

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ВЫПУСК

32

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Межведомственный сборник научных трудов

Основан в 1969 г.

ДОНЕЦК 2002

УДК 531.38

©2002. А.П.Харламов

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ И ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ГИРОСКОПА КОВАЛЕВСКОЙ В СЛУЧАЕ ДЕЛОНЕ

Уравнения движения гироскопа С.В.Ковалевской в случае нулевого значения постоянной четвертого интеграла при любых допустимых значениях свободных параметров, входящих в эти уравнения, приведены к виду, применимому для реализации алгоритма построения компьютерной анимации полного решения. Предложена не содержащая особых точек параметризация уравнения подвижного годографа.

Описывающие движение твердого тела вокруг неподвижной точки уравнения Эйлера-Пуассона, как указала С.В.Ковалевская, допускают четвертый интеграл при ограничениях $A = B = 2C$ на моменты инерции относительно главных осей в точке закрепления. При нулевом значении постоянной интеграла Ковалевской (случай Н.Б.Делоне) записанные в безразмерном виде соотношения между основными переменными, как указано в работах [1, 2], имеют вид

$$2p_1^{\bullet} = p_2 p_3, \quad (1)$$

$$p_1^2 + \frac{p_3^2}{4} = 1, \quad p_2^2 = n\sqrt{1-c^2}p_3 - 2ncp_1 - p_1^2, \quad (2)$$

$$\nu_1 = \frac{p_2^2 - p_1^2}{2n}, \quad \nu_2 = -\frac{p_1 p_2}{n}, \quad (3)$$

$$\nu_3 = \frac{2nc + (p_1^2 + p_2^2)p_1}{np_3} = \sqrt{1-c^2}p_1 + \frac{c}{2}p_3$$

и, следовательно,

$$\omega_1 = p_1 \nu_1 + p_2 \nu_2 + p_3 \nu_3 = \frac{1}{2}\sqrt{1-c^2}p_1 p_3 + c(2-p_1^2),$$

$$\omega_\rho^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - \omega_1^2 = (1-2c^2)p_1^4 - 5(1-c^2)p_1^2 - 2ncp_1 + 4(1-c^2) + (cp_1^3 - 2cp_1 + n)\sqrt{1-c^2}p_3, \quad (4)$$

где

$$0 \leq c \leq 1, \quad n > 0 \quad - \quad (5)$$

полулобуса в плоскости параметров (c, n) .

Получаемое исключением p_3 из выражений (2) при значении $p_2^2 = 0$ уравнение

$$p_1^4 + 4ncp_1^3 + 4n^2p_1^2 - 4n^2(1-c^2) = 0 \quad (6)$$

имеет не менее двух действительных корней и обстоятельно исследовано в работе [1]. В полулобосе (5) выделена ограниченная кривыми

$$n_1(c) = \sqrt{\frac{36c^2 - 8 - 27c^4 - c(9c^2 - 8)\sqrt{9c^2 - 8}}{8}}, \quad (7)$$

$$n_2(c) = \sqrt{\frac{36c^2 - 8 - 27c^4 + c(9c^2 - 8)\sqrt{9c^2 - 8}}{8}}, \quad (8)$$

где $\frac{2\sqrt{2}}{3} \leq c \leq 1$, и отрезком прямой $c = 1$, $0 < n \leq \frac{1}{2}$ закрытая область I существования четырех действительных корней (рис. 1). Принадлежащие кривым (7), (8) значения параметров n, c обеспечивают существование кратных корней уравнения (6). Общая точка кривых (7), (8) – $c = c_* = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $n = n_* = \frac{\sqrt{3}}{3}$ – соответствует изученному в работе [3] случаю тройного корня этого уравнения. На остальной части II полуполосы уравнение (6) имеет два действительных различных корня.

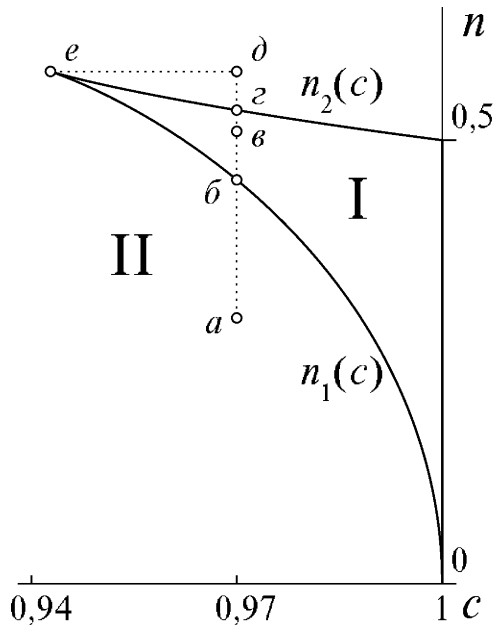


Рис. 1.

