

УДК 531.38, 531.36

©2011. Ю.Б. Коносеви́ч

ПРЕДЕЛЬНОЕ ОТКЛОНЕНИЕ ОСИ РОТОРА УРАВНОВЕШЕННОГО СИНХРОННОГО ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ

Изучается влияние начальных возмущений на равномерные вращения уравновешенного гироскопа в кардановом подвесе, установленного на неподвижном основании и снабженного синхронным электродвигателем. Показано, что при всех значениях угла поворота внутренней рамки, за исключением его четырех особых значений, под влиянием малых начальных возмущений ось ротора получает конечное отклонение за бесконечное время. Найдены в явном виде формулы, позволяющие вычислить предельные приращения кардановых углов.

Ключевые слова: гироскоп в кардановом подвесе, начальные возмущения, синхронный электродвигатель, статически уравновешенная система, предельное отклонение.

Введение. В первых теоретических исследованиях динамики гироскопа в кардановом подвесе предполагалось, что трение на осях подвеса и ротора отсутствует. При более точной постановке задачи учитывают, что быстровращающийся ротор испытывает значительное воздействие сил трения, и для поддержания вращения ротора прибор снабжают электродвигателем. Его стартором служит внутренняя “рамка” подвеса, а ротором – ротор прибора.

В статье [1], включенной в книгу [2], показано, что при наличии *асинхронного* двигателя малое возмущение начальной угловой скорости наружной рамки не вызывает систематического ухода, а приводит лишь к конечному отклонению оси ротора за бесконечное время. Для случая, когда в невозмущенном равномерном вращении ось ротора близка к перпендикуляру к наружной оси подвеса, в [1, 2] получена приближенная формула для предельного отклонения оси ротора. Этот результат распространен в [3] на случай обобщенной механической модели гироскопа в кардановом подвесе при учете всех начальных возмущений.

При исследовании динамики гироскопа в кардановом подвесе, снабженном *синхронным* двигателем, часто предполагают, что момент диссипативных сил относительно оси ротора постоянен. В этом частном случае начальные возмущения приводят к систематическому уходу [2, 4, 5].

В настоящей работе показано, что в общем случае под воздействием начальных возмущений ось ротора синхронного гироскопа за бесконечное время получает конечные отклонения по обоим кардановым углам. Для предельного отклонения по углу поворота внутренней рамки найдено точное выражение. Для предельного отклонения по углу поворота наружной рамки получены формулы, позволяющие вычислить это отклонение с погрешностью порядка куба начальных возмущений. В качестве примера для некоторых конкретных значений параметров и начальных возмущений по этим формулам построены графики зависимости предельного отклонения от значения угла поворота внутренней рамки в невозмущенном движении.

1. Исходные соотношения. Рассматривается задача о движении обобщенной модели [6] гироскопа в кардановом подвесе, установленного на неподвижном основании. Положение этой механической системы в каждый момент времени t определяют углы α , β , φ поворота наружной и внутренней “рамок” и ротора. Внутренняя “рамка” и ротор образуют синхронный электродвигатель, трение на осях подвеса отсутствует.

Пусть ротор динамически симметричен относительно оси его вращения во внутренней “рамке” а вся рассматриваемая система тел статически уравновешена. Тогда потенциальная энергия системы постоянна, а ее кинетическая энергия равна [6]

$$T = \frac{1}{2} \left[G(\beta)\dot{\alpha}^2 + H\dot{\beta}^2 + C\dot{\varphi}^2 + 2N(\beta)\dot{\alpha}\dot{\beta} + 2Q(\beta)\dot{\alpha}\dot{\varphi} + 2R\dot{\beta}\dot{\varphi} \right]. \quad (1)$$

Здесь C – осевой момент инерции ротора, функции $G(\beta)$, $N(\beta)$, $Q(\beta)$ являются тригонометрическими полиномами угла β . В частности,

$$Q(\beta) = q_0 + q_1 \sin \beta, \quad (2)$$

причем $q_1 \neq 0$, так как $q_1 = C \sin \theta_2 \sin \theta_3$, а синусы углов θ_2 , θ_3 , которые внутренняя карданова ось образует с наружной кардановой осью и осью ротора, предполагаются отличными от нуля.

Так как кинетическая энергия (1) – положительно определенная квадратичная форма скоростей $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\varphi}$, то, согласно критерию Сильвестра, имеем

$$J(\beta) > 0, \quad J_1(\beta) = G(\beta)H - N^2(\beta) > 0, \quad G(\beta) > 0 \quad (3)$$

при любом β . Здесь $J(\beta)$ – определитель квадратичной формы (1).

Алгебраическая сумма вращающего момента синхронного двигателя и момента диссипативных сил относительно оси ротора выражается в виде [2]

$$L = -\lambda_1\dot{\gamma} - \lambda_2\dot{\gamma}^2 + \lambda_3\dot{\gamma}^2 + \lambda_4\dot{\gamma}^2 + \dots \quad (\lambda_1, \lambda_2 > 0), \quad (4)$$

где $\gamma = \varphi - \omega t - \varphi^0$, $\dot{\gamma} = \dot{\varphi} - \omega$; $\omega > 0$ – угловая скорость вращения магнитного поля в статоре электродвигателя.

Лагранжесвы уравнения движения системы таковы

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\dot{\alpha}G(\beta) + \dot{\beta}N(\beta) + (\omega + \dot{\gamma})Q(\beta)] &= 0, \\ \frac{d}{dt} [\dot{\alpha}N(\beta) + \dot{\beta}H + (\omega + \dot{\gamma})R] - \dot{\alpha} \left[\frac{1}{2} \dot{\alpha}G'(\beta) + \dot{\beta}N'(\beta) + (\omega + \dot{\gamma})Q'(\beta) \right] &= 0, \quad (5) \\ \frac{d}{dt} [\dot{\alpha}Q(\beta) + \dot{\beta}R + (\omega + \dot{\gamma})C] &= L(\gamma, \dot{\gamma}); \end{aligned}$$

штрих означает дифференцирование по β . Их можно представить в виде нормальной системы дифференциальных уравнений пятого порядка с фазовым вектором $x = (\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma)$. Уравнения (5) имеют семейство решений

$$(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma) = (0, 0, 0, \beta^0, 0), \quad (6)$$

где β^0 – любое значение угла β . Эти решения описывают равномерные вращения ротора вокруг своей оси симметрии, неподвижной в пространстве. Из первого уравнения (5) следует интеграл

$$\dot{\alpha}G(\beta) + \dot{\beta}N(\beta) + (\omega + \dot{\gamma})Q(\beta) = p \quad (p = \text{const}). \quad (7)$$

Введем величину p в качестве новой переменной вместо $\dot{\alpha}$. Тогда получим из системы (5) преобразованную систему уравнений, которая эквивалентна нормальной системе с фазовым вектором $p, \dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma$. Первое уравнение этой системы имеет вид $\dot{p} = 0$, а два других при каждом фиксированном значении p образуют *приведенную* систему, которую обозначим через S_p . Она эквивалентна нормальной системе четвертого порядка с фазовым вектором $y = (\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma)$. Решению (6) лагранжевой системы (5) соответствует решение

$$(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma) = (0, 0, \beta^0, 0) \quad (8)$$

приведенной системы S_{p^0} , где $p^0 = \omega Q(\beta^0)$.

