1) $t \in S_1$: $\qquad x_3(t) = \dfrac{t^6}{24}$;

2) $t \in S_2$: $\qquad x_3(t) =$

$$= \frac{t}{24}\Big(t^5 - 12a_1t^4 + 60a_1^2t^3 - 160a_1^3t^2 + 234a_1^4t - 168a_1^5\Big) + 46a_1^6;$$

3) $t \in S_3$: $\qquad x_3(t) =$ (11)

$$= \frac{1}{24}t^6 - \frac{1}{2}a_2t^5 + \frac{5}{2}a_2^2t^4 - \frac{20}{3}a_2^3t^3 - \frac{a_2^2}{4}(6a_1^2 - 39a_2^2)t^2 - (4a_1^3a_2 - a_1a_2^2 - 6a_1^2a_2^2+$$
$$+4a_1a_2^3 - a_1^3 + 7a_2^4)a_2t + \frac{a_2}{12}\left(23a_2^5 - 6a_1^5 + 39a_1^4a_2 - 12a_1^3a_2^2 - 27a_1^2a_2^3 + 30a_1a_2^4\right);$$

4) $t \in \bar{S}_4$: $\qquad x_3(t) =$

$$= \frac{1}{24}t^6 - (a_1 + a_3)\frac{t^5}{2} + (5a_1^2 + 5a_3^2 + 10a_1a_3)\frac{t^4}{2} - (20a_1^3 + 20a_3^3 + 60a_1a_3^2+$$
$$+60a_1^2a_3)\frac{t^3}{3} + (39a_1^4 + 12a_1^2a_2a_3 + 39a_3^4 + 4a_2^3a_3 + 156a_1^3a_3 + 234a_1^2a_3^2 + 156a_1a_3^3-$$
$$-6a_2^2a_3^2 + 12a_1a_2a_3^2 - 12a_1a_2^2a_3)\frac{t^2}{4} + (6a_2^2a_3^3 - 35a_1^4a_3 - 4a_1a_2^3a_3 + 12a_1^2a_2^2a_3-$$
$$-12a_1^3a_2a_3 + 18a_1a_2^2a_3^2 - 16a_1a_2a_3^3 - 7a_3^5 - 70a_1^3a_3^2 - 70a_1^2a_3^3 - 35a_1a_3^4 - 4a_2a_3^4-$$

$$-4a_2^3a_3^2 - 24a_1^2a_2a_3^2)t + \frac{23}{12}a_1^6 - 7a_1^5 - 9a_1a_2^2a_3^3 - a_2^3a_3^3 + \frac{5}{2}a_2a_3^5 - \frac{9}{4}a_2^2a_3^4 + \frac{23}{2}a_1a_3^5+$$

$$+\frac{23}{2}a_1^5a_3 + \frac{115}{4}a_1^4a_3^2 + \frac{115}{3}a_1^3a_3^3 + \frac{115}{4}a_1^2a_3^4 - \frac{1}{2}a_2^5a_3 + \frac{13}{4}a_2^4a_3^2 + \frac{23}{12}a_3^6 + a_2^3a_3^2-$$

$$-a_1^2a_2^3a_3 + \frac{17}{2}a_1^4a_2a_3 - 7a_1^3a_2^2a_3 + 23a_1^3a_2a_3^2 + 25a_1^2a_2a_3^3 - \frac{21}{2}a_1^2a_2^2a_3^2 + \frac{5}{2}a_1a_2^4a_3+$$

$$+\frac{25}{2}a_1a_2a_3^4 - 4a_1a_2^3a_3^2.$$

Найдем значения параметров a_i, при которых рассматриваемое решение дифференциального уравнения (8) удовлетворяет краевым условиям

$$x_1(\tau) = x_2(\tau) = x_3(\tau) = 0, \qquad \tau = a_1 + a_2 + a_3 + a_4.$$

В результате получим, что параметры a_i должны удовлетворять какому-либо из приведенных ниже соотношений:

