УДК 531; 534

©2011. **Н.В. Перепелкин, Ю.В. Михлин**

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ В ДИНАМИКЕ ОДНОДИСКОВОГО РОТОРА

Предложено эффективное упрощение итерационного метода построения нелинейных нормальных форм колебаний Шоу–Пьера при наличии внутреннего резонанса. Суть упрощения состоит в частичном приведении системы к главным координатам, которое затрагивает только активные координаты, имеющие наибольшие амплитуды. Показано, что такой модифицированный метод может быть с успехом применен в задаче о динамике однодискового ротора на нелинейно-упругих массивных опорах.

Ключевые слова: *нелинейные нормальные формы колебаний, главные координаты, вынужденные колебания ротора.*

Введение. Аппарат теории нелинейных нормальных форм колебаний представляет собой совокупность методов, позволяющих анализировать поведение как автономных, так и неавтономных динамических систем. Данная теория, являющаяся обобщением теории нормальных колебаний линейных систем, позволяет описывать режимы движения, в которых система с несколькими степенями свободы ведет себя подобно системе с одной степенью свободы. Существуют две концепции нелинейных нормальных форм колебаний (ННФ). Концепция Каудерера–Розенберга [1, 2] пригодна для анализа консервативных систем и устанавливает взаимосвязь между переменными конфигурационного пространства описываемой системы в режиме нормальных колебаний. Концепция Шоу–Пьера [3, 4] пригодна для описания нормальных колебаний в неконсервативных системах и устанавливает взаимосвязь между переменными фазового пространства системы в таких режимах. Различные аспекты теории ННФ подробно изложены в работах [5, 6].

В данной работе рассматривается процесс построения ННФ Шоу–Пьера, излагается и обосновывается ряд модификаций стандартной процедуры построения нормальных колебаний, значительно упрощающих практическую реализацию данного метода и использование его для случая внутренних резонансов.

1. Построение нелинейных нормальных форм колебаний Шоу–Пьера. Рассмотрим уравнения движения механической системы в главных координатах (1):

$$\begin{cases} \dot{q}_i = s_i, \\ \dot{s}_i + \nu_i^2 q_i + f_{0i}(\mathbf{q}, \mathbf{s}) = 0, \quad i = \overline{1, N}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, ..., q_N\}^T$ и $\mathbf{s} = \{s_1, s_2, ..., s_N\}^T$ – соответственно векторы обобщенных перемещений и скоростей, функции f_{0i} являются аналитическими относительно компонент векторов $\mathbf{q}$, $\mathbf{s}$.

Среди решений системы (1) существуют такие, которые описывают режимы нормальных колебаний, т. е. колебательные движения, при которых система (1) с N степенями свободы ведет себя подобно системе с одной степенью свободы. Пусть перемещения по одной из обобщенных координат q_k оказываются существенно больше всех остальных. Согласно концепции, разработанной Шоу (S. Shaw) и Пьером (C. Pierre), $2N-2$ переменные фазового пространства динамической системы (1) могут быть выражены через две преобладающие (активные) фазовые координаты – выделенное обобщенное перемещение q_k и соответствующую скорость s_k [3, 4, 6]:

$$q_i = q_i(q_k, s_k), \quad s_i = s_i(q_k, s_k), \quad i = 1, 2, ..., k-1, k+1, ..., N. \tag{2}$$

Совокупность соотношений (2) задает k-ю нелинейную нормальную форму Шоу–Пьера динамической системы (1). Заметим, что система (1) является автономной. Обобщение на неавтономные системы возможно с использованием модифицированного метода Раушера, описанного в работах [5, 6].

