УДК 531.36

©2002. **С.Г. Шагинян**

ЗАДАЧА УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНО МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Рассматривается задача устойчивости систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, когда на систему на конечном интервале времени действуют интегрально малые возмущающие силы. Получены достаточные условия, при которых такие системы устойчивы по действующей силе.

Пусть имеем систему дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\dot{x} = F(x(t); x(t-\tau)), \tag{1}$$

где $x \in R^n; F : R^{2n} \to R^n$ – непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая всем условиям существования и единственности решений системы (1) [1, с. 31] в компактном множестве

$$M = \{x(\tau);\ \|x(\cdot)\|_h < \infty;\ \tau \in [0; h];\ h > 0\}$$

и $F(0,0) = 0$.

Норму вектор-функции $x(\tau)$ можно выбрать различными способами. Целесообразно здесь выбрать ее в виде

$$\|x(\cdot)\|_h = \left[\int_{-h}^{0} \sum_{i=1}^{n} x_i^2(\tau) d\tau\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

В работах [1-3] доказаны ряд теорем об устойчивости, неустойчивости, равномерной устойчивости, асимптотической устойчивости и равномерно асимптотической устойчивости тривиального решения системы вида (1), системы функционально-дифференциальных уравнений и т.п. В статье [4] доказаны теоремы об эквиасимптотической устойчивости по части переменных нулевого решения систем функционально-дифференциальных уравнений.

Докажем теорему, аналогичную теореме Барбашина-Красовского об асимптотической устойчивости в целом [5], которая существенно отличается от доказанных теорем.

Теорема 1. Если для системы (1) существует определенно-положительный функционал $V(x(\cdot))$, определенный в классе функции $x(\tau) \in M$, для которого

$$a) \lim_{\|x(\cdot)\|_h \to \infty} V(x(\cdot)) = \infty, \tag{3}$$

б) производная $\dfrac{dV(x_\psi(t-\tau))}{dt}$ [1, с. 141] вдоль интегральных кривых системы (1) неположительна, причем не существует ни одна целая полутраектория (кроме $x = 0$), вдоль которой $\dfrac{dV(x_\psi(t-\tau))}{dt} = 0$ (где $x_\psi(t-\tau)$ – решение системы (1), определяемое начальной вектор-функцией $\psi = \psi(t)$; $t_0 - h \le t < t_0$), то решение $x \equiv 0$ системы (1) асимптотически устойчиво в целом.

Доказательство. Так как для решения $x = 0$ системы (1) имеют место все условия теоремы об устойчивости [6], то это решение устойчиво. Пусть $x = x_\psi(t-\tau)$ такое решение системы (1), которое определяется некоторой начальной непрерывной при $t \in [t_0 - h; t]$ вектор-функцией $\psi = \psi(t)$. Обозначим через $K_\psi \subset M$ некоторый компакт, содержащий часть траектории $x_\psi(t_0-\tau)$; $x_\psi(t_0-\tau) \in k_\psi \subset M$, и пусть $A = \sup\limits_{x_\psi(\cdot)\in K_\psi} V(x_\psi(\cdot))$. Так как $V(x_\psi(\cdot))$ непрерывный функционал, а K_ψ – компактное множество, то $A < \infty$. Следовательно, согласно условию (3), существует число $H > 0$ такое, что $V(x(\cdot)) \le A$, при $\|x(\cdot)\|_h \le H$ и $\mathrm{K}_\psi \subset \{\|x(\cdot)\|_h \le H\}$.

