НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ВЫПУСК
32

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Межведомственный сборник научных трудов Основан в 1969 г.

ДОНЕЦК 2002

ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2002. Вып. 32

УДК 517.93, 518:512.3

©2002. **Р.Г. Мухарлямов**

УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИКОЙ СИСТЕМ ЧАПЛЫГИНА

Исследуется задача моделирования динамики неголономных систем Чаплыгина с программными связями. Строится алгоритм определения управляющих сил – реакций связей, соответствующих устойчивым программным связям. Приводится метод решения обратной задачи качественной теории дифференциальных уравнений и применение его для составления уравнений неголономных программных связей. Предлагается решение задачи управления движением двухколесной тележки из произвольной точки плоскости в начало координат с обходом препятствия.

Введение. Моделирование механических систем, на которые наложены голономные и неголономные связи, приводит к построению уравнений динамики с неопределенными множителями [1]. Выражения множителей Лагранжа обычно определяются из условия равенства нулю производных от уравнений связей. Подстановка их в уравнения динамики приводит к системе дифференциальных уравнений, численное решение которой оказывается неустойчивым по отношению к уравнениям связей. Замена уравнений связей уравнениями программных связей с соответствующими уравнениями возмущений связей позволяет построить разностные схемы решения уравнений движения, не связанные с накоплением погрешностей численного интегрирования. В работе предлагается метод построения уравнений неголономных связей, отражающих требуемые свойства движения системы, и метод составления уравнений динамики неголономных систем с программными связями. Приводится решение задачи управления движением двухколесной тележки из произвольной точки плоскости в начало координат с обходом препятствия.

1. Уравнения динамики систем Чаплыгина с программными связями. Рассмотрим механическую систему, положение которой определяется обобщенными координатами $q_1, \ldots, q_n$ и на которую наложены неголономные связи, заданные однородными линейными относительно обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ уравнениями

$$A(q)\dot{q} = 0, \tag{1}$$
$$A = (a_{ij}),\ a_{ij} = a_{ij}(q_1, \ldots, q_p), \quad i = 1, \ldots, n-p.$$

Представим систему уравнений (1) в виде суммы

$$A^{(1)}\dot{q}^{(1)} + A^{(2)}\dot{q}^{(2)} = 0 \tag{2}$$
$$A^{(1)} = (a_{ij}),\ j = 1, \ldots, p,\ \dot{q}^{(1)} = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_p),$$
$$A^{(2)} = (a_{ij}),\ j = p+1, \ldots, n,\ \dot{q}^{(1)} = (\dot{q}_{p+1}, \ldots, \dot{q}_n),$$

Полагая, что det $\mathrm{A}^{(2)} \neq 0$ и обобщенные $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_p$ скорости являются произвольными, определим решение системы (2) относительно $\dot{q}_{p+1}, \ldots, \dot{q}_n$:

$$\dot{q}^{(2)} = B(q)\dot{q}^{(1)}. \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке НТП Минобразования РФ, код 205.02.01.038 и НТП "Университеты России", код 04.01.041.

Далее, будем считать, что коэффициенты $b_{hk}(q)$ в правой части равенства (3) зависят только от соответствующих координат $q_1, \ldots, q_p$. Тогда уравнения связей (1) можно представить в виде

$$\dot{q}_h = \sum_{k=1}^{p} b_{hk}(q_1, \ldots, q_p)\dot{q}_k, \quad h = p+1, \ldots, n. \tag{4}$$

Голономные связи, наложенные на механическую систему, будем считать склерономными. Тогда кинетическая энергия системы определяется квадратичной формой относительно обобщенных скоростей

$$2T = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j. \tag{5}$$

Если наряду с коэффициентами b_{hk} уравнений неголономных связей (4) коэффициенты a_{ij} квадратичной формы (5) также зависят только от обобщенных координат $q_1, \ldots, q_p$, то механическая система является системой Чаплыгина [2]. Уравнения динамики системы Чаплыгина составляют замкнутую систему p уравнений относительно независимых координат $q_1, \ldots, q_p$:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T^*}{\partial q_k} + \sum_{h=p+1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\left(\sum_{l=1}^{p}\left(\frac{\partial b_{hl}}{\partial q_k} - \frac{\partial b_{hk}}{\partial q_l}\right)\dot{q}_l\right) = Q_k + R_k, \tag{6}$$

$$k = 1, \ldots, p.$$

Следуя С.А. Чаплыгину, под T^* будем понимать выражение кинетической энергии, полученное заменой обобщенных скоростей $\dot{q}_h$ в выражении (5) правыми частями уравнений связей (4):

$$2T^* = \sum_{i,j=1}^{p} a^*_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, \tag{7}$$

$$a^*_{ij} = a_{ij} + 2\sum_{h=p+1}^{n} a_{ih}b_{hk} + \sum_{h,l=p+1}^{n} a_{hl}b_{hi}b_{lj}.$$

Ввиду того, что кинетическая энергия T является положительной функцией, матрица A^* квадратичной формы T^* также является положительно определенной и ее определитель отличен от нуля.