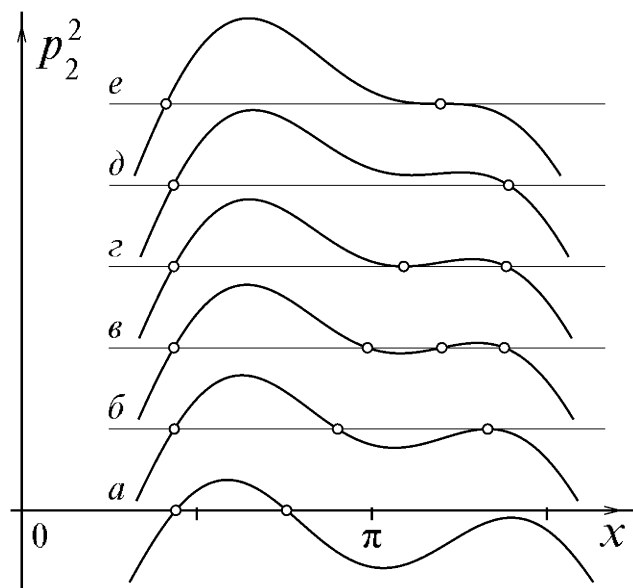


Рис. 2.

Запишем (2) в параметрической форме

$$p_1(x) = \cos x, \quad (9)$$

$$p_2^2(x) = 2n\sqrt{1-c^2} \sin x - 2nc \cos x - \cos^2 x, \quad 0 \leq x < 2\pi, \quad (10)$$

$$p_3(x) = 2 \sin x. \quad (11)$$

Характерное поведение графика функции (10) при прохождении точки (c, n) значений параметров через область I представлено на рис. 2, а - д и его вид в случае тройного корня (c_*, n_*) – на рис. 2, е. Соответствующие положения точек отмечены на рис. 1. Как показано в работе [2], наличие кратного корня при $n = n_1(c)$ определяет тип движения тела – равномерное вращение вокруг вертикали (вследствие тривиальности здесь рассматриваться не будет), а при $n = n_2(c)$ – асимптотически равномерное вращение.

Приведем выражения (1), (3), (9) – (11) к виду, пригодному для применения алгоритма построения визуализации движения [4]. Обозначим через x_1, x_2 два соседних некратных корня уравнения

$$p_2^2(x) = 0 \quad (12)$$

таких, что при $x_1 \leq x \leq x_2$ выполнено: $p_2^2(x) \geq 0$. Тогда из (10) получим

$$\begin{aligned} 2n\sqrt{1-c^2} \sin x_1 - 2nc \cos x_1 &= \cos^2 x_1, \\ 2n\sqrt{1-c^2} \sin x_2 - 2nc \cos x_2 &= \cos^2 x_2. \end{aligned}$$

Эта система имеет единственное решение

$$\begin{aligned} 2n\sqrt{1-c^2} &= -\cos x_1 \cos x_2 \sin \frac{x_1+x_2}{2} \Big/ \cos \frac{x_2-x_1}{2}, \\ 2nc &= -(1 + \sin x_1 \sin x_2) \cos \frac{x_1+x_2}{2} \Big/ \cos \frac{x_2-x_1}{2} \end{aligned} \quad (13)$$

при условии $\sin(x_2 - x_1) \neq 0$. Случай $x_2 = x_1 + \pi$, приводящий к значениям

$$c = 1, \quad x_1 = \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{3\pi}{2} \quad (14)$$

будет рассмотрен отдельно.

Случай $c \neq 1$. Выражение (10) при подстановке (13) примет вид

$$p_2^2(x) = \left[\cos \left(x - \frac{x_1+x_2}{2} \right) - \cos \frac{x_2-x_1}{2} \right] \left[\frac{\sin^2 \frac{x_1+x_2}{2}}{\cos \frac{x_2-x_1}{2}} - \cos \left(x + \frac{x_1+x_2}{2} \right) \right].$$