При этих условиях для системы (1) имеет место теорема Красовского об асимптотической устойчивости [2, с. 181], то есть

$$\lim_{t\to\infty} \|x_\psi(\cdot)\|_h = 0.$$

Откуда и следует асимптотическая устойчивость в целом решения $x \equiv 0$ системы (1). □

Рассмотрим снова систему (1) и систему

$$\dot{x} = F(x(t); x(t-\tau)) + \varphi(t), \tag{4}$$

где $\varphi(t)$ удовлетворяет всем условиям, указанным в [7]:

$$\text{а)}\quad \left\|\int_{t_0}^{T} \varphi(t)dt\right\| = \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{t_0}^{T}\varphi_i(t)dt\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} < \infty,$$
$$\text{б)}\quad \varphi(t) \equiv 0, \quad \text{при} \quad t \ge T.$$

Здесь $T > t_0 + h$ – заданное число.

Определение 1. Решение $x \equiv 0$ системы (1) назовем устойчивым по действующей силе, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех решений $x_\psi(t-\tau)$ системы (4) $\|x_\psi(\cdot)\|_h < \varepsilon$ при $t \ge T + h$, если $\|\psi(\tau)\|_h < \delta$ и $\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\int_{t_0}^{T}\varphi_i(t)dt\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} < \delta$.

Определение 2. Решение $x \equiv 0$ системы (1) назовем асимптотически устойчивым по действующей силе, если для каждого решения $x_\psi(t-\tau)$ системы (4) удовлетворяется условие $\lim\limits_{t\to\infty} \|x_\psi(\,\cdot\,)\|_h$ при всех непрерывных начальных функциях $\psi(t)$ [1] и при

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{t_0}^{T}\varphi_i(t)dt\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} < \delta.$$

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и с запаздывающим аргументом

$$\dot{x} = Ax + Bx(t-\tau), \tag{5}$$

где A и B – $n \times n$ матрицы, а $x \in R^n$.

Предположим, что все корни характеристического уравнения

$$|A - \lambda E| = 0 \tag{6}$$

имеют отрицательные вещественные части.

Покажем, что в этом случае система (5) асимптотически устойчива по действующей силе. Действительно, при вышеуказанных условиях для системы

$$\dot{x} = Ax, \tag{7}$$

согласно теореме Ляпунова [8, с. 106], существует определенно-положительная квадратичная форма

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

такая, что

$$\left.\frac{dV}{dx}\right|_{(7)} = -\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Для системы (5) в качестве функционала Ляпунова выбираем

$$V\left(x(\cdot)\right) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \int_{-h}^{0} x_i^2(\tau) d\tau,$$

где $\varepsilon_i \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$ сколь угодно малые числа. Вычислим производную функционала $V\left(x(\cdot)\right)$ вдоль решений системы (5):

$$\begin{aligned} \left.\frac{dV\left(x(t-\tau)\right)}{dt}\right|_{(5)} &= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j(t) \left(a_{i1}x_1(t) + \cdots + a_{in}x_n(t)\right) + \\ &+ \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j(t) \left(b_{i1}x_1(t-\tau) + \cdots + b_{in}x_n(t-\tau)\right) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \left(x_i^2(t) - x_i^2(t-\tau)\right) = \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \left[(1-\varepsilon_i)x_i^2(t) - \sum_{j,l=1}^{n} \alpha_{ij} b_{jl} x_j(t) x_l(t-\tau) + x_i^2(t-\tau)\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Известно [2, с. 196], что если $\|B\|_0 = \beta > 0$ $(\|B\|_0 = \max\limits_{i} \sum\limits_{j} |b_{ij}|)$ достаточно малое число, то величины ε_i можно подобрать так, чтобы производная (8) была определенно-отрицательной (например, $\varepsilon_i = \frac{1}{2n}$, $i = 1, \ldots, n$). Следовательно, для системы (5) имеют место все условия теоремы 1, откуда следует, что система (5) асимптотически устойчива в целом. Следовательно, согласно определению 2, она асимптотически устойчива и по действующей силе.

Предположим теперь, что в системе (5) $B = \mu A$ (μ – достаточно малое число) и корни уравнения (6) удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\text{а)}\quad \lambda_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \quad \text{причем} \quad \mathrm{rank} A = n - k \quad (k \leq n); \\ &\text{б)}\quad Re\lambda_j < 0 \quad (j = k+1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{9}$$

Если корни уравнения (6) таковы, что существует хотя бы один корень с неотрицательной действительной частью, который не удовлетворяет условиям (9), то система (7) будет неустойчивой по действующей силе [9]. Следовательно, система (5) также будет неустойчивой по действующей силе.