Функции Q_k в правых частях уравнений (6) определяют обобщенные активные силы. Функции R_k в зависимости от природы связей соответствуют либо реакциям связей, ограничивающих перемещения точек системы, либо управляющим силам, призванным обеспечить выполнение уравнений дополнительно заданных связей (сервосвязей). Будем считать, что силы Q_k и R_k также зависят только от координат $q_1, \ldots, q_p$.

2. Определение реакций программных связей. Пусть на обобщенные координаты $q_1, \ldots, q_p$ и скорости $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_p$ механической системы наложены дополнительные связи, определяемые уравнениями

$$\omega_\mu(q_1, \ldots, q_p) = a_\mu, \quad \mu = 1, \ldots, m, \tag{8}$$

$$\omega_\nu(q_1, \ldots, q_p, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_p) = a_\nu, \quad \nu = m+1, \ldots, r < p,$$

правые части которых удовлетворяют уравнениям возмущений связей

$$
\begin{gathered}
\ddot{a}_\mu = a_\mu(\dot{a}, a', a, q, \dot{q}), \quad \mu = 1, \ldots, m \\
\dot{a}_\nu = a_\nu(\dot{a}, a', a, q, \dot{q}), \quad \nu = m+1, \ldots, r, \\
a = (a_1, \ldots, a_m), \quad a' = (a_{m+1}, \ldots, a_r).
\end{gathered} \tag{9}
$$

Системы уравнений (8) и (9) представляют собой уравнения программных связей (8) и уравнения возмущений связей (9). Правые части уравнений системы (9) составляются так, чтобы тривиальное решение $a_\rho = 0$, $\rho = 1, \ldots, r$, было асимптотически устойчиво. В [4] показано, что, полагая

$$
\alpha_\rho = \sum_{\mu=1}^{m} p_{\rho\mu}\alpha_\mu + \sum_{\mu=1}^{m} p_{\rho,m+\mu}\dot{\alpha}_\mu + \sum_{k=1}^{r-m} p_{\rho,2m+k}\dot{\alpha}_k, \quad \rho = 1, \ldots, r,
$$

можно определить ограничения, накладываемые на коэффициенты $p_{\rho\gamma}$, $\gamma = 1, \ldots, m+r$, обеспечивающие выполнение необходимой точности $|\alpha_\gamma| \leq \varepsilon$ соблюдения уравнений связей при численном решении уравнений динамики системы в обобщенных координатах.

Рассмотрим задачу определения сил R_k, обеспечивающих выполнение уравнений программных связей (8) и уравнений возмущений связей (9). Представим уравнения (6) в виде, разрешенном относительно старших производных

$$
\ddot{q}_i + \sum_{j,k=1}^{p} a_i^{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k = \sum_{j=1}^{p} a^{ij}(Q_j + R_j). \tag{10}
$$

Через a_i^{jk} обозначены элементы матрицы $(A^*)^{-1}$. Функции a_i^{jk} аналогичны символам Кристоффеля второго рода в уравнениях Лагранжа.

Если программные связи (8) полагать идеальными, то силы R_k определяются через множители Лагранжа $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, составляющие вектор λ:

$$
R = F^T\lambda, \quad R = R(R_1, \ldots, R_p), \tag{11}
$$

$$
F = (f_{ij}), \quad f_{\mu j} = \frac{\partial\omega_\mu}{\partial q_j}, \quad \mu = 1, \ldots, m
$$

$$
f_{\nu j} = \frac{\partial\omega_\nu}{\partial\dot{q}_j}, \quad \nu = m+1, \ldots, r, \quad j = 1, \ldots, p.
$$