В случае равномерного вращения уравновешенного синхронного гироскопа выведенное в [7] характеристическое уравнение системы S_{p^0} имеет вид

$$J\sigma^4 + \lambda_2 J_1 \sigma^3 + (\lambda_1 J_1 + \omega^2 C Q'^2) \sigma^2 + \lambda_2 \omega^2 Q'^2 \sigma + \lambda_1 \omega^2 Q'^2 = 0, \quad (9)$$

где функции J, J_1, Q' угла β вычислены при $\beta = \beta^0$. Так как все рассматриваемые функции угла β являются 2π -периодическими, то без уменьшения общности полагаем, что $\beta^0 \in [-\pi/2, 3\pi/2)$. Тогда критерий Рауса–Гурвица приводит к двум условиям, которые будем предполагать выполненными:

$$\beta^0 \neq \pm\pi/2, \quad (10)$$

$$\beta^0 \neq 0, \pi \quad \text{либо} \quad \theta_3 \neq \pm\pi/2. \quad (11)$$

2. Качественный характер возмущенного движения. Из (7) вытекает, что для режима равномерного вращения (6) постоянные β^0, p^0 связаны соотношением $p^0 = \omega Q(\beta^0)$. И наоборот, если для пары значений $p = p^0, \beta = \beta^0$ выполнено равенство

$$p = \omega Q(\beta), \quad (12)$$

то стационарному решению (8) системы S_{p^0} соответствует стационарное решение системы (5), на котором, согласно (7), $\dot{\alpha} = 0$. Таким образом, равенство (12) является условием того, что приведенная система S_p имеет решение, описывающее равномерное вращение ротора при данном значении β .

С учетом выражения (2) для $Q(\beta)$ формула (12) определяет синусоидальную кривую. В точках $\beta = \pm\pi/2$ промежутка $[-\pi/2, 3\pi/2)$ функция (12) принимает свое минимальное и максимальное значения $p_1 = \omega(q_0 - q_1), p_2 = \omega(q_0 + q_1)$. Поэтому для значений $p \in [p_1, p_2]$ определена функция, обратная к (12). Она является двузначной при $p \neq p_1, p_2$. При условии (10) невозмущенное значение β^0 угла β лежит в интервале $I_0 = (-\pi/2, \pi/2)$ или

$I_1 = (\pi/2, 3\pi/2)$. Пусть $n = 0$ или $n = 1$ – номер этого интервала. В открытом прямоугольнике $\{(\beta, p) : \beta \in I_n, p \in (p_1, p_2)\}$ равенство (12) определяет однозначную непрерывную функцию $\beta = \beta^*(p)$ такую, что $\beta^0 = \beta^*(p^0)$:

$$\beta^*(p) = (-1)^n \arcsin \frac{p - \omega q_0}{\omega q_1} + \pi n. \quad (13)$$

Таким образом, любому $p \in (p_1, p_2)$ соответствует стационарное решение

$$(\dot{\beta}, \dot{\gamma}, \beta, \gamma) = (0, 0, \beta^*(p), 0) \quad (14)$$

приведенной системы S_p , которое описывает равномерное вращение ротора.

Рассмотрим теперь решение

$$x(t) = (\dot{\alpha}(t), \dot{\beta}(t), \dot{\gamma}(t), \beta(t), \gamma(t)) \quad (15)$$

лагранжевых уравнений (5), возмущенное по отношению к режиму (6) равномерного вращения ротора. Оно определяется начальными условиями

$$(\dot{\alpha}(0), \dot{\beta}(0), \dot{\gamma}(0), \beta(0), \gamma(0)) = (\dot{\alpha}_0, \dot{\beta}_0, \dot{\gamma}_0, \beta_0, \gamma_0), \quad (16)$$

причем начальные возмущения $\dot{\alpha}_0, \dot{\beta}_0, \dot{\gamma}_0, \beta_0 - \beta^0, \gamma_0$ предполагаются малыми. Решению (15) соответствует решение

$$y(t) = (\dot{\beta}(t), \dot{\gamma}(t), \beta(t), \gamma(t)) \quad (17)$$

приведенной системы S_p при начальных условиях

$$(\dot{\beta}(0), \dot{\gamma}(0), \beta(0), \gamma(0)) = (\dot{\beta}_0, \dot{\gamma}_0, \beta_0, \gamma_0) \quad (18)$$

и значении постоянной интеграла (7), равном

$$p = \dot{\alpha}_0 G(\beta_0) + \dot{\beta}_0 N(\beta_0) + (\omega + \dot{\gamma}_0) Q(\beta_0). \quad (19)$$

Вследствие непрерывной зависимости величины p от начальных данных, при малых начальных возмущениях это значение p близко к p^0 , а поскольку $p^0 \in (p_1, p_2)$, то $p \in (p_1, p_2)$. В таком случае формула (13) определяет значение $\beta^*(p)$, которое близко к β^0 . Поэтому вместе с условиями (10), (11) выполняются условия Рауса–Гурвица для решения (14) системы S_p :

$$\beta^*(p) \neq \pm\pi/2, \quad (20)$$

$$\beta^*(p) \neq 0, \pi \quad \text{либо} \quad \theta_3 \neq \pm\pi/2. \quad (21)$$

Если возмущения $\dot{\alpha}_0, \dot{\beta}_0, \dot{\gamma}_0, \gamma_0$ равны нулю, то решение (15) описывает равномерное вращение ротора при $\beta = \beta_0$, в этом случае постоянная p равна $p_0 = \omega Q(\beta_0)$. В общем случае, когда хотя бы одно из указанных возмущений