Введем обозначения $\theta_1 = (x_2 - x_1)/4$, $\theta_2 = (x_1 + x_2)/2$, $\theta = x - \theta_2$ и сделаем замену $\sigma(\lambda) = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = -\operatorname{tg} \theta_1 \cos^2 \frac{\lambda}{2} + \operatorname{tg} \theta_1 \sin^2 \frac{\lambda}{2} = -\operatorname{tg} \theta_1 \cos \lambda$, $0 \leq \lambda \leq 2\pi$. Тогда соотношения (9) – (11) и их производные по переменной λ запишутся так

$$\begin{aligned} p_1(\lambda) &= \frac{(1 - \sigma^2) \cos \theta_2 - 2\sigma \sin \theta_2}{1 + \sigma^2}, \\ p_2(\lambda) &= \frac{\sin \theta_1 \sin \lambda}{1 + \sigma^2} \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta_2}{\cos 2\theta_1} (1 + \sigma^2) + 2(\sigma^2 - 1) \cos 2\theta_2 + 4\sigma \sin 2\theta_2}, \\ p_3(\lambda) &= 2 \frac{(1 - \sigma^2) \sin \theta_2 + 2\sigma \cos \theta_2}{1 + \sigma^2}, \\ \frac{dp_1}{d\lambda} &= \frac{2\operatorname{tg} \theta_1 \sin \lambda}{(1 + \sigma^2)^2} [(\sigma^2 - 1) \sin \theta_2 - 2\sigma \cos \theta_2], \\ \frac{dp_2}{d\lambda} &= \frac{1}{(1 + \sigma^2)^2 \cos \theta_1} \left\{ 2\sigma^4 \sin 2\theta_2 \cos^2 \theta_1 - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{1 - \cos 2\theta_2}{\cos 2\theta_1} + 2 \cos 2\theta_2 (1 + 2 \cos^2 \theta_1) \right] \sigma^3 - 6\sigma^2 \sin 2\theta_2 - \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{1 - \cos 2\theta_2}{\cos 2\theta_1} - 2 \cos 2\theta_2 (1 + 2 \sin^2 \theta_1) \right] \sigma + 2 \sin 2\theta_2 \sin^2 \theta_1 \right\} \times \\ &\quad \times \left[\frac{1 - \cos 2\theta_2}{\cos 2\theta_1} (1 + \sigma^2) + 2(\sigma^2 - 1) \cos 2\theta_2 + 4\sigma \sin 2\theta_2 \right]^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$\frac{dp_3}{d\lambda} = \frac{4\operatorname{tg}\theta_1 \sin \lambda}{(1 + \sigma^2)^2} \left[(1 - \sigma^2) \cos \theta_2 - 2\sigma \sin \theta_2 \right].$$

Связь основных переменных со временем установим из (1):

$$\lambda^\bullet = \frac{p_2 p_3}{2 \frac{dp_1}{d\lambda}} = -\frac{\cos \theta_1}{2} \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta_2}{\cos 2\theta_1} (1 + \sigma^2) + 2(\sigma^2 - 1) \cos 2\theta_2 + 4\sigma \sin 2\theta_2}.$$

Здесь существенным является тот факт, что подрадикальное выражение в полученном представлении строго положительно для любых допустимых значений параметров θ_1, θ_2 на всем отрезке изменения переменной λ .

Полученные соотношения вместе с (3) и составят полный набор функций, необходимый для применения алгоритма [4].

Случай с = 1. (Качественно такие движения рассматривались в работе [5].) Компоненты вектора угловой скорости (4) и соотношения (3) примут вид

$$\omega_1 = 2 - p_1^2, \quad (15)$$

$$\omega_\rho^2 = -(p_1^3 + 2n)p_1, \quad (16)$$

$$\nu_1 = -\frac{n + p_1}{n} p_1, \quad \nu_2 = -\frac{p_1 p_2}{n}, \quad \nu_3 = \frac{p_3}{2}. \quad (17)$$

Значения (14) обращают в ноль (9) - компоненту p_1 , которая в свою очередь обращает в ноль ω_ρ , заданное зависимостью (16). Геометрически это означает пересечение вертикали ν неподвижным годографом. Поскольку ω_ρ входит в знаменатель выражений, определяющих величины угла α и матрицы перехода E алгоритма [4], необходимо соответствующей подстановкой записать эти выражения в явном виде и избавиться от присутствующей там устранимой неопределенности типа $0/0$.

В рассматриваемом случае из (7), (8) имеем $n_1(1) = 0$, $n_2(1) = \frac{1}{2}$. Как показано выше, при $n > \frac{1}{2}$ уравнение (12) имеет два, а при $0 < n < \frac{1}{2}$ - четыре действительных различных корня. Рассмотрим эти интервалы изменения параметра n .