Вектор неопределенных множителей Лагранжа $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ определяется исключением вектора $\ddot{q}$ из системы уравнений (10), записанной в векторном виде с учетом равенства (11):

$$
\ddot{q} + \dot{q}^T G\dot{q} = (A^*)^{-1}(Q + F^T\lambda), \tag{12}
$$

$$
G = (a_i^{jk}), \quad i, j, k = 1, \ldots, p
$$

и векторных уравнений

$$
\begin{gathered}
\omega_q\ddot{q} + \dot{q}^T\omega_{q^Tq}\dot{q} = a(\dot{\alpha}, \alpha', \alpha, q, \dot{q}), \\
\omega'_{\dot{q}}\ddot{q} + \omega'_q\dot{q} = a(\dot{\alpha}, \alpha', \alpha, q, \dot{q}),
\end{gathered} \tag{13}
$$

полученных дифференцированием выражений (8),

$$\omega_q = (f_{\mu j}), \quad \omega'_{\dot q} = (f_{\nu j}),$$

$$\omega_{q^Tq} = (\omega_i^{jk}), \quad \omega_i^{jk} = \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial q_j \partial q_k},$$

$$\omega'_q = (\omega_j^\nu), \quad \omega_j^\nu = \frac{\partial \omega_\nu}{\partial q_j}.$$

Перепишем уравнения (13) в виде

$$F\ddot q + w = b, \tag{14}$$
$$F = \begin{pmatrix} \omega_q \\ \omega'_{\dot q} \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} \dot q^T \omega_{q^Tq} \dot q \\ \omega'_q \dot q \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}.$$

Подстановка выражения $\ddot q$ из (12) в (14) приводит к уравнению для определения вектора λ:

$$S\lambda = b + F(\dot q^T G \dot q) - F(A^*)^{-1}Q - w, \; S = F(A^*)^{-1}F^T.$$

Предполагая, что det $S \neq 0$, находим:

$$\lambda = S^{-1}(b + F(\dot q^T G \dot q - (A^*)^{-1}Q) - w).$$

Отметим один частный случай, когда $Q \equiv 0$ и функции ω_ν линейны относительно обобщенных скоростей:

$$\omega_\nu = \sum_{j=1}^{p} \omega_{\nu j}(q_1, \ldots, q_p)\dot q_j, \; \nu = m+1, \ldots, r. \tag{15}$$

Тогда элементы матрицы F зависят только от координат $q_1, \ldots, q_p$. Полагая $b \equiv 0$ и учитывая, что $\omega'_q \dot q = (\gamma_{m+1}, \ldots, \gamma_r)$, $\gamma_\nu = \sum\limits_{i,j=1}^{p} \frac{\partial \omega_{\nu j}}{\partial q_i} \dot q_i \dot q_j$, $\lambda = S^{-1}(F(\dot q^T G \dot q) - w)$, $w = \begin{pmatrix} \dot q^T f_{q^Tq} \dot q \\ \dot q^T R_q \dot q \end{pmatrix}$, получаем выражение

$$\lambda = S^{-1}(F(\dot q^T G \dot q) - (\dot q^T \Gamma \dot q)), \tag{16}$$

$$\Gamma = (\gamma_{1,ij}, \ldots, \gamma_{r,ij}), \quad \gamma_{\mu,ij} = \frac{\partial^2 \omega_{\mu j}}{\partial q_i \partial q_j}, \quad \mu = 1, \ldots, m,$$

$$\gamma_{\nu,ij} = \frac{\partial^2 \omega_\nu}{\partial q_i \partial \dot q_j}, \quad \nu = m+1, \ldots, r.$$

Так как силы R_k имеют структуру $\boldsymbol{u} = F^T\lambda$, то оказывается справедливым следующее утверждение.

Теорема 1. Если уравнения неголономных программных связей (15) линейны относительно обобщенных скоростей и внешние силы отсутствуют: $Q \equiv 0$, то управление программным движением неголономной системы осуществляется обобщенной силой, представляющей квадратичную форму относительно обобщенных скоростей с коэффициентами, зависящими от координат.

3. Построение уравнений неголономных связей. Для программирования движений управляемых механических систем может быть эффективно использован метод построения динамических систем с заданными свойствами траекторий. Рассмотрим следующую задачу. Пусть требуется определить аналитические выражения управляющих воздействий, приложенных к механической системе для перемещения изображающей точки в пространстве состояний $q_1, \dots, q_n$ из произвольной точки M_0 в начало координат с обходом препятствий $P_i,\ i = 1, \dots, l$.