В условиях внутреннего резонанса, когда имеется пара близких собственных частот колебаний, в системе выделяются не две, а четыре активные фазовые переменные. Это приводит к выделению пары главных координат и пары соответствующих скоростей с существенно большими, чем у остальных переменных, амплитудами колебаний. Такая ситуация возникает в задаче о вынужденных колебаниях однодискового ротора на изотропно-упругом валу и опорах, которая решается методом нормальных колебаний в работах [7, 8]. В этом случае в режиме нормальных колебаний все фазовые переменные должны быть выражены через четыре активные переменные, а система с N степенями свободы сводится к системе с двумя степенями свободы. Вместо зависимостей вида (2) используем следующие зависимости:

$$q_i = q_i(q_k, s_k, q_l, s_l), \qquad s_i = s_i(q_k, s_k, q_l, s_l), \qquad i = \overline{1, N}, \quad i \neq k, \quad i \neq l. \tag{3}$$

Таким образом, вводятся новые независимые переменные q_k, s_k, q_l, s_l. Рассмотрим теперь процесс получения зависимостей вида (3), присвоив для определенности активным переменным номера $k = 1, l = 2$. Запишем систему (1) в матричной форме:

$$\{\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{s}, \quad \dot{\mathbf{s}} + [K_0]\mathbf{q} + \mathbf{F}_0(\mathbf{q}, \mathbf{s}) = 0. \tag{4}$$

Переходя к новым независимым переменным, дифференцирование по времени t представим в виде линейного дифференциального оператора в частных производных L:

$$\frac{d}{dt} = L = \dot{q}_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + \dot{s}_1 \frac{\partial}{\partial s_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial}{\partial q_2} + \dot{s}_2 \frac{\partial}{\partial s_2}. \tag{5}$$

Система (4) в таком случае может быть записана следующим образом:

$$\left\{ L\mathbf{q} = \mathbf{s}, \quad L\mathbf{s} + [K_0]\mathbf{q} + \mathbf{F}_0(\mathbf{q},\, \mathbf{s}) = 0. \right. \tag{6}$$

В скалярной форме имеем

$$\left\{\begin{aligned} &\dot{q}_1 = s_1, \quad \dot{s}_1 + \nu_1^2 q_1 + f_{01}(\mathbf{q},\, \mathbf{s}) = 0,\\ &\dot{q}_2 = s_2, \quad \dot{s}_2 + \nu_2^2 q_2 + f_{02}(\mathbf{q},\, \mathbf{s}) = 0,\\ &\dot{q}_1\frac{\partial q_i}{\partial q_1} + \dot{s}_1\frac{\partial q_i}{\partial s_1} + \dot{q}_2\frac{\partial q_i}{\partial q_2} + \dot{s}_2\frac{\partial q_i}{\partial s_2} = s_i,\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i = \overline{3, N}\\ &\dot{q}_1\frac{\partial s_i}{\partial q_1} + \dot{s}_1\frac{\partial s_i}{\partial s_1} + \dot{q}_2\frac{\partial s_i}{\partial q_2} + \dot{s}_2\frac{\partial s_i}{\partial s_2} + \nu_i^2 q_i + f_{0i}(\mathbf{q},\, \mathbf{s}) = 0. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

С помощью первых четырех соотношений системы (7) можно исключить из оставшихся уравнений величины $\dot{q}_1, \dot{s}_1, \dot{q}_2, \dot{s}_2$, получив таким образом систему уравнений в частных производных, решением которых являются зависимости (3).

Решение полученной системы уравнений в частных производных может быть получено различными способами, в частности, в виде степенных рядов [3, 4, 6]:

$$\begin{aligned} &q_n = a_1^{(n)} q_1 + a_2^{(n)} s_1 + a_3^{(n)} q_2 + a_4^{(n)} s_2 + a_5^{(n)} q_1^2 + ...,\\ &s_n = b_1^{(n)} q_1 + b_2^{(n)} s_1 + b_3^{(n)} q_2 + b_4^{(n)} s_2 + b_5^{(n)} q_1^2 + ...; \quad n = \overline{3, N}. \end{aligned} \tag{8}$$