$$a_1 = \frac{a_2}{2}, \quad a_3 = \frac{a_2}{2}, \quad a_4 = 0; \tag{A1}$$

$$a_1 = 0, \quad a_2 = a_4, \quad a_3 = 2a_4; \tag{A2}$$

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -a_4, \quad a_3 = 0; \tag{A3}$$

$$a_1 = -a_4, \quad a_2 = (\sqrt[4]{2} - 1)a_4, \quad a_3 = (\sqrt[4]{2} + 1)a_4; \tag{A4}$$

$$a_1 = a_4, \quad a_2 = (\sqrt[4]{2} + 1)a_4, \quad a_3 = (\sqrt[4]{2} - 1)a_4; \tag{A5}$$

$$a_1 = -a_3, \quad a_2 = 0, \quad a_4 = 0. \tag{A6}$$

Соответствующая матрица Якоби (4) имеет полный ранг только для решения (A5), при этом все компоненты a_i положительны в случае $a_4 > 0$. Следовательно, согласно теореме 1, система (8) локально управляема в окрестности нуля.

2. Решение двухточечной задачи управления. Рассмотрим двухточечную задачу управления, которая состоит в том, что для заданных $x^0 \in \mathbb{R}^3$ и $y \in \mathbb{R}^3$ требуется найти такую измеримую функцию $u : [0, \tau] \to \{-1, +1\}$, $\tau > 0$, при которой система (8) имеет решение

$$x(t), t \in [0, \tau] : x(0) = x^0, \quad x(\tau) = y.$$

Положим $x^0 = (0,0,0)^T$, $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ и воспользуемся управлением вида (6) для решения поставленной задачи. Тогда построение искомого управления сводится к решению системы алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = y_1, \\ x_2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = y_2, \\ x_3(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = y_3, \end{cases} \tag{12}$$

где функции $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ определены формулами (9) – ().

Зафиксируем $a_4 > 0$ и обозначим $g_i(a_1, a_2, a_3) = x_i(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - y_i$, $(i = 1, 2, 3)$, тогда система (10) примет вид

$$\begin{cases} g_1(a_1, a_2, a_3) = 0, \\ g_2(a_1, a_2, a_3) = 0, \\ g_3(a_1, a_2, a_3) = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Обозначим

$$z = (a_1, a_2, a_3)^T \in \mathbb{R}^3, \qquad G(z) = (g_1(z), g_2(z), g_3(z))^T$$

и запишем систему (13) в виде операторного уравнения

$$G(z) = 0, \tag{14}$$

где $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ – нелинейное отображение.

Применим метод Ньютона для решения нелинейного уравнения (14) следующим образом [9]. Выберем начальное приближение $z^0 = (a_1^*, a_2^*, a_3^*)^T$. Выпишем разложение функций $g_i(a_1, a_2, a_3)$ по формуле Тейлора в точке z^0:

$$g_i(a_1, a_2, a_3) = g_i(a_1^*, a_2^*, a_3^*) +$$
$$+ (a_1 - a_1^*)\frac{\partial g_i(z^0)}{\partial a_1^*} + (a_2 - a_2^*)\frac{\partial g_i(z^0)}{\partial a_2^*} + (a_3 - a_3^*)\frac{\partial g_i(z^0)}{\partial a_3^*} + o(\|z - z^k\|)$$

и отбросим величины порядка малости $o(\|z - z^0\|)$. Тогда система (13) заменится приближенной системой линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{3} (z_j - z_j^0)\frac{\partial g_i(z^0)}{\partial z_j} + g_i(z^0) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{15}$$

Решение z системы (15) примем за следующее приближение. Таким образом, итерационный метод Ньютона для (13) определяется системой уравнений

$$\sum_{j=1}^{3} (z_j^{k+1} - z_j^k)\frac{\partial g_i(z^k)}{\partial z_j} + g_i(z^k) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \tag{16}$$

из которой последовательно, начиная с заданного $z^0 = (a_1^*, a_2^*, a_3^*)^T$, находятся векторы $z^k,\ k = 1, 2, \dots$.