Для программирования соответствующего движения зададим s функций

$$f_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, s, \quad x = (x_1, \dots, x_N), \tag{17}$$

обладающих непрерывными частными производными по всем переменным $x_1, \dots, x_N$, определяющим состояние механической системы относительно базовой системы координат. Функции (17) определяют в некоторой области $G \in R_N$ поверхности Ψ_i, $i = 1, \dots, q$, ограничивающие области G_i, в которых содержатся препятствия P_i и точки A_i, $i = q+1, \dots, s$. Будем предполагать, что $\sum\limits_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)^2 = 0$, если $f_i(x) = 0$ есть уравнение поверхности, и $\sum\limits_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)^2 \neq 0$, когда равенство $f_i(x) = 0$ выполняется в отдельной точке A_i . Тогда можно построить множество систем дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \nu(x), \tag{18}$$

для которых поверхности Ψ_i и точки A_i будут соответственно интегральными поверхностями и особыми точками.

Будем считать, что дифференциальное уравнение (18) имеет единственное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $x(t_0) = x^0$. Тогда траектория изображающей точки, соответствующей его решению $x = x(t)$, $x(t_0) = x^0$, $f_i(x^0) \neq 0$, не может пересечь ни одну поверхность Ψ_i. Если начало координат является точкой притяжения системы (18), то изображающая точка придет к ней, минуя все препятствия P_i, $i = 1, \dots, l$.

Выразим значения координат $x_1, \dots, x_N$ системы через обобщенные координаты q_j, $j = 1, \dots, n$: $x_k = x_k(q_1, \dots, q_n)$, $k = 1, \dots, N$. Определив производные $\dot{x}_k = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \dot{q}_j$ через q_j и $\dot{q}_j$, систему дифференциальных уравнений (18) можно представить как уравнения линейных неголономных связей

$$B(q)\dot{q} + b(q) = 0,$$

$$B = (b_{kj}), \quad b = (b_k), \quad b_{kj} = \frac{\partial x_k}{\partial q_j}, \quad b_k = -\nu_k(x(q)),$$

наложенных на механическую систему.

Проиллюстрируем решение задачи построения системы (18) на двумерной плоскости [3]. Пусть

$$f(x, y) = f_0 f_1 \dots f_p f_{p+1} \dots f_q f_{q+1} \dots f_r f_{r+1} \dots f_s f_{s+1},$$

где

$$f_0 \equiv 1, \quad f_i = (u_i^2 + \nu_i^2 - r_i^2), \quad i = 1, \dots, q,$$

$$r_i = 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad r_i \neq 0, \quad i = p+1, \dots, q,$$

$$u_i = a_{i1}x + b_{i1}y + c_{i1}, \quad \nu_i = a_{i2}x + b_{i2}y + c_{i2},$$

$$\Delta_i = a_{i1}b_{i2} - a_{i2}b_{i1} \neq 0, \quad i = 1, \dots, q,$$

$$f_j = a_j x + b_j y + c_j, \quad j = q+1, \ldots, r,$$
$$f_k = f_k(x, y), \quad k = r+1, \ldots, s, \quad f_{s+1} \equiv 1.$$

Уравнения $f_i(x, y) = 0$ при $i = 1, \ldots, p$ равносильны уравнениям пары прямых $a_{i1}x + {}+b_{i1}y + c_{i1} = 0$, $a_{i2}x + b_{i2}y + c_{i2} = 0$, определяющих в пересечении точку A_i; при $i = p+1, \ldots, q$ получаем эллипсы E_i и при $i = q+1, \ldots, r$ – прямые L_i. Будем считать, что каждая прямая L_j пересекается по крайней мере с одной прямой L_m и не проходит через точки A_i, что E_i также не проходят через точки A_i. Равенства $f_k(x, y) = 0$, $k = r+1, \ldots, s$, определяют кривые Ψ_k, которые не имеют общих точек с кривыми E_i и не проходят через точки A_i. Через точку A_{jm} пересечения прямых L_j и L_m не проходят другие прямые.