отлично от нуля, решение (15) описывает нестационарное движение. Поскольку в последнем случае значение p близко p_0 , то, вследствие непрерывности функции $\beta^*(p)$, разность $\beta_0 - \beta^*(p)$ близка к нулю. Таким образом, все начальные данные (18) для решения (17) системы S_p близки к начальным данным для стационарного решения (14) этой системы. Поэтому решение (17) системы S_p , где p определено по формуле (19), можно рассматривать как возмущенное по отношению к стационарному решению (14) этой системы. Соответствующий вектор возмущений имеет вид

$$y_1 = (\dot{\beta}_1, \dot{\gamma}_1, \beta_1, \gamma_1), \quad (22)$$

$$\dot{\beta}_1 = \dot{\beta}, \quad \dot{\gamma}_1 = \dot{\gamma}, \quad \beta_1 = \beta - \beta^*(p), \quad \gamma_1 = \gamma. \quad (23)$$

С помощью обозначений (22), (23) система S_p записывается в форме

$$\dot{y}_1 = By_1 + G(y_1), \quad (24)$$

где B – постоянная матрица, а $G(y_1)$ – нелинейная вектор-функция, разложения компонент которой по степеням возмущений (23) начинаются с членов второго порядка. Для этой функции справедлива оценка

$$\|G(y_1)\| \leq G_0 \|y_1\|^2 \quad (G_0 = \text{const} > 0). \quad (25)$$

Здесь и далее норма вектора принимается равной максимальному из модулей его компонент. Чтобы определение нормы было корректным, предположим, что за единицу времени взята величина ω^{-1} . Тогда все компоненты векторов y_1, G – безразмерные величины.

Стационарному решению (14) системы S_p соответствует нулевое решение $y_1 = 0$ системы (24). Как было отмечено выше, при условиях (20), (21) матрица B гурвицева. Следовательно, нулевое решение системы (24) экспоненциально устойчиво. Поэтому существуют постоянные $K_{y_1}^0, \sigma_0 > 0$ такие, что при всех малых по норме начальных возмущениях

$$y_{10} = y_1(0) = (\dot{\beta}_0, \dot{\gamma}_0, \beta_0 - \beta^*(p), \gamma_0) \quad (26)$$

для решения $y_1(t)$ системы (24) справедлива оценка (см. [8, с. 213])

$$\|y_1(t)\| \leq \|y_{10}\| K_{y_1}^0 \exp(-\sigma_0 t) \quad (t \geq 0). \quad (27)$$

Отсюда с учетом определения (23) возмущения β_1 следует, что в возмущенном движении угол $\beta(t)$ при $t \rightarrow \infty$ с экспоненциальной скоростью стремится к значению $\beta^*(p)$, которое определяется по формуле (13).

Угол $\alpha(t)$ также экспоненциально стремится к конечному пределу при $t \rightarrow \infty$. Действительно, согласно (7), угловая скорость $\dot{\alpha}$ равна

$$\dot{\alpha} = \frac{p - \omega Q(\beta) - \dot{\beta}N(\beta) - \dot{\gamma}Q(\beta)}{G(\beta)}. \quad (28)$$

Из (27), (28) с учетом определения (22), (23) вектора y_1 вытекает оценка

$$|\dot{\alpha}(t)| \leq \|y_{10}\| K_{\dot{\alpha}}^0 \exp(-\sigma_0 t) \quad (t \geq 0, K_{\dot{\alpha}}^0 = \text{const} > 0). \quad (29)$$

Следовательно, существует предел $\alpha(t) \rightarrow \alpha_0 + \Delta\alpha \quad (t \rightarrow \infty)$, где $\alpha_0 = \alpha(0)$,

$$\Delta\alpha = \int_0^{\infty} \dot{\alpha}(t) dt. \quad (30)$$

Полагая

$$u_0 = (\dot{\alpha}_0, \dot{\beta}_0, \dot{\gamma}_0, \gamma_0), \quad (31)$$

покажем, что

$$\|y_{10}\| \leq K \|u_0\| \quad (K = \text{const} > 0). \quad (32)$$

Для этого запишем сначала выражение (13) стационарного значения угла β , пользуясь вместо величины p величиной

$$\varepsilon = \frac{1}{\omega q_1} [\dot{\alpha}_0 G(\beta_0) + \dot{\beta}_0 N(\beta_0) + \dot{\gamma}_0 Q(\beta_0)]. \quad (33)$$

Согласно (19), (33), имеем $p = \omega Q(\beta_0) + \omega q_1 \varepsilon$. Поэтому, с учетом (2), формула (12) определяет следующую зависимость ε от β

$$\varepsilon = \sin \beta - \sin \beta_0. \quad (34)$$

Минимальное и максимальное значения $\varepsilon_1 = -1 - \sin \beta_0$, $\varepsilon_2 = 1 - \sin \beta_0$ функция (34) принимает при $\beta = \pm\pi/2$. Так как $\beta_0 \neq \pm\pi/2$, то $|\sin \beta_0| < 1$, и поэтому $\varepsilon_1 < 0$, $\varepsilon_2 > 0$. Отсюда следует, что в открытом прямоугольнике $\{(\beta, \varepsilon) : \beta \in I_n, \varepsilon \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\}$ равенство (34) однозначно определяет непрерывно дифференцируемую функцию $\beta = \beta_*(\varepsilon)$ такую, что $\beta_0 = \beta_*(0)$:

$$\beta_*(\varepsilon) = (-1)^n \arcsin(\sin \beta_0 + \varepsilon) + \pi n.$$

Здесь $n = 0$ при $\beta^0 \in I_0 = (-\pi/2, \pi/2)$, $n = 1$ при $\beta^0 \in I_1 = (\pi/2, 3\pi/2)$.