Систему (16) можно записать в векторном виде

$$G'(z^k)(z^{k+1} - z^k) + G(z^k) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \tag{17}$$

z^0 задан, а $G'(z)$ определяется формулой:

$$G'(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1(z)}{\partial z_1} & \dfrac{\partial g_1(z)}{\partial z_2} & \dfrac{\partial g_1(z)}{\partial z_3} \\[2ex] \dfrac{\partial g_2(z)}{\partial z_1} & \dfrac{\partial g_2(z)}{\partial z_2} & \dfrac{\partial g_2(z)}{\partial z_3} \\[2ex] \dfrac{\partial g_3(z)}{\partial z_1} & \dfrac{\partial g_3(z)}{\partial z_2} & \dfrac{\partial g_3(z)}{\partial z_3} \end{bmatrix}.$$

Для численной реализации метода Ньютона необходимо существование матриц $(G'(z^k))^{-1}$, обратных к $G'(z^k)$.

Для примера рассмотрим двухточечную задачу для системы (8) с краевыми условиями $x(0) = 0, x(\tau) = y$, где $y = (1, 0, 0)^T$. Выберем в качестве начальных приближений параметров (a_1, a_2, a_3, a_4) их значения из соотношения (A5) с $a_4 = 1$. Первые десять итераций метода Ньютона дают приближение

$$\begin{cases} a_1 = 1.912342, \\ a_2 = 4.230414, \\ a_3 = 4.318072. \end{cases}$$

Соответствующее решение задачи Коши для системы (8) с $x(0) = 0$ имеет следующие координаты в момент времени $\tau = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$:

$$x_1(\tau) = 1, \qquad x_2(\tau) = 0.1 \cdot 10^{-17} \approx 0, \qquad x_3(\tau) = -0.217 \cdot 10^{-15} \approx 0.$$

Заключение. Рассмотренные примеры показывают, что теорема 1 позволяет проводить конструктивную проверку условий локальной управляемости нелинейных систем, а соответствующее семейство функций $u(t, a)$ решает двухточечную задачу управления. Отметим, что класс управлений с переключениями в примере 1 для системы (5) соответствует классу оптимальных по быстродействию управлений для модели Дубинса [3], следовательно, решение соответствующей системы алгебраических уравнений в окрестности частного решения (7) может быть использовано для параметризации экстремальных траекторий. Представляет дальнейший интерес исследования условий сходимости метода Ньютона в зависимости от параметров нелинейной управляемой системы.

1. *Sussmann H.J.* A general theorem on local controllability // SIAM on Control and Optimization. – 1987. – **25**. – P. 158–194.

2. *Sontag E.D.* Kalman's controllability rank condition: from linear to nonlinear // in: Mathematical system theory. – Berlin: Springer, 1991. – P. 453–462.
3. *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. - М.: Физматлит, 2004. – 392 с.
4. *Coron J.-M.* Return method: some applications to flow control // in: Mathematical control theory /Ed. Agrachev A. – Trieste: The Abdus Salam ICTP, 2002. – P. 655–704.
5. *Sontag E.D.* Universal nonsingular controls //Systems and Control Letters. – 1992. – **19**. – P. 221–224.
6. *Ли Э.Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. – М.: Наука, 1972. – 574 с.
7. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970.– 720 с.
8. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. – М.: Высшая школа, 1981. – Т. 2. – 584 с.
9. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
10. *Kawski M.* Combinatorics of nonlinear controllability and noncommuting flows // in: Mathematical control theory / Ed. Agrachev A. – Trieste: The Abdus Salam ICTP, 2002. – P. 223–312.

Ин–т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
al_zv@mail.ru
Получено 07.11.07