Множество систем дифференциальных уравнений, имеющих особые точки типа фокус или центр в точках A_i, предельные циклы E_i, особые точки типа узел или седло в точках A_{jm} и сепаратрисы Ψ_k, разделяющие области, заполненные траекториями разных типов, записывается в виде:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= k(x, y) \sum_{l=1}^{r} \frac{1}{f_l(x, y)} \left(\alpha_l \frac{\partial f_l}{\partial y} + \beta_1 \frac{\partial f_l}{\partial y} \right) - \nu(x, y) \sum_{l=1}^{s} \frac{1}{f_l(x, y)} \frac{\partial f_l}{\partial y}, \\
\dot{y} &= k(x, y) \sum_{l=1}^{r} \frac{1}{f_l(x, y)} \left(\gamma_1 \frac{\partial f_l}{\partial x} + \delta_l \frac{\partial f_l}{\partial y} \right) + \nu(x, y) \sum_{l=1}^{s} \frac{1}{f_l(x, y)} \frac{\partial f_l}{\partial x},
\end{aligned} \tag{19}$$

$$k(x, y) = \Phi(x, y) f(x, y), \quad \nu(x, y) = M(x, y) f(x, y), \quad \Phi(x, y) = F(x, y) f_{p+1} \ldots, f_q,$$

где $F = F(x, y)$, $M = M(x, y)$ – произвольные непрерывные функции, отличные от нуля в рассматриваемой области G изменения переменных x, y. Коэффициенты α_l, β_l, γ_l, δ_l назначаются так, чтобы точки A_i, A_{jm} и кривые E_i были соответственно особыми точками заданного типа и устойчивыми или неустойчивыми предельными циклами. Так, если

$$\alpha_j = \alpha_m = \delta_j = \delta_m = 0, \quad \gamma_j = -\beta_j, \quad \gamma_m = -\beta_m,$$

а β_j, β_m определяются из равенств

$$(M_{mj} - \beta_m \Phi_{mj}) \Delta_{mj} f_{mj} = \lambda_{mj}, \quad (M_{jm} - \beta_j \Phi_{jm}) \Delta_{jm} f_{jm} = \lambda_{jm}, \tag{20}$$

где $\Delta_{mj} = a_m b_j - a_j b_m$, M_{mj}, Φ_{mj}, f_{mj} – соответственно значения функций $M = M(x, y)$, $\Phi(x, y) = F(x, y) f_{p+1} \ldots f_q$ и произведения $f_1 \ldots f_{j-1} f_{j+1} \ldots f_{m-1} f_{m+1} \ldots f_s$ в точке A_{jm}, то в точке A_{jm} будем иметь устойчивый (при $\lambda_{jm} < 0$, $\lambda_{mj} < 0$) или неустойчивый (при $\lambda_{jm} > 0$, $\lambda_{mj} > 0$) узел или седло (при $\lambda_{jm} \lambda_{mj} < 0$).

Для $j = 1, \ldots, p$ величины $\alpha_j, \beta_j + \gamma_j, \delta_j$ определяются как решение системы линейных уравнений

$$\begin{aligned}
&a_{j1}^2 \alpha_j + a_{j1} b_{j1} (\beta_j + \gamma_j) + b_{j1}^2 \delta_j = \frac{\lambda_j}{k_j}, \\
&2 a_{j1} a_{j2} \alpha_j + (a_{j1} b_{j2} + a_{j2} b_{j1})(\beta_j + \gamma_j) + 2 b_{j1} b_{j2} \delta_j = 0, \\
&a_{j2}^2 \alpha_j + a_{j2} b_{j2} (\beta_j + \gamma_j) + b_{j2}^2 \delta_j = \frac{\lambda_j}{k_j},
\end{aligned} \tag{21}$$

где $k_j = \Phi(x_j, y_j) f_1(x_j, y_j) \ldots f_{j-1}(x_j, y_j) f_{j+1}(x_j, y_j) \ldots f_s(x_j, y_j)$ и λ_j – произвольные величины. Заметим, что определитель системы (21) равен $\Delta_j^3 \neq 0$ и решение ее единственно. В зависимости от знака λ_j система (19) имеет в точке A_j неустойчивый фокус ($\lambda_j > 0$), центр ($\lambda_j = 0$) или устойчивый фокус ($\lambda_j < 0$). Если $j = p+1, \dots, q$ и величины α_j, $\beta_j + \gamma_j$, δ_j определены как решение системы (21), а величина λ_j выбрана так, что

$$\lambda_j p_j(x,y) + q_j(x,y) \leq -\eta_j < 0 \quad (\geq \eta_j > 0),$$

$$p_j(x,y) = r_j^2 F(x,y) f_1 \dots f_p f_{p+1}^2 \dots f_{j-1}^2 f_{j+1}^2 \dots f_q^2 f_{q+1} \dots f_s,$$
$$q_j(x,y) = M(x,y) \sum_{l=1}^{s} \left(\frac{\partial f_l}{\partial x}\frac{\partial f_j}{\partial y} - \frac{\partial f_l}{\partial y}\frac{\partial f_j}{\partial x} \right) f_1 \dots f_{l-1} f_{l+1} \dots f_{j-1} f_{j+1} \dots f_{s+1},$$

то предельный цикл E_j будет асимптотически устойчивым ($\lambda_j < 0$), устойчивым ($\lambda_j = 0$) или неустойчивым ($\lambda_j > 0$).