При удалении ε от средней точки $\varepsilon = -\sin \beta_0$ интервала $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ модуль производной $d\beta_*(\varepsilon)/d\varepsilon$ монотонно возрастает, стремясь к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_1, \varepsilon_2$. Учитывая, что $\beta_*(0) = \beta_0$, запишем формулу Тейлора–Маклорена

$$\beta_*(\varepsilon) = \beta_0 + \varepsilon d\beta_*(\varepsilon')/d\varepsilon \quad (\varepsilon' \in (0, \varepsilon)). \quad (35)$$

Рассмотрим малые начальные возмущения $\dot{\alpha}_0, \dot{\beta}_0, \dot{\gamma}_0$, а именно, такие, что $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 > 0$ – величина малая настолько, что отрезок $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ лежит в интервале $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Тогда из (33), (35) получаем

$$|\beta_0 - \beta_*(\varepsilon)| \leq K_{\beta_*} \max\{|\dot{\alpha}_0|, |\dot{\beta}_0|, |\dot{\gamma}_0|\} \quad (\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]).$$

Здесь

$$K_{\beta_*} = \frac{|G(\beta_0)| + |N(\beta_0)| + |Q(\beta_0)|}{\omega q_1} \max_{\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]} \left| \frac{d\beta_*(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right| \in (0, \infty).$$

Поэтому, согласно (26), имеем

$$\|y_{10}\| \leq \max\{|\dot{\beta}_0|, |\dot{\gamma}_0|, K_{\beta_*} \max(|\dot{\alpha}_0|, |\dot{\beta}_0|, |\dot{\gamma}_0|), |\gamma_0|\}.$$

Рассмотрев случаи $K_{\beta_*} > 1$ и $0 < K_{\beta_*} \leq 1$, выводим отсюда неравенство (32), в котором $K = \max\{K_{\beta_*}, 1\}$.

Это позволяет получить из неравенств (27), (29) две оценки

$$\|y_1(t)\| \leq \|u_0\| K_{y_1} \exp(-\sigma_0 t) \quad (t \geq 0), \quad (36)$$

$$|\dot{\alpha}(t)| \leq \|u_0\| K_{\dot{\alpha}} \exp(-\sigma_0 t) \quad (t \geq 0), \quad (37)$$

где $K_{y_1}, K_{\dot{\alpha}}, \sigma_0 > 0$ – постоянные, векторы y_1, u_0 определены в (22), (31). Обозначим через x_1 вектор возмущений для лагранжевой системы уравнений:

$$x_1 = (\dot{\alpha}_1, \dot{\beta}_1, \dot{\gamma}_1, \beta_1, \gamma_1), \quad (38)$$

$$\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}, \quad \dot{\beta}_1 = \dot{\beta}, \quad \dot{\gamma}_1 = \dot{\gamma}, \quad \beta_1 = \beta - \beta^*(p), \quad \gamma_1 = \gamma. \quad (39)$$

С помощью этого обозначения оценки (36), (37) объединяются в одну

$$\|x_1(t)\| \leq \|u_0\| K_{x_1} \exp(-\sigma_0 t) \quad (t \geq 0, K_{x_1} = \text{const} > 0). \quad (40)$$

3. Предельное отклонение оси ротора. Запишем второе из уравнений (5) в форме

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\dot{\alpha}N(\beta) + \dot{\beta}H + \dot{\gamma}R] = \\ = \omega \dot{\alpha}Q'_* + \dot{\alpha} \left[\frac{\dot{\alpha}}{2} G'(\beta) + \dot{\beta}N'(\beta) + \dot{\gamma}Q'(\beta) + \omega(Q'(\beta) - Q'_*) \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

Звездочкой отмечаем значения функций угла β при $\beta = \beta^*(p)$. Рассматривая уравнение (41) на решении (15) системы (5), проинтегрируем обе его части по t от 0 до ∞ . Существование таких интегралов следует из оценки (40). С учетом начальных условий (16) и определения (30) получаем

$$\Delta\alpha = -\frac{1}{\omega Q'_*} [\dot{\alpha}_0 N(\beta_0) + \dot{\beta}_0 H + \dot{\gamma}_0 R] - \frac{1}{\omega Q'_*} X, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} X = \int_0^\infty \dot{\alpha}(t) \left[\frac{1}{2} \dot{\alpha}(t) G'(\beta(t)) + \dot{\beta}(t) N'(\beta(t)) + \dot{\gamma}(t) Q'(\beta(t)) + \right. \\ \left. + \omega(Q'(\beta(t)) - Q'_*) \right] dt. \end{aligned} \quad (43)$$

Интеграл (43) определен на решении (15) лагранжевой системы (5), или на решении $x_1(t)$ соответствующей системы уравнений возмущенного движения $\dot{x}_1 = Ax_1 + F(x_1)$. Здесь A – постоянная матрица, а разложения компонент вектор-функции $F(x_1)$ по возмущениям (компонентам вектора x_1) начинаются с членов второго порядка. Согласно оценке (40), при малом по норме векторе начальных возмущений u_0 возмущенное решение $x_1(t)$ мало по норме при всех $t \geq 0$. Это позволяет предположить, что решение $x_1(t)$ с высокой точностью аппроксимируется решением $x_{1l}(t)$ линейной системы $\dot{x}_1 = Ax_1$ при заданных начальных условиях. Учитывая это, заменим под знаком интеграла (43) компоненты вектора $x_1(t)$ компонентами вектора $x_{1l}(t)$ и, с учетом их малости, удержим только ведущие члены второго порядка по возмущениям. В результате получим для интеграла (43) приближенную формулу

$$X_l = \int_0^{\infty} \dot{\alpha}_{1l}(t) \left[\frac{1}{2} \dot{\alpha}_{1l}(t) G'_* + \dot{\beta}_{1l}(t) N'_* + \dot{\gamma}_{1l}(t) Q'_* + \omega \beta_{1l}(t) Q''_* \right] dt. \quad (44)$$

Обоснованием этой формулы является малость ее погрешности (см. п. 4).

Интеграл (44) определен на решении $x_{1l}(t)$ системы $\dot{x}_1 = Ax_1$. Чтобы записать эту систему в подробном виде, подставим в уравнения (5) выражения фазовых переменных через возмущения, вытекающие из (38), (39):

$$\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_1, \quad \dot{\beta} = \dot{\beta}_1, \quad \dot{\gamma} = \dot{\gamma}_1, \quad \beta = \beta^* + \beta_1, \quad \gamma = \gamma_1, \quad (45)$$