При значениях $n > \frac{1}{2}$ переменная x изменяется в пределах $x_1 = \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} = x_2$, откуда с учетом (9) установим $-1 \leq p_1(x) \leq 0$. Сделаем замену

$$p_1(\lambda) = -\sin^2 \lambda, \quad (18)$$

тогда из (16), (10), (11), подразумевая в дальнейшем зависимость основных величин от переменной λ , получим

$$\omega_\rho = \sqrt{p_1^3 + 2n} \sin \lambda, \quad (19)$$

$$p_2 = \sqrt{p_1 + 2n} \sin \lambda, \quad p_3 = 2\sqrt{1 - p_1} \cos \lambda \quad (20)$$

и, дифференцируя (18), (20), запишем

$$\frac{dp_1}{d\lambda} = -\sin 2\lambda, \quad \frac{dp_2}{d\lambda} = \frac{2(n + p_1) \cos \lambda}{\sqrt{p_1 + 2n}}, \quad \frac{dp_3}{d\lambda} = \frac{4p_1 \sin \lambda}{\sqrt{1 - p_1}}. \quad (21)$$

Угол α определяется из соотношения

$$\frac{d\alpha}{d\lambda} = -\frac{1}{\omega_p^2} \left(\varkappa_1 \frac{dp_1}{d\lambda} + \varkappa_2 \frac{dp_2}{d\lambda} + \varkappa_3 \frac{dp_3}{d\lambda} \right), \quad (22)$$

где

$$\varkappa_1 = p_2\nu_3 - p_3\nu_2, \quad \varkappa_2 = p_3\nu_1 - p_1\nu_3, \quad \varkappa_3 = p_1\nu_2 - p_2\nu_1. \quad (23)$$

Интегрируя (22) с подстановкой (23), (18)-(21), окончательно получим

$$\alpha(\lambda) = \frac{1}{2n} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{1}{p_1^3 + 2n} \left[2(2p_1 + n)p_3 \sqrt{p_1 + 2n} \cos \lambda - (2p_1 + 3n)p_3 \frac{dp_2}{d\lambda} + 2np_2 \frac{dp_3}{d\lambda} \right] d\lambda.$$

Содержащие неопределенность компоненты E_{2i}, E_{3i} ($i = 1, 2, 3$) матрицы перехода с учетом (15), (23), (18) - (20) примут вид

$$E_{21} = \frac{1}{nq} \left\{ (2p_1 + n) \sqrt{p_1 + 2n} p_3 \sin \alpha - 2[n + \omega_1(p_1 + n)] \sin \lambda \cos \alpha \right\},$$

$$E_{22} = \frac{1}{nq} \left[(2p_1 + 3n)p_3 \sin \lambda \sin \alpha + 2(n + \omega_1 p_1) \sqrt{p_1 + 2n} \cos \alpha \right],$$

$$E_{23} = -\frac{\sin \lambda}{q} (2p_2 \sin \alpha + p_1 p_3 \cos \alpha),$$

$$E_{31} = -\frac{1}{nq} \left\{ 2[n + \omega_1(p_1 + n)] \sin \lambda \sin \alpha + (2p_1 + n) \sqrt{p_1 + 2n} p_3 \cos \alpha \right\},$$

$$E_{32} = \frac{1}{nq} \left[2(n + \omega_1 p_1) \sqrt{p_1 + 2n} \sin \alpha - (2p_1 + 3n)p_3 \sin \lambda \cos \alpha \right],$$

$$E_{33} = -\frac{\sin \lambda}{q} (p_1 p_3 \sin \alpha - 2p_2 \cos \alpha),$$

где $q = 2\sqrt{p_1^3 + 2n}$. Связь переменной λ со временем установим из (1), привлекая (18), (20), зависимостью

$$\lambda^\bullet = -\frac{1}{2} \sqrt{(2n - \sin^2 \lambda)(1 + \sin^2 \lambda)}.$$

Для значений $0 < n < \frac{1}{2}$ компонента $p_2(x)$, как следует из (10), определена на двух интервалах изменения переменной x : $x_1 = \frac{\pi}{2} \leq x \leq \arccos(-2n) = x_2$,

$x_1 = 2\pi - \arccos(-2n) \leq x \leq \frac{3\pi}{2} = x_2$, где $-2n \leq p_1(x) \leq 0$. Из структуры соотношений (3), (9) - (11) очевидно, что их поведение на указанных интервалах отличается лишь знаком компонент $p_3(x)$ и $\nu_3(x)$, то есть выбором направления осей координат и направлением обхода α неподвижного годографа, но оставляет неизменной картину движения в целом.