4. Управление движением двухколесной тележки. Рассмотрим задачу управления движением двухколесной тележки по шероховатой плоскости. Положение тележки на плоскости определяется координатами $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = \theta$, $q_4 = \varphi_1$, $q_5 = \varphi_2$, где x и y – декартовы координаты точки M пересечения оси симметрии тележки с осью, на которые посажены колеса, θ – угол между осью симметрии и осью Ox на плоскости, φ_1 и φ_2 – углы поворотов соответственно правого и левого колес. Условие качения без проскальзывания приводит к уравнениям трех неголономных связей [5]:

$$\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta + b\dot{\theta} + a\dot{\varphi}_1 = 0, \tag{22}$$

$$\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta - b\dot{\theta} + a\varphi_2 = 0, \tag{23}$$

$$\dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta = 0, \tag{24}$$

где a – радиус колес, b – длина полуоси.

Кинетическая энергия тележки определяется выражением [4]:

$$2T = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + 2m_0 l\dot{\theta}(\dot{y}\cos\theta - \dot{x}\sin\theta) + J\dot{\theta}^2 + C(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2), \tag{25}$$

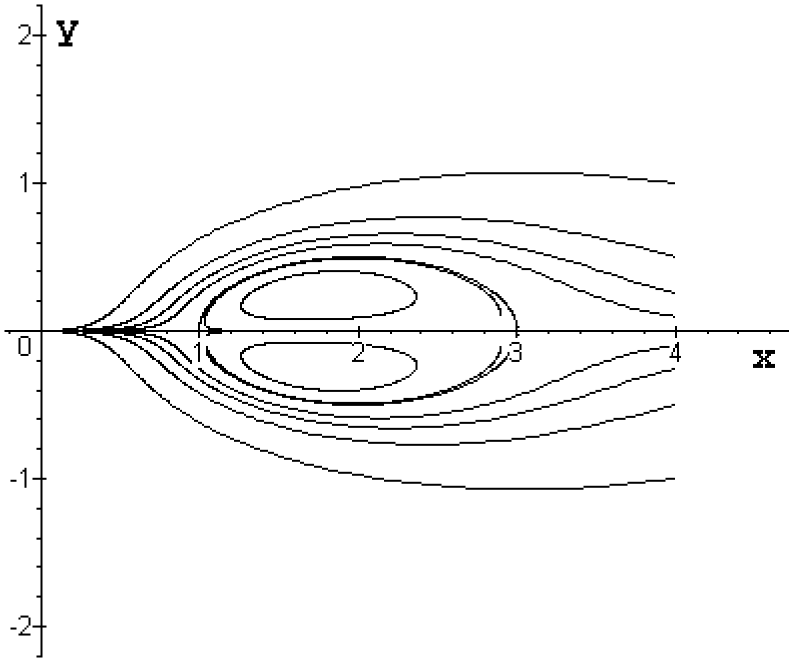
где $m = m_0 + 2m_1$ – масса всей системы, m_0 – масса кузова, m_1 – масса каждого колеса, l – расстояние от точки $M(x,y)$ до центра масс тележки, $J = m_0 k_0^2 + 2m_1 b^2 + 2A$ – момент инерции системы относительно вертикальной оси, проходящей через точку $M(x,y)$, k_0 – радиус инерции кузова относительно той же вертикали, A – момент инерции колеса относительно диаметра, C – осевой момент инерции колеса.

Будем считать, что управление тележкой осуществляется моментами M_1 и M_2, приложенными к колесам, и действующими так, чтобы точка M совершала переход из произвольной точки плоскости в начало координат с обходом препятствия, ограниченного кривой

$$(x-2)^2 + 4y^2 - 1 = 0. \tag{26}$$

Требуемые движения тележки будут осуществляться, если координаты x, y и скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$ точки M удовлетворяют системе дифференциальных уравнений [5]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{1}{3}x((x-2)^2 + 4y^2 - 1) - 4xy^2, \\ \dot{y} &= -\frac{2}{3}y((x-2)^2 + 4y^2 - 1) + xy(x-2). \end{aligned} \tag{27}$$



Фазовый портрет системы (27).