а также выражение (4), и удержим только члены, линейные по возмущениям. Приходим к следующей линейной системе с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} G_* \ddot{\alpha}_1 + N_* \ddot{\beta}_1 + Q_* \ddot{\gamma}_1 + \omega Q'_* \dot{\beta}_1 &= 0, \\ N_* \ddot{\alpha}_1 + H \ddot{\beta}_1 + R \ddot{\gamma}_1 - \omega Q'_* \dot{\alpha}_1 &= 0, \\ Q_* \ddot{\alpha}_1 + R \ddot{\beta}_1 + C \ddot{\gamma}_1 + \lambda_2 \dot{\gamma}_1 + \lambda_1 \gamma_1 &= 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Система (46) не содержит переменной β_1 . Чтобы преобразовать ее к системе нормального вида с фазовым вектором $\dot{\alpha}_1, \dot{\beta}_1, \dot{\gamma}_1, \gamma_1$, следует разрешить уравнения (46) относительно производных по t от $\dot{\alpha}_1, \dot{\beta}_1, \dot{\gamma}_1$ и к полученным трем уравнениям присоединить уравнение $d\gamma_1/dt = \dot{\gamma}_1$. Согласно (16), (45), для переменных $\dot{\alpha}_1, \dot{\beta}_1, \dot{\gamma}_1, \gamma_1$ имеем начальные условия

$$\dot{\alpha}_1(0) = \dot{\alpha}_0, \quad \dot{\beta}_1(0) = \dot{\beta}_0, \quad \dot{\gamma}_1(0) = \dot{\gamma}_0, \quad \gamma_1(0) = \gamma_0. \quad (47)$$

При таком выборе переменных характеристическое уравнение системы (46) совпадает с характеристическим уравнением приведенной системы S_p , линеаризованной в окрестности ее стационарного решения (14). Рассмотрим случай, когда это характеристическое уравнение имеет две различные пары

σ_1, σ_2 и σ_3, σ_4 комплексно сопряженных корней с отрицательными действительными частями. Тогда решение системы (46) представляется в виде

$$\dot{\alpha}_{1l} = \sum_{j=1}^4 C_{1j} e^{\sigma_j t}, \quad \dot{\beta}_{1l} = \sum_{j=1}^4 C_{2j} e^{\sigma_j t}, \quad \dot{\gamma}_{1l} = \sum_{j=1}^4 C_{3j} e^{\sigma_j t}, \quad \gamma_{1l} = \sum_{j=1}^4 C_{4j} e^{\sigma_j t}, \quad (48)$$

где C_{kj} ($k, j = \overline{1, 4}$) – комплексные постоянные. Так как решение (48) действительно, то

$$C_{k2} = \overline{C_{k1}}, \quad C_{k4} = \overline{C_{k3}} \quad (k = \overline{1, 4}). \quad (49)$$

Как показано выше, $\beta_{1l}(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) при условиях (20), (21). Поэтому после того, как решение (48) найдено, функция β_{1l} определяется по формуле

$$\beta_{1l}(t) = - \int_t^{\infty} \dot{\beta}_{1l}(\tau) d\tau = \sum_{j=1}^4 \frac{C_{2j}}{\sigma_j} e^{\sigma_j t}. \quad (50)$$

Подставив выражения (48), (50) в формулу (44), с учетом (49) получаем

$$X_l = 2 \operatorname{Re} \sum_{j=1}^4 \left(\frac{C_{11}}{\sigma_1 + \sigma_j} + \frac{C_{13}}{\sigma_3 + \sigma_j} \right) E_j, \quad (51)$$

$$E_j = \frac{1}{2} G'_* C_{1j} + (N'_* + \frac{\omega Q''_*}{\sigma_j}) C_{2j} + Q'_* C_{3j} \quad (j = \overline{1, 4}). \quad (52)$$

4. Погрешность приближенной формулы для предельного отклонения. Найдем погрешность решения $x_{1l}(t)$ системы $\dot{x}_1 = Ax_1$. Последние четыре компоненты вектор-функций $x_1(t)$, $x_{1l}(t)$ образуют вектор-функции

$$y_1(t) = (\dot{\beta}_1(t), \dot{\gamma}_1(t), \beta_1(t), \gamma_1(t)), \quad y_{1l}(t) = (\dot{\beta}_{1l}(t), \dot{\gamma}_{1l}(t), \beta_{1l}(t), \gamma_{1l}(t)),$$

которые являются, соответственно, решениями квазилинейной системы (24) и линейной системы $\dot{y}_1 = By_1$ с одинаковыми начальными значениями y_{10} в момент $t = 0$. При подстановке данных решений в эти системы получаем равенства, которые с учетом начальных условий записываются в виде

$$y_1(t) = e^{Bt} y_{10} + \int_0^t e^{B(t-\tau)} G(y_1(\tau)) d\tau, \quad y_{1l}(t) = e^{Bt} y_{10}, \quad (53)$$

где e^{Bt} – фундаментальная матрица системы $\dot{y}_1 = By_1$. Вычитая второе равенство (53) из первого и переходя к нормам, имеем

$$\|y_1(t) - y_{1l}(t)\| \leq \int_0^t \|e^{B(t-\tau)}\| \|G(y_1(\tau))\| d\tau, \quad t \geq 0. \quad (54)$$

Так как матрица B гурвицева, то существуют постоянные $K_B, \sigma_0 > 0$ такие, что

$$\|e^{Bt}\| \leq K_B e^{-\sigma_0 t}, \quad t \geq 0. \quad (55)$$

Не уменьшая общности, число σ_0 можно выбрать тем же, что и в оценке (40).

Отметим, что из второго равенства (53) и (32) следует априорная оценка

$$\|y_{1l}(t)\| \leq \|u_0\| K_{y_{1l}} \exp(-\sigma_0 t) \quad (t \geq 0, K_{y_{1l}} = \text{const} > 0). \quad (56)$$

Воспользовавшись соотношениями (55), (36), (25), получаем из (54)

$$\|y_1(t) - y_{1l}(t)\| \leq \|u_0\|^2 K_{y_{1l}} \exp(-\sigma_0 t) \quad (t \geq 0, K_{y_{1l}} = K_B G_0 K_{y_1}^2 \sigma_0^{-1} > 0). \quad (57)$$

Чтобы вывести отсюда оценку погрешности для $\dot{\alpha}_{1l}(t)$, запишем формулу

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{p - \omega Q(\beta^* + \beta_1) - \dot{\beta}_1 N(\beta^* + \beta_1) - \dot{\gamma}_1 Q(\beta^* + \beta_1)}{G(\beta^* + \beta_1)}, \quad (58)$$

которая вытекает из (28), (39). Величина $\dot{\alpha}_{1l}(t)$ определяется выражением

$$\dot{\alpha}_{1l} = \frac{-\omega \beta_{1l} Q'_* - \dot{\beta}_{1l} N_* - \dot{\gamma}_{1l} Q_*}{G_*}, \quad (59)$$

представляющим главную линейную по возмущениям часть формулы (58). С помощью формулы Тейлора выводим из (58) равенство