Докажем следующую теорему.

Теорема 2. Если корни характеристического уравнения (6) системы (5) удовлетворяют условиям (9), то система (5) устойчива по действующей силе.

Доказательство. Известно, что если корни уравнения (6) удовлетворяют условиям (9), то существует такая матрица C $(\det C \neq 0)$, что [10, с. 141]

$$A_1 = CAC^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots\dots\dots\dots\dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots\dots\dots\dots\dots 0 \\ 0 & 0 \dots 0 & d_{k+1\,k+1} \dots\dots d_{k+1\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \dots 0 & d_{n\,k+1} \dots\dots\dots d_{n\,n} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $B_1 = CBC^{-1} = C\mu AC^{-1} = \mu CAC^{-1} = \mu A_1$.

С помощью линейного преобразования $y = Cx$, систему (5) приводим к следующему виду

$$\begin{aligned} &\dot{y}_i = 0, \\ &\dot{y}_j = d_{jk+1}y_{k+1} + \dots + d_{jn}y_n + \\ &+\mu(d_{jk+1}y_{k+1}(t-\tau) + \dots + d_{jn}y_n(t-\tau)), \quad j = k+1, \dots n. \end{aligned} \tag{10}$$

Выполняя аналогичное преобразование системы

$$\dot{x} = Ax + Bx(t-\tau) + \varphi(t),$$

получаем

$$\begin{aligned} &\dot{y}_i = \nu_i(t) \quad (i = 1, \dots, k), \\ &\dot{y}_j = d_{jk+1}y_{k+1}(t) + \dots + d_{jn}y_n(t) + \\ &+\mu(d_{jk+1}y_{k+1}(t-\tau) + \dots + d_{jn}y_n(t-\tau)) + \nu_j(t), \quad (j = k+1, \dots n), \end{aligned} \tag{11}$$

где $\nu(t) = C\varphi(t)$, и если $\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\int\limits_{t_0}^{T}\varphi_i(t)dt\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} < \delta$, то $\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\int\limits_{t_0}^{T}\nu_i(t)dt\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} < \|C\|_0 \cdot \delta = \delta_1$.

Значит $\left[\sum\limits_{i=1}^{k}\left(\int\limits_{t_0}^{T}\nu_i(t)dt\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} < \delta_1$ и $\left[\sum\limits_{i=k+1}^{n}\left(\int\limits_{t_0}^{T}\nu_i(t)dt\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} < \delta_1$.

Интегрируя систему (11) отдельно, находим

$$y_i(t-\tau) = y_i(t_0-\tau) + \int_{t_0}^{t}\nu_i(\xi)\,d\xi \qquad (i = 1, \dots, k)$$

и

$$y_i(t-\tau) = y_i(t_0-\tau) + \int_{t_0}^{T}\nu_i(t)\,dt \qquad \text{при} \qquad t \geq T+h,$$

где $y(t_0-\tau)$ – начальная функция. Следовательно,

$$\|\overline{y}(t-\tau)\|_{h,(k)} \leq \|\overline{y}(t_0-\tau)\|_{h,(k)} + \left[\sum_{i=1}^{k}\left(\int_{t_0}^{T}\nu_i(t)dt\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} < \delta+\delta_1 = \frac{\varepsilon}{2}, \tag{12}$$

если $\|\overline{y}(t_0-\tau)\|_{h,(k)} < \delta$.

Здесь $\overline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$, а через $\|y(\cdot)\|_{h,(m)}$ обозначена норма (2) в R^m.