Начало координат является особой точкой системы (27) типа устойчивый узел, кривая (26) соответствует ее сепаратрисе. Фазовый портрет системы (27) приведен на рисунке.

Будем считать, что управляющие моменты M_1 и M_2 зависят от координат x, y, θ. Тогда целесообразно за независимые обобщенные координаты принять $q_1 = x,\ q_2 = y,\ q_3 = \theta$. Уравнения (22), (23) неголономных связей используем для исключения $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= b_{41}\dot{x} + b_{42}\dot{y} + b_{43}\dot{\theta}, \\ \dot{\varphi}_2 &= b_{51}\dot{x} + b_{52}\dot{y} + b_{53}\dot{\theta}; \end{aligned} \tag{28}$$

$$b_{41} = b_{51} = -\frac{\cos\theta}{a},\ b_{42} = b_{52} = -\frac{\sin\theta}{a},\ b_{43} = -b_{53} = -\frac{b}{a}.$$

Приведенная кинетическая энергия системы определяется выражением:

$$2T^* = \sum_{i=1}^{3} a^*_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, \quad a^*_{ij} = a^*_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3; \tag{29}$$

$$a^*_{11} = m + 2d\cos^2\theta,\ d = \frac{C}{a^2},\ a^*_{12} = d\sin 2\theta,\ a^*_{13} = -m_0 l\sin\theta,$$
$$a^*_{22} = m + 2d\sin^2\theta,\ a^*_{23} = -m_0 l\cos\theta,\ a^*_{33} = J + 2db^2.$$

Полагая, что внешние силы отсутствуют: $F_x = F_y = F_\theta = 0$, составим уравнения Чаплыгина (6):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} + \sum_{h=4}^{5}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial b_{hj}}{\partial q_i} - \frac{\partial b_{hi}}{\partial q_j}\right)\dot{q}_j = Q_i + R_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{30}$$

Силы Q_i соответствуют управляющим моментам M_1 и M_2:

$$Q_1 = b_{41}M_1 + b_{51}M_2,\ Q_2 = b_{42}M_1 + b_{52}M_2,\ Q_3 = b_{43}M_1 + b_{53}M_2,$$

R_i – реакции связи (24). Для определения выражений M_1, M_2, R_i введем уравнения программных связей (8) с учетом равенств (24), (27):

$$f_1 \equiv X\sin\theta - Y\cos\theta = \alpha_0, \quad f_2 \equiv \dot{x} - X = \alpha_2, \quad f_3 \equiv \dot{y} - Y = \alpha_3; \tag{31}$$

$$X = -\frac{1}{3}x((x-2)^2 + 4y^2 - 1) - 4xy^2, \quad Y = -\frac{2}{3}y((x-2)^2 + 4y^2 - 1) + xy(x-2).$$

Уравнения возмущений связей (9) можно представить в виде

$$\dot{\widetilde{\alpha}} = \widetilde{P}\widetilde{\alpha},\ \widetilde{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),\ \widetilde{P} = (p_{kl}); \tag{32}$$

$$p_{k1} = \delta_{k1},\ k, l = 0, 1, 2, 3.$$

Полагая связи (31) идеальными, получим выражения для R_i:

$$R_1 = f_{11}\lambda, \quad R_2 = f_{12}\lambda, \quad R_3 = f_{13}\lambda,$$

$$f_{11} \equiv \frac{\partial f_1}{\partial x} = -\frac{1}{3}\left((3x^2 - 8x + 3 + 16y^2)\sin\theta + \frac{2}{3}(x+1)y\cos\theta\right),$$

$$f_{12} \equiv \frac{\partial f_1}{\partial x} = -\frac{32}{3}xy\sin\theta - \frac{1}{3}(x^2 + 2x - 6 - 24y^2)\cos\theta,$$

$$f_{13} \equiv \frac{\partial f_1}{\partial z} = X\cos\theta + Y\sin\theta.$$

Представим систему (30) в развернутом виде:

$$\sum_{j=1}^{3} a^*_{ij}\ddot{q}_j + a_i = \sum_{j=1}^{3} d_{ij}u_j; \tag{33}$$

$$a_i = \sum_{j,k=1}^{3} (\gamma_{i,jk} + \beta_{i,jk})\dot{q}_j\dot{q}_k,$$

$$\gamma_{i,jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a^*_{ji}}{\partial q_k} + \frac{\partial a^*_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial a^*_{jk}}{\partial q_i}\right),\ \beta_{i,jk} = C\sum_{h=4}^{5} b_{hk}\left(\frac{\partial b_{hj}}{\partial q_i} - \frac{\partial b_{hi}}{\partial q_j}\right),$$

$$u_1 = -\frac{M_1 + M_2}{a}, \quad u_2 = \frac{b}{a}(M_2 - M_1), \quad u_3 = -\frac{\lambda}{3}.$$