Сделаем замену $p_1(\lambda) = -2n \sin^2 \lambda$ и проведем преобразования аналогичные случаю $n > \frac{1}{2}$. Опуская промежуточные рассуждения и подразумевая зависимость основных величин от переменной λ , запишем

$$p_2 = n \sin 2\lambda, \quad p_3 = 2\sqrt{1 - p_1^2},$$

$$\lambda^\bullet = -\frac{p_3}{4},$$

$$\frac{dp_1}{d\lambda} = -2n \sin 2\lambda, \quad \frac{dp_2}{d\lambda} = 2n \cos 2\lambda, \quad \frac{dp_3}{d\lambda} = \frac{8np_1}{p_3} \sin 2\lambda,$$

$$\omega_\rho = \sqrt{2n(p_1^3 + 2n)} \sin \lambda,$$

$$\alpha(\lambda) = \frac{1}{2n} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{1}{p_1^3 + 2n} \left[2(2p_1 + n)(p_1 + 2n)p_3 - (2p_1 + 3n)p_3 \frac{dp_2}{d\lambda} + 2np_2 \frac{dp_3}{d\lambda} \right] d\lambda.$$

$$E_{21} = \frac{1}{q} \left\{ (2p_1 + n)p_3 \cos \lambda \sin \alpha - 2[n + \omega_1(p_1 + n)] \sin \lambda \cos \alpha \right\},$$

$$E_{22} = \frac{1}{q} \left[(2p_1 + 3n)p_3 \sin \lambda \sin \alpha + 2(n + \omega_1 p_1) \cos \lambda \cos \alpha \right],$$

$$E_{23} = -\frac{n \sin \lambda}{q} (2p_2 \sin \alpha + p_1 p_3 \cos \alpha),$$

$$E_{31} = -\frac{1}{q} \left\{ 2[n + \omega_1(p_1 + n)] \sin \lambda \sin \alpha + (2p_1 + n)p_3 \cos \lambda \cos \alpha \right\},$$

$$E_{32} = \frac{1}{q} \left[2(n + \omega_1 p_1) \cos \lambda \sin \alpha - (2p_1 + 3n)p_3 \sin \lambda \cos \alpha \right],$$

$$E_{33} = -\frac{n \sin \lambda}{q} (p_1 p_3 \sin \alpha - 2p_2 \cos \alpha),$$

где $q = \sqrt{2n(p_1^3 + 2n)}$.

Вычислительная схема. По выбранным из полуполосы (5) значениям параметров n, c определяем их принадлежность соответствующей области (I или II) и как следствие – количество корней уравнения (12).

При $c = 1$, в зависимости от значения параметра n выбираем соответствующее представление выражений, входящих в алгоритм [4], который и реализуем на заданном интервале изменения переменной λ .

При $c \neq 1$ численно находим корни уравнения (12) из представления (10). Выбираем пару соседних корней, удовлетворяющих условию $p_2^2(x) \geq 0$. В случае $n = n_2(c)$ компонента $\omega_\rho \rightarrow 0$ и угол $\alpha \rightarrow \infty$ при стремлении значения переменной x к кратному корню, поэтому для реализации алгоритма [4] необходимо сократить интервал $x_1 \leq x \leq x_2$ изменения величины x , отступив от кратного корня на малую величину δ ; порядок δ зависит от конкретного используемого метода приближенного вычисления определенного интеграла. Далее находим величины θ_1, θ_2 и применяем алгоритм [4], подставляя соответствующие представления десяти необходимых зависимостей - $p_1(\lambda), p_2(\lambda), p_3(\lambda), \nu_1(\lambda), \nu_2(\lambda), \nu_3(\lambda), \frac{dp_1(\lambda)}{d\lambda}, \frac{dp_2(\lambda)}{d\lambda}, \frac{dp_3(\lambda)}{d\lambda}, \lambda^\bullet(\lambda)$ и задавая интервал изменения переменной λ .