Так как все корни характеристического уравнения системы

$$\dot{y}_j = d_{jk+1}y_{k+1} + \cdots + d_{jn}y_n \qquad (j = k+1,\ldots,n) \tag{13}$$

имеют отрицательные вещественные части, то, согласно теореме Ляпунова [8, с. 106-108], существует определенно-положительная форма $V_1 = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=k+1}^{n}\alpha_{ij}y_iy_j$ такая, что

$$\left.\frac{dV_1}{dt}\right|_{(13)} = -\sum_{i=k+1}^{n} y_i^2.$$

Для системы (10) в качестве функционала Ляпунова возьмем

$$V(\overline{\overline{y}}(\tau)) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=k+1}^{n}a_{ij}y_iy_j + \sum_{i=k+1}^{n}\varepsilon_i\int_{-h}^{0}y_i^2(\tau)\,d\tau,$$

где $\varepsilon \geq 0\,(i = k+1,\ldots,n)$ достаточно малые числа, а

$$\overline{\overline{y}}(\tau) = \begin{pmatrix} y_{k+1}(\tau) \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n(\tau) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что функционал $V(\overline{\overline{y}}(\cdot))$ определенно-положителен и

$$\lim_{\|\overline{\overline{y}}\|_{h,(n-k)}\to\infty} V(\overline{\overline{y}}(\cdot)) = \infty;$$

Вычислим производную функционала $V(\overline{\overline{y}}(\cdot))$ в силу системы (10)

$$\left.\frac{dV(\overline{\overline{y}}(t-\tau))}{dt}\right|_{(10)} = \sum_{i,j=k+1}^{n} \alpha_{ij} y_j(t)(d_{ik+1}y_{k+1}(t) + \cdots + d_{in}y_n(t)) +$$

$$+\mu \sum_{i,j=k+1}^{n} \alpha_{ij} y_j(t)(d_{ik+1}y_{k+1}(t-\tau) + \cdots + d_{in}y_n(t-\tau)) + \tag{14}$$

$$+ \sum_{i=k+1}^{n} \varepsilon_i (y_i^2(t) - y_i^2(t-\tau)) = - \sum_{i=k+1}^{n} y_i^2 + \mu \sum_{i,j=k+1}^{n} \alpha_{ij} y_j(t)(d_{ik+1}y_{k+1}(t-\tau) + \cdots$$

$$\cdots + d_{in}y_n(t-\tau) + \sum_{i=k+1}^{n} \varepsilon_i (y_i^2(t) - y_i^2(t-\tau)) = - \sum_{i=k+1}^{n} ((1-\varepsilon_i)(y_i^2(t) -$$

$$-\mu \sum_{i,j=k+1}^{n} \alpha_{ij} d_{jl} y_j(t) y_l(t-\tau) + y_i^2(t-\tau)).$$

Правые части системы (10) удовлетворяют условиям $|\mu| \cdot |d_{jk+1}y_{k+1} + \cdots + d_{jn}y_n| \leq$ $\leq \alpha \cdot \|\overline{\overline{y}}\|_{(n-k)}$, где $\alpha = |\mu| \cdot \max_{i,j=k+1,\ldots,n} |d_{ij}|$, $\|\overline{\overline{y}}\|_{(n-k)} = \left(\sum_{i=k+1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$. Тогда квадратичная форма (14) при малых μ будет определенно-отрицательной [2, с. 196]. То есть, согласно теореме 1, для решений системы (10) будет иметь место условие

$$\lim_{t\to\infty} \|\overline{\overline{y}}(t-\tau)\|_{h,(n-k)} = 0.$$

Следовательно, существует такой момент времени $t_* \geq T + h$, что

$$\|\overline{\overline{y}}(t-\tau)\|_{h,(n-k)} < \frac{\varepsilon}{2}; \quad \text{при} \quad t > t_* \tag{15}$$

Таким образом, согласно (12) и (15), для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ и момент времени $t_* \geq T$ такие, что $\|y(t-\tau)\|_h < \varepsilon$, когда $t > t_*$, при $\|y(t_0-\tau)\|_h < \delta$ и $\left\|\int\limits_{t_0}^{T} \varphi(t)dt\right\|_0 < \delta$. Теорема доказана. $\square$