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{1}{G_* + \tilde{G}'\beta_1} \left[-\omega Q'_* \beta_1 - \frac{1}{2} \omega \tilde{Q}'' \beta_1^2 - \dot{\beta}_1 (N_* + \tilde{N}'\beta_1) - \dot{\gamma}_1 (Q_* + \tilde{Q}'\beta_1) \right],$$

где знаком “тильда” отмечены значения производных в промежуточных точках отрезка $[\beta^*, \beta^* + \beta_1]$. Вычитая из него равенство (59) и пользуясь оценками (36), (56), (57), получаем

$$|\dot{\alpha}_1(t) - \dot{\alpha}_{1l}(t)| \leq \|u_0\|^2 K_{\dot{\alpha}_{1l}} \exp(-\sigma_0 t) \quad (t \geq 0, K_{\dot{\alpha}_{1l}} = \text{const} > 0). \quad (60)$$

Оценки (57), (60) можно объединить в одну:

$$\|x_1(t) - x_{1l}(t)\| \leq \|u_0\|^2 K_{x_{1l}} \exp(-\sigma_0 t) \quad (t \geq 0, K_{x_{1l}} = \text{const} > 0). \quad (61)$$

Определим теперь погрешность формулы (44). Под знаком интеграла (43) перейдем к возмущениям (39) и представим функции угла $\beta = \beta^* + \beta_1$ по формуле Тейлора. Отмечая знаком “тильда” значения производных в промежуточных точках отрезка $[\beta^*, \beta^* + \beta_1]$, имеем

$$X = \int_0^t \dot{\alpha}_1 \left[\frac{1}{2} \dot{\alpha}_1 (G'_* + \tilde{G}''\beta_1) + \dot{\beta}_1 (N'_* + \tilde{N}''\beta_1) + \dot{\gamma} (Q'_* + \tilde{Q}''\beta_1) + \right. \\ \left. + \omega (Q''_* \beta_1 + \frac{1}{2} \tilde{Q}''' \beta_1^2) \right] dt.$$

Чтобы оценить модуль разности $X - X_l$, преобразуем это выражение, выделяя в нем интеграл (44). В результате для разности $X - X_l$ получаем формулу

$$X - X_l = X^{(1)} + X^{(2)} + X^{(3)}, \quad (62)$$

где

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= \int_0^t \dot{\alpha}_1 \beta_1 \left[\frac{1}{2} \dot{\alpha}_1 \tilde{G}'' + \dot{\beta}_1 \tilde{N}'' + \dot{\gamma}_1 \tilde{Q}'' + \frac{1}{2} \omega \beta_1 \tilde{Q}''' \right] dt, \\ X^{(2)} &= \int_0^t (\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_{1l}) \left[\frac{1}{2} \dot{\alpha}_1 G_*' + \dot{\beta}_1 N_*' + \dot{\gamma}_1 Q_*' + \omega \beta_1 Q_*'' \right] dt, \\ X^{(3)} &= \int_0^t \dot{\alpha}_{1l} \left[\frac{1}{2} (\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_{1l}) G_*' + (\dot{\beta}_1 - \dot{\beta}_{1l}) N_*' + (\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_{1l}) Q_*' + \right. \\ &\quad \left. + \omega (\beta_1 - \beta_{1l}) Q_*'' \right] dt. \end{aligned}$$

Из соотношений (40), (56), (61) следует, что модули подынтегральных функций ограничены здесь экспоненциально убывающими функциями порядка $\|u_0\|^3$. Поэтому $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)} = O(\|u_0\|^3)$, и из (62) получаем искомую оценку погрешности формулы (44) для интеграла (43)

$$X - X_l = O(\|u_0\|^3). \quad (63)$$

В соответствии с (38)–(40) имеем $X = O(\|u_0\|^2)$. Поэтому из оценки (63) с учетом (31) следует, что при малых начальных возмущениях $\dot{\alpha}_0, \dot{\beta}_0, \dot{\gamma}_0, \gamma_0$ формула (44) позволяет с малой погрешностью вычислить интеграл (43), а вместе с ним и предельное отклонение (42).

5. Интегрирование линеаризованной лагранжевой системы уравнений. После подстановки выражений (48) в систему (46), дополненную уравнением $d\gamma_1/dt = \dot{\gamma}_1$, при каждом $j = \overline{1, 4}$ для постоянных C_{kj} ($k = \overline{1, 4}$) имеем линейную однородную систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} G_* C_{1j} + N_* C_{2j} + Q_* C_{3j} &= -\frac{\omega Q_*'}{\sigma_j} C_{2j}, \\ N_* C_{1j} + H_j C_{2j} + R C_{3j} &= \frac{\omega Q_*'}{\sigma_j} C_{1j}, \\ Q_* C_{1j} + R C_{2j} + C C_{3j} &= -\frac{\lambda_2}{\sigma_j} C_{3j} - \frac{\lambda_1}{\sigma_j} C_{4j}, \\ C_{4j} &= \frac{1}{\sigma_j} C_{3j} \quad (j = \overline{1, 4}). \end{aligned} \quad (64)$$

Кроме того, из (48), (47) вытекают четыре соотношения

$$\begin{aligned} C_{11} + C_{12} + C_{13} + C_{14} &= \dot{\alpha}_0, \\ C_{21} + C_{22} + C_{23} + C_{24} &= \dot{\beta}_0, \\ C_{31} + C_{32} + C_{33} + C_{34} &= \dot{\gamma}_0, \\ C_{41} + C_{42} + C_{43} + C_{44} &= \dot{\gamma}_0. \end{aligned} \tag{65}$$

При каждом $j = \overline{1, 4}$ определитель системы (64) равен нулю, так как он совпадает с левой частью характеристического уравнения, взятой при $\sigma = \sigma_j$.

Чтобы вывести достаточно простые и единообразные выражения постоянных C_{kj} ($k, j = \overline{1, 4}$) через начальные данные, воспользуемся следующим приемом. Рассматривая четыре соотношения (65) как одно равенство для векторов-столбцов, умножим обе его части слева на невырожденную вследствие (3) матрицу коэффициентов левой части системы (64). В полученных четырех соотношениях выделим левые части уравнений (64) и заменим их правыми частями этих уравнений. Применяем такую процедуру еще дважды.