После проведения необходимых выкладок будем иметь следующие значения функций a_i и коэффициентов d_{ij}:

$$a_1 = 2d\dot{y}\dot{\theta}\cos^2\theta - \dot{x}\dot{\theta}\sin 2\theta - m_0 l\dot{\theta}^2\cos\theta,$$

$$a_2 = -d\dot{y}\dot{\theta}\sin 2\theta - 2d\dot{x}\dot{\theta}\sin^2\theta - m_0 l\dot{\theta}^2\sin\theta, \quad a_3 = 0,$$

$$d_{11} = \cos\theta, \quad d_{12} = 0, \quad d_{13} = -3f_{11},$$

$$d_{21} = -\sin\theta, \quad d_{22} = 0, \quad d_{23} = -3f_{12},$$
$$d_{31} = 0, \quad d_{32} = 1, \quad d_{33} = X\cos\theta - Y\sin\theta.$$

Запишем систему (33) в матричном виде:

$$A^*\ddot{q} + a = Du; \tag{34}$$

$$A^* = (a^*_{ij}), \quad D = (d_{ij}), \quad q = (q_1, q_2, q_3), \quad u = (u_1, u_2, u_3).$$

Остается определить вектор управляющих функций u. Для этого следует продифференцировать дважды функцию f_1 и по одному разу функции f_2, f_3 с учетом равенств (32). В результате получается следующее матричное равенство:

$$F\ddot{q} + \boldsymbol{w} = P\widetilde{f}; \tag{35}$$

$$F = (f_{ij}),\ \boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3),\ P = (p_{is}),\ \widetilde{f} = (f_1, \dot{f}_1.f_2, f_3), \quad i,j = 1,2,3, \quad s = 0,1,2,3,$$
$$f_{21} = 1, \quad f_{22} = 0, \quad f_{23} = 0, \quad f_{31} = 0, \quad f_{32} = 1, \quad f_{33} = 0,$$
$$w_1 = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} w_{1,ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, \quad w_{1,11} = -\frac{4}{3}((3x+4)\sin\theta + y\cos\theta),$$
$$w_{1,12} = -\frac{4}{3}((x+1)\cos\theta + 16y\sin\theta),$$
$$w_{1,13} = \frac{4}{3}(x+1)y\sin\theta - \frac{2}{3}(6x^2 - 8x + 3 + 16y^2)cos\theta,$$
$$w_{1,22} = -\frac{64}{3}x\sin\theta + 32y\cos\theta, \quad w_{1,23} = \frac{2}{3}(x^2 + 2x - 6 - 24y^2)\sin\theta - \frac{64}{3}xy\cos\theta,$$
$$w_{1,33} = \frac{2}{3}(x^2 - 4x + 3 + 16y^2)x\sin\theta + \frac{2}{3}(x^2 + 2x - 6y - 8y^2)y\cos\theta,$$
$$w_2 = \frac{1}{3}(3x^2 - 8x + 3 + 16y^2)\dot{x} + \frac{32}{3}xy\dot{y}, \quad w_3 = -\frac{2}{3}(x+1)y\dot{x} - \frac{1}{3}(x^2 + 2x - 6 - 24y^2)\dot{y}.$$

Из (34), (35) следует выражение для вектора управления

$$u = \left(F(A^*)^{-1}D\right)^{-1}\left(P\widetilde{f} + F(A^*)^{-1}a - w\right).$$

1. *Мухарлямов Р.Г.* Об уравнениях кинематики и динамики несвободных механических систем // Механика твердого тела. – 2000. – Вып.30. – С. 68–79.
2. *Чаплыгин С.А.* Исследования по динамике неголономных систем. – М.; Л.: Гостехиздат, 1949. – 112 с.
3. *Мухарлямов Р.Г.* К обратным задачам качественной теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1967. – **3**, № 10. – С. 1673-1681.
4. *Мухарлямов Р.Г.* Уравнения движения механических систем. – М.: Изд-во РУДН, 2001. – 99 с .
5. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. – М.: Наука, 1967. – 519 с.

Российский ун-т дружбы народов, Москва
rmuharliamov@sci.pfu.edu.ru

Получено 27.11.2002