Теперь предположим, что для системы (1) существует $k \times n$ постоянная матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$ такая, что $\mathrm{rank} A = k \leq n$ и

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} Fi(x(t); x(t-\tau)) \equiv 0 \qquad (i = 1, \ldots, k). \tag{16}$$

Покажем, что в этом случае существует невырожденная матрица C такая, что с помощью линейного преобразования $y = Cx$ систему (1) можно привести к виду

$$\dot{y}_i \;=\; 0, \quad (i = 1, \ldots, k), \tag{17}$$

$$\dot{y}_j \;=\; \Phi_j(c_1, \ldots, c_k, y_{k+1}(t), \ldots, y_n(t), y_{k+1}(t-\tau), \ldots, y_n(t-\tau)), \; (j = k+1, \ldots, n) \tag{18}$$

Пусть матрица C имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}\ldots\ldots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{k1}\ldots\ldots a_{kn} \\ b_{k+1\,1}\ldots b_{k+1\,n} \\ \vdots \\ b_{n1}\ldots\ldots b_{nn} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

причем $\det C = n$ (это всегда возможно, так как $\operatorname{rank} A = k$). Тогда после преобразования $y = C\,x$ система (1) примет вид

$$\dot{y}_i = \Phi_i\,(\,y_1(t), \ldots, y_n(t);\; y_1(t-\tau), \ldots, y_n(t-\tau)),\;\; (i = 1, \ldots, k). \tag{20}$$

Из (16) и (19) следует, что $0 = \Phi_i\,(\,y_1(t), \ldots, y_n(t);\; y_1(t-\tau), \ldots, y_n(t-\tau))$ $(i = 1, \ldots, k)$ для любых $y_1(t), \ldots, y_n(t)$, $y_1(t-\tau), \ldots, y_n(t-\tau)$. Следовательно, $\Phi_i\,(\,y_1(t), \ldots, y_n(t);$ $y_1(t-\tau), \ldots, y_n(t-\tau)) \equiv 0$, то есть для $y_1, \ldots, y_k$ получим $\dot{y}_i = 0, \quad (i = 1, \ldots, k)$.

Пусть $\psi = \psi(t) \quad t \in [t_0 - h; t_0]$ – некоторая начальная вектор-функция. Обозначим через $\mu(t) = C\,\psi(t)$. Тогда $y_i(t-\tau) = \mu_i(t_0) = c_i = \text{const} \quad$ при $\quad t \geq t_0 \quad (i = 1, \ldots, k)$ (это решение можно получить, например, с помощью метода шагов [1, с. 17]).

Таким образом, система (20) примет вид (17),(18). После преобразования $y = Cx$ система (4) будет такой

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= \nu(t) \quad (i = 1, \ldots, k), && (21) \\ \dot{y}_j &= \Phi_j(c_1, \ldots, c_k, y_{k+1}(t), \ldots, y_n(t);\; y_{k+1}(t-\tau), \ldots, y_n(t-\tau)) + \nu_j(t), \\ &\quad (j = k+1, \ldots, n), && (22) \end{aligned}$$

где вектор $\nu(t) = C\,\varphi(t)$, и если

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{t_0}^{T}\varphi_i(t)\,dt\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} < \delta, \quad \text{то} \quad \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{t_0}^{T}\nu_i(t)\,dt\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} < \|C\|_0 \cdot \delta = \delta_1,$$

так как C – постоянная матрица. Обозначим через $\;\overline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$; $\overline{\overline{y}} = \begin{pmatrix} y_{k+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Докажем следующую теорему.