Поиск периодических движений. Частные случаи таких движений были найдены аналитически в работе [6]. Они соответствуют значению параметра $c = 0$. Предложим метод численного поиска таких движений на всей полуполосе (5). Структура выражений (9) - (11), интервал $x_1 \leq x \leq x_2$ изменения переменной x и ее замена переменной λ ,

$$0 \leq \lambda \leq 2\pi k \quad (24)$$

обеспечивают замкнутость подвижного годографа угловой скорости для любых допустимых значений (5) свободных параметров n, c . Следовательно, условие периодичности движения можно сформулировать как требование замкнутости неподвижного годографа на интервале (24). Это требование может быть выражено следующим уравнением

$$\alpha(n, c, k) = \int_0^{2\pi k} \frac{1}{\omega_\rho^2} \left[(p_3\nu_2 - p_2\nu_3) \frac{dp_1}{d\lambda} + (p_1\nu_3 - p_3\nu_1) \frac{dp_2}{d\lambda} + (p_2\nu_1 - p_1\nu_2) \frac{dp_3}{d\lambda} \right] d\lambda = 2\pi m$$

относительно неизвестного значения параметра n при остающемся свободным параметре c и целых параметрах k, m . Здесь величина k определяет кратность длины неподвижного к длине подвижного годографа, а m – количество полных оборотов неподвижного годографа вокруг вертикали.

Вычислительную схему поиска можно представить, например, следующим образом. Для каждого конкретного допустимого значения параметра c и целых конкретных значений k, m проходим выбранный интервал допустимых значений неизвестного n с малым шагом Δn . Если на каком-то шаге функция $f(n) = \alpha(n, c, k) - 2\pi m$ меняет знак, то включается алгоритм поиска нуля функции на отрезке.

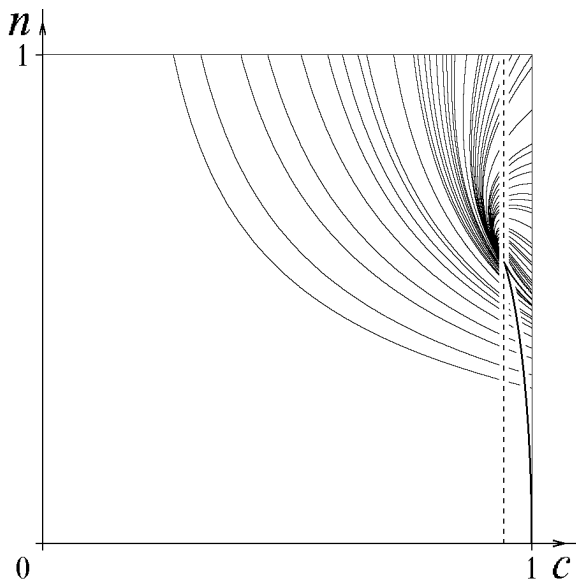


Рис. 3. Значения параметров, соответствующие периодическим движениям.

1), показан на рис. 4, в. Перетяжка у подвижного годографа обусловлена существованием локального минимума функции на допустимом интервале (рис. 2, д). Пунктиром изображены неподвижные оси, направленные за выбранную картинную плоскость.

Соответствующая движению, представленному на рис. 4, а, траектория центра масс, лежащего на первой оси подвижной системы координат, изображена на рис. 5, а - в в проекциях на координатные плоскости неподвижного базиса.

Поиск периодических движений осуществлялся в области $0 < c \leq 1, 0 < n \leq 1$, для значений $0 \leq k \leq 5, -20 \leq m \leq 0$ с шагом $\Delta c = \Delta n = 2^{-10}$. Результаты представлены на рис.3 в виде изображения точек с координатами c, n в указанной области.

Свяжем с вектором ν неподвижный в пространстве базис $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ так, что $\varepsilon_1 = \nu$, и отсчет угла α идет от ε_2 к ε_3 . Характерный вид подвижного и неподвижного годографов угловой скорости для точки из области II (см. рис. 1) представлен в этом базисе на рис. 4, а, для внутренней точки из области I – на рис. 4, б (соответствует меньшему интервалу изменения переменной x – между третьим и четвертым корнями уравнения (12)). Вид годографов для значений параметров из области, в которой находится точка δ (см. рис.