В результате для каждого из векторов-столбцов $C_k = (C_{k1}, C_{k2}, C_{k3}, C_{k4})^T$ (T – знак транспонирования) получаем систему линейных уравнений

$$WC_k = V_k^T \quad (k = \overline{1, 4}). \tag{66}$$

Здесь V_k^T – k -й столбец матрицы V^T , получающейся транспонированием матрицы V . Первый столбец матрицы V равен $V_1 = (\dot{\alpha}_0, \dot{\beta}_0, \dot{\gamma}_0, \gamma_0)^T$, а остальные последовательно определяются по формуле $V_i = MV_{i-1}$ ($i = \overline{2, 4}$), где

$$M = \begin{pmatrix} \frac{N_*}{\omega Q'_*} & \frac{H}{\omega Q'_*} & \frac{R}{\omega Q'_*} & 0 \\ -\frac{G_*}{\omega Q'_*} & -\frac{N_*}{\omega Q'_*} & -\frac{Q_*}{\omega Q'_*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{Q_*}{\lambda_1} & -\frac{R}{\lambda_1} & -\frac{C}{\lambda_1} & -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \end{pmatrix}.$$

Через W в (66) обозначена матрица, у которой строка с номером $n = \overline{1, 4}$ имеет вид $(\sigma_1^{1-n}, \sigma_2^{1-n}, \sigma_3^{1-n}, \sigma_4^{1-n})$. Ее определителем является определитель Вандермонда, который отличен от нуля в рассматриваемом случае различных σ_j ($j = \overline{1, 4}$). Поэтому уравнения (66) однозначно определяют постоянные C_{kj} ($k, j = \overline{1, 4}$), а вместе с ними и решение (48), (50) системы (46).

6. Приближенные выражения корней характеристического уравнения. В формулы (30), (51), (52) для предельного отклонения синхронного гироскопа в кардановом подвесе входят корни характеристического уравнения приведенной системы S_p , линеаризованной в окрестности режима равномерного вращения при $\beta = \beta^*(p)$. Данное уравнение имеет вид (9), причем функции угла β , входящие в его коэффициенты, вычисляются при $\beta = \beta^*(p)$.

Так как $q_1 \neq 0$ в (2), то $Q'_* \neq 0$ в соответствии с (20). Это позволяет привести характеристическое уравнение к виду

$$x^4 + (k + 1)x^2 + (x^2 + 1)(\mu_2 x + \mu_1) = 0, \quad (67)$$

где неизвестная x и безразмерные параметры k, μ_1, μ_2 определены формулами

$$x = \sigma \sqrt{\frac{J_{1*}}{\omega^2 Q_*'^2}}, \quad k = \frac{J_{1*} C - J_*}{J_*}, \quad \mu_1 = \lambda_1 \frac{J_{1*}^2}{\omega^2 Q_*'^2 J_*}, \quad \mu_2 = \lambda_2 \frac{J_{1*}}{J_*} \sqrt{\frac{J_{1*}}{\omega^2 Q_*'^2}}. \quad (68)$$

В [9] показано, что $k > 0$ при условии (21). Поэтому с учетом (3) имеем $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0, k > 0$.

При большой угловой скорости ω вращения магнитного поля в статоре электродвигателя величина μ_2 мала, и выполнено неравенство $\mu_2^2 - 4\mu_1 \leq \leq 0$, достаточное для того, чтобы уравнение (67) имело две различные пары комплексно-сопряженных корней [9]. Пользуясь тем, что при $\mu_2 = 0$ уравнение (67) становится биквадратным, при малых μ_2 получаем приближенные выражения его корней в виде разложений по степеням μ_2 :

$$x_j = -\frac{\mu_2}{4} \left(1 \pm \frac{\mu_1 + k - 1}{\sqrt{D}} \right) \pm i \sqrt{\frac{\mu_1 + k + 1 \pm \sqrt{D}}{2}} + O(\mu_2^2) \quad (j = \overline{1, 4}). \quad (69)$$

Здесь $D = (\mu_1 + k + 1)^2 - 4\mu_1$, знак “плюс” перед \sqrt{D} соответствует паре $x_1 = \bar{x}_2$, а знак “минус” соответствует паре $x_3 = \bar{x}_4$. Записав определение \sqrt{D} в виде $D = (\mu_1 + k - 1)^2 + 4k$, заключаем, что $D > (\mu_1 + k - 1)^2 \geq 0$, поскольку $k > 0$. Поэтому $\sqrt{D} \pm (\mu_1 + k - 1) > 0$, и, следовательно, в формулах (69) члены, содержащие μ_2 , являются действительными отрицательными. Так как $\mu_1 > 0$, то из определения D вытекает неравенство $D < (\mu_1 + k + 1)^2$. Отсюда следует, что $\mu_1 + k + 1 \pm \sqrt{D} > 0$. Поэтому в формулах (69) члены с мнимой единицей являются ненулевыми чисто мнимыми.

7. Пример. Рассмотрим обычную модель уравновешенного гироскопа в кардановом подвесе. Следуя [1], выбираем для механических параметров такие числовые значения: $C = 5 \cdot 10^3 \text{ г} \cdot \text{см}^2$, $A = 3 \cdot 10^3 \text{ г} \cdot \text{см}^2$, $A_1 = 2 \cdot 10^3 \text{ г} \cdot \text{см}^2$, $B_1 = 2 \cdot 10^3 \text{ г} \cdot \text{см}^2$, $C_1 = 4 \cdot 10^3 \text{ г} \cdot \text{см}^2$, $C_2 = 3 \cdot 10^3 \text{ г} \cdot \text{см}^2$. Параметры, характеризующие синхронный электродвигатель, полагаем равными $\omega = 1500 \text{ с}^{-1}$, $\lambda_1 = 3,691406 \cdot 10^9 \text{ г} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{с}^{-2}$, $\lambda_2 = 4,018694 \cdot 10^4 \text{ г} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$. Здесь значения λ_1, λ_2 выбраны из условия, чтобы при $\beta^* = \pi/6$ параметры μ_1 и μ_2 (см. (68)) были равны 1 и 0,01.

Угол β^* входит в формулу для предельного отклонения по углу α только через интеграл (44), который является величиной второго порядка относительно начальных возмущений. А поскольку, согласно (26), (32), разность $\beta^* - \beta_0$ имеет первый порядок по возмущениям, то при расчетах без уменьшения точности можно использовать величину β_0 вместо β^* .