Теорема 3. Если для системы (1) существует $k \times n$ постоянная матрица A $(\operatorname{rank} \mathrm{A} = k \leq n)$ такая, что выполняются условия (16), а для системы (18) существует определенно-положительный по $\overline{\overline{y}}(\tau)$ функционал $V(\overline{\overline{y}}(\cdot))$ равномерно по c_i $(i = 1, \ldots, k)$, для которого

$$a) \lim_{\|\overline{\overline{y}}(\cdot)\|_{h(n-k)} \to \infty} V(\overline{\overline{y}}(\cdot)) = \infty,$$

b) призводная $V(\overline{\overline{y}}(\cdot))$ вдоль интегральных кривых $\overline{\overline{y}}_\mu(t-\tau)$ системы (18) неположительная равномерно по c_i $(i = 1, \ldots, k)$:

$$\frac{dV(\overline{\overline{y}}_\mu(t-\tau))}{dt} \leq 0,$$

причем не существует ни одна целая полутраектория (кроме $\overline{\overline{y}} \equiv 0$), вдоль которой $dV(\overline{\overline{y}}_\mu(t-\tau))/dt = 0$, то решение $x \equiv 0$ системы (1) устойчиво по действующей силе.

Доказательство. Пусть для системы (1) существует $k \times n$ постоянная матрица A, такая что ($\mathrm{rank}\,\mathrm{A} = k \leq n$) и выполняются условия (16). Как показано выше, в этом случае систему (4) можно привести к виду (21), (22).

Интегрируя систему (21), получим

$$\overline{y}_\mu(t-\tau) = \mu(t_0) + \int_{t_0}^{t} \overline{V}(\xi)\, d\xi$$

или

$$y_i(t-\tau) = c_i + \int_{t_0}^{T} \nu_i(t)\, dt \quad \text{при} \quad t \geq T + h \quad (i = 1, \ldots, k).$$

Оценим величину $\|\overline{y}(\cdot)\|_{h(k)}$ при $t \geq T + h$:

$$\|\overline{y}(t)\|_{h(k)} \leq \|\mu(t_0)\|_{h(k)} + \left[\sum_{i=1}^{k} \left(\int_{t_0}^{T} \nu_i(t) dt\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} < \delta_1 + \delta_1 = 2\delta_1. \tag{23}$$

По условиям теоремы 3, для системы (4) имеют место все условия теоремы 1, равномерно по c_i. Следовательно, для решений системы (20) получим

$$y_i(t-\tau) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty,\ \tau \in [-h, 0]\ (i = k+1, \ldots, n). \tag{24}$$

Тогда, согласно (23) и (24), для любого $\varepsilon > 0$, существует число $\delta > 0$ и момент времени $t_* > T + h$ такие, что $\|y_\mu(\cdot)\|_h < \varepsilon$ при $t \geq t_*$, если $\|\mu(\tau)\|_h < \delta$. $\square$

Автор выражает свою искреннюю благодарность М.С. Габриеляну за постоянное внимание к работе, а также за многие полезные советы и замечания.

1. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – М.: Наука, 1971. – 296 с.
2. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959. – 211 с.
3. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. –424 с.
4. *Ignatev A.O.* On the partial Equiasymptotic Stability in Functional Differential Equation // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2002. –268. – P. 615-628.
5. *Барбашин Е.А., Красовский Н.Н.* О существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом // Прикл. математика и механика. – 1954. – **18**, вып. 3. – С. 345–350.
6. *Красовский Н.Н.* О применении второго метода Ляпунова для уравнений с запаздыванием времени // Там же. – 1956. – **20**, вып. 2. – С. 315–327.
7. *Габриелян М.С., Шагинян С.Г.* О построении функции Ляпунова // Уч. записки ЕГУ. – 1987. – N 1. – С. 39–45.
8. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – М. – Л.: Гостехиздат, 1950. – 471 с.
9. *Шагинян С.Г.* Об одной задаче теории устойчивости // Уч. записки ЕГУ. – 1987. – N 1. – С. 46–53.
10. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.:Наука,1988. – 548 с.

Ереванский гос. ун-т, Армения
shahinyan@ysu.am

Получено 15.11.2002