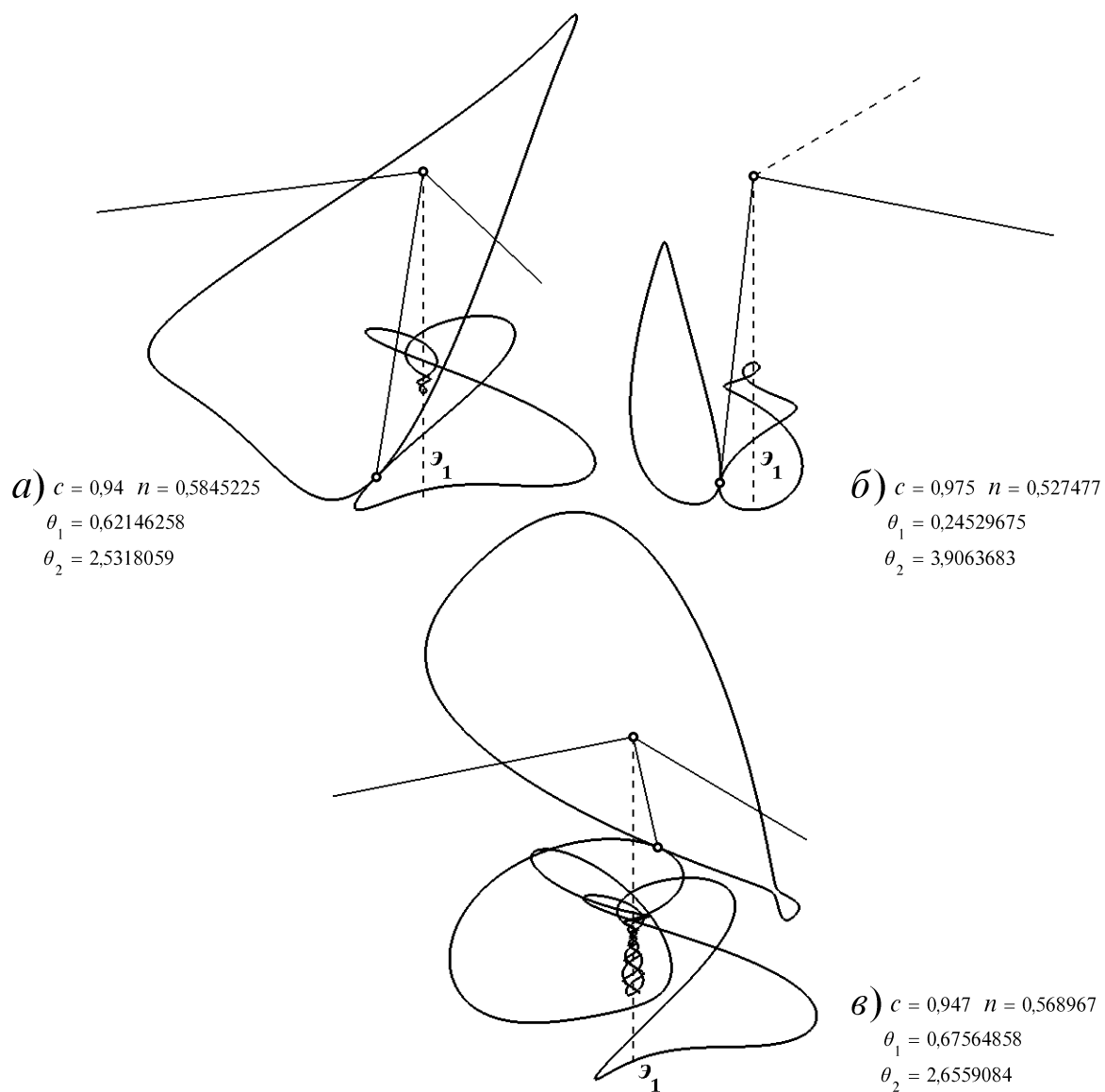


Рис. 4. Варианты годографов.

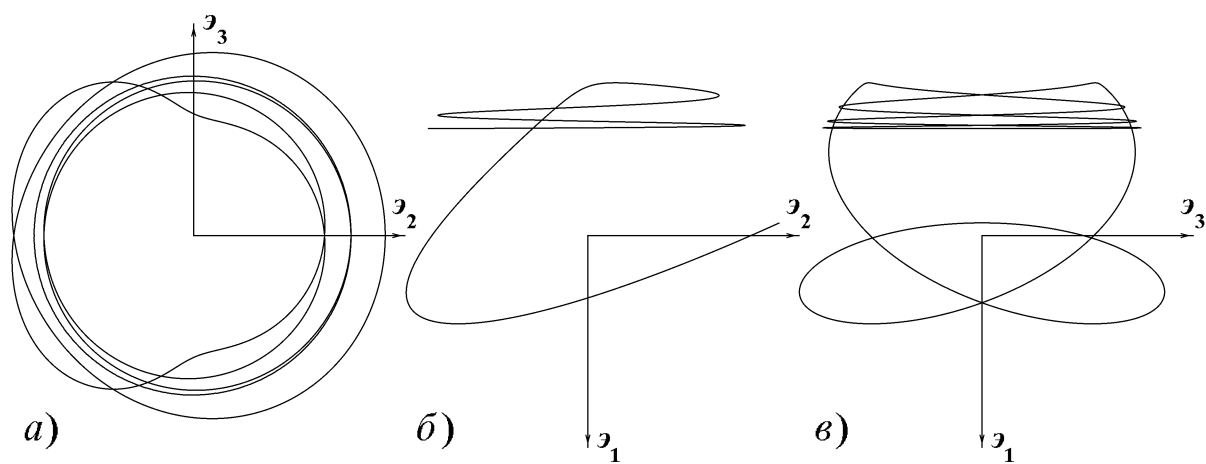


Рис. 5. Траектория центра масс.