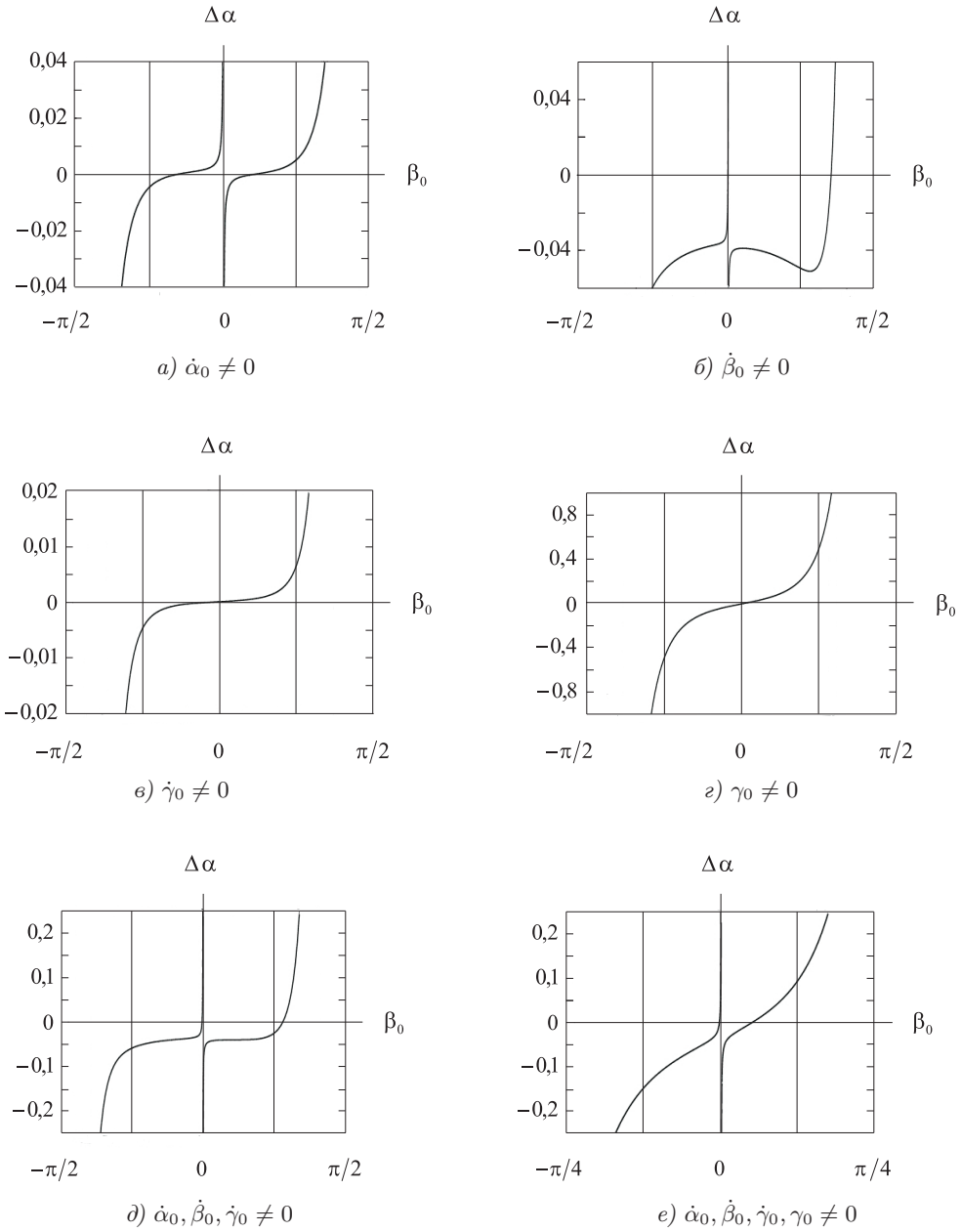


Рис. 1. Графики зависимости предельного отклонения $\Delta\alpha$ от угла β_0 .

Для выбранных значений параметров на рис. 1 показаны графики зависимости предельного отклонения $\Delta\alpha$ (в градусах) от угла β_0 при наличии одного из начальных возмущений $\dot{\alpha}_0, \dot{\beta}_0, \dot{\gamma}_0, \gamma_0$ (варианты *a-z*), а также при одновременном воздействии первых трех (вариант *d*) и всех возмущений (вариант *e*). В расчетах принято $\dot{\alpha}_0 = \dot{\beta}_0 = \dot{\gamma}_0 = 1 \text{ c}^{-1}$, $\gamma_0 = 1^\circ$.

1. Харламов С.А. О движении гироскопа в кардановом подвесе при наличии момента вокруг оси собственного вращения // Докл. АН СССР. – 1961. – **139**, № 2. – С. 83-86.
2. Климов Д.М., Харламов С.А. Динамика гироскопа в кардановом подвесе. – М.: Наука, 1978. – 208 с.
3. Коносевиц Б.И. О влиянии начальных возмущений на равномерные вращения асинхронного гироскопа в кардановом подвесе // Механика твердого тела. – 1985. – Вып. 17. – С. 54-61.
4. Харламов С.А. Нутационные колебания и уход синхронного гироскопа, установленного в кардановом подвесе // Докл. АН СССР. – 1962. – **146**, № 3. – С. 86-90.
5. Борзов В.И. Систематический уход гироскопа с синхронным двигателем // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – № 4. – С. 149-154.
6. Коносевиц Б.И. Скорость ухода оси ротора в обобщенной задаче о гироскопе в кардановом подвесе // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 82-92.
7. Коносевиц Ю.Б. Условия устойчивости стационарных режимов движения синхронного гироскопа в кардановом подвесе // Там же. – 2003. – Вып. 33. – С. 90-96.
8. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. 2-е изд. – М.: Наука, 1965. – 332 с.
9. Коносевиц Ю.Б. Исследование характеристического уравнения для стационарных движений синхронного гироскопа в кардановом подвесе // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2004. – **9**. – С. 112-121.

Yu.B. Konosevich

Limit deviation of the rotor axis of a balanced gimbal mounted synchronous gyroscope

Limit deviation under initial perturbations is found for a balanced gimbal mounted gyroscope, supplied with the synchronous electric motor.

Keywords: *gimbal mounted gyroscope, initial disturbances, synchronous electric motor, statically balanced system, limit deviation.*

Ю.Б. Коносевиц

Граничне відхилення осі ротора зрівноваженого синхронного гіроскопа в кардановому підвісі

Для зрівноваженого синхронного гіроскопа у кардановому підвісі знайдено граничне відхилення осі ротора при наявності початкових збурень.

Ключові слова: *гіроскоп у кардановому підвісі, початкові збурення, синхронний електро-двигун, статично зрівноважена система, граничне відхилення.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
konos@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 14.03.11