При построении компьютерной анимации полных решений задач аналитической динамики зачастую желательно изображать положение и самого движущегося тела, представленного тем или иным образом. Будем рассматривать такое представление в виде трехосного эллипсоида, подобного центральному эллипсоиду инерции тела [7].

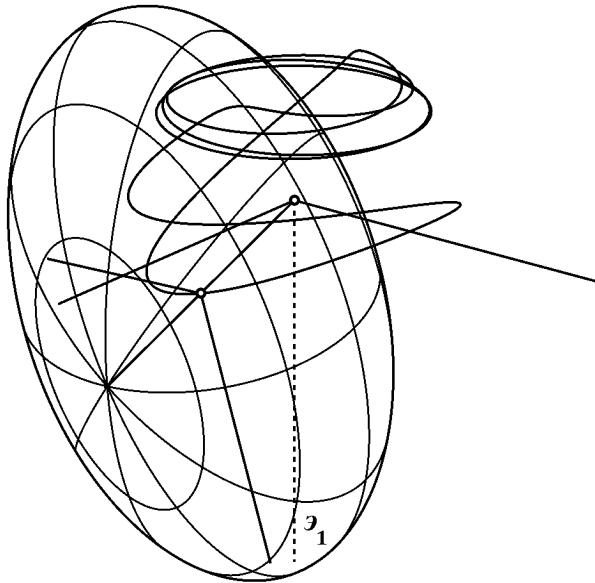


Рис. 6. Интерпретация движения.

Обозначим через A_1, A_2, A_3 главные центральные моменты инерции тела. Тогда из ограничения на главные моменты инерции в неподвижной точке $A = B = 2C$ получим соотношения

$$A_1 = 2(A_2 - A_3), \quad A_1 > A_2 > 2A_3.$$

Принимая во внимание, что $A_2 + A_3 > A_1$, получим: $A_2 < 3A_3$. Обозначим $A_3 = A_1\mu$, тогда $A_2 = A_1\left(\mu + \frac{1}{2}\right)$ и

$$1 > \mu + \frac{1}{2} > 2\mu, \quad 3\mu > \mu + \frac{1}{2},$$

откуда $\frac{1}{4} < \mu < \frac{1}{2}$. Положив $A_1 = 1/a^2$, $a > 0$, находим искомые полуоси изображаемого эллипсоида:

$$a_1 = a, \quad a_2 = a/\sqrt{\mu + \frac{1}{2}}, \quad a_3 = \frac{a}{\sqrt{\mu}}.$$

Такой эллипсоид вместе с траекторией центра масс, соответствующей движению, представленному на рис. 4, *a*, построен на рис. 6 для выбранных значений параметров $a = 1$ и $\mu = 0,251$ в предположении, что длина его первой полуоси совпадает с расстоянием от неподвижной точки до центра масс.

1. Коваль В.И., Харламов П.В. О годографах угловой скорости гироскопа Ковалевской в случае Делоне // Механика твердого тела.- 1979.- Вып.11.- С.3-17.
2. Харламов П.В., Коваль В.И. Движение гироскопа Ковалевской в случае Делоне // Там же.- 1982.- Вып.14.- С.38-54.
3. Харламов П.В. Движение гироскопа С.В.Ковалевской в случае Б.К.Млодзеевского // Там же. - 1974.- Вып.7.- С.9-17.
4. Харламов М.П. О построении годографов угловой скорости тела, имеющего неподвижную точку // Там же. - 1981.- Вып.13.- С.10-14.
5. Горр Г.В., Савченко А.Я. Об одном случае движения тяжелого твердого тела в решении С.В.Ковалевской // Там же.- 1970.- Вып.2.- С.66-73.
6. Горр Г.В., Савченко А.Я. Об одном периодическом движении в решении С.В.Ковалевской // Там же.- 1971.- Вып.3.- С.64-69.
7. Харламов А.П. Об изображении движущегося твердого тела при построении компьютерной визуализации полных решений задач динамики // Там же.- 1999.- Вып.28.- С.85-88.