Подставляя выражения (8) в уравнения в частных производных, получим систему полиномиальных равенств относительно переменных q_1, s_1, q_2, s_2. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях q_1, s_1, q_2, s_2, получим алгебраические уравнения относительно неизвестных коэффициентов $a_j^{(n)}, b_j^{(n)}$. В этой группе уравнений выделяется замкнутая подсистема нелинейных уравнений относительно коэффициентов $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, b_1^{(n)}, b_2^{(n)}$ линейных частей разложений (8). Поскольку активные фазовые переменные q_1, s_1, q_2, s_2 в режиме нормальных колебаний имеют наибольшие амплитуды, то искомые зависимости (3) являются пологими поверхностями в пространствах переменных $(q_1, s_1, q_2, s_2, q_i)$ и $(q_1, s_1, q_2, s_2, s_i)$ соответственно, а значит, $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, b_1^{(n)}, b_2^{(n)}$ – малые величины, которые могут быть найдены численно в окрестности нуля. Алгебраические уравнения относительно других коэффициентов разложений (8) являются линейными и имеют рекуррентный характер: используя найденные величины $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, b_1^{(n)}, b_2^{(n)}$, можно определить коэффициенты при квадратичных членах в разложениях (8), затем коэффициенты при кубических членах разложений (8) и т.д.

Определив разложения (8), систему (1) можно свести к эквивалентной системе с двумя степенями свободы относительно активных переменных.

В описанной выше процедуре построения ННФ Шоу–Пьера необходимо проводить объемные аналитические преобразования на этапе построения системы вида (7), а также при получении из нее соотношений, необходимых для нахождения величин $a_j^{(n)}, b_j^{(n)}$. Если число уравнений системы вида (1) является значительным, то при компьютерной реализации описанного подхода вследствие оперирования громоздкими аналитическими выражениями возможно как неоправданно большое время счета, так и переполнение выделенной программе памяти. Предложенный ниже подход призван значительно упростить процедуру построения ННФ.

Предварительно отметим, что система вида (1), для которой ведется построение форм Шоу–Пьера, как правило, не является изначальной при проведении исследований. Она получается из другой системы уравнений, имеющей в матричной форме вид

$$[M]\ddot{\mathbf{x}} + [C]\mathbf{x} + \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = 0, \tag{9}$$

где $[M], [C]$ – матрицы масс и жесткости соответственно, вектор $\mathbf{\Phi}$ содержит нелинейные, диссипативные и гироскопические члены.

Эта исходная система уравнений (9) связана с системой в главных координатах (1) линейной заменой переменных $\mathbf{x} = [U]\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{x}} = [U]\mathbf{s}$, где $[U]$ – матрица собственных форм линеаризованной системы. Для перехода к уравнениям в главных координатах необходимо (9) умножить слева на $[M]^{-1}$ и $[U]^{-1}$ и сделать соответствующую замену переменных. В результате получим систему, которая является матричной формой записи системы (1):

$$\ddot{\mathbf{q}} + [K_0]\mathbf{q} + \mathbf{F}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0}. \tag{10}$$

2. Модификация процедуры построения ННФ Шоу–Пьера. Исходные уравнения (9) значительно проще, чем система (10), но среди переменных $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$ нельзя выделить преобладающие. Именно систему (10) приходится использовать при построении ННФ. Однако, так как $\mathbf{x}$ линейно зависит от $\mathbf{q}$, а все компоненты вектора $\mathbf{q}$ могут быть выражены через активные фазовые переменные (например, q_1, s_1, q_2, s_2) в форме степенных рядов, то и компоненты вектора $\mathbf{x}$ могут быть представлены в виде степенных рядов относительно активных фазовых переменных. Иначе говоря, одно и то же движение системы может быть описано как совокупность зависимостей $q_i(q_1, s_1, q_2, s_2), s_i(q_1, s_1, q_2, s_2)$, но в то же время его можно охарактеризовать зависимостями $x_i(q_1, s_1, q_2, s_2), y_i(q_1, s_1, q_2, s_2)$ (где y_i – обобщенные скорости исходной системы уравнений).

Идея модификации процедуры построения форм Шоу–Пьера состоит в том, чтобы вести построение по стандартной схеме (получение уравнений в частных производных, представление решения в виде степенных рядов и т.д.), однако разложения строить не для переменных фазового пространства системы в главных координатах, а для переменных фазового пространства исходной системы (9) $\{\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}\}$, оперируя системой уравнений, максимально приближенных к уравнениям (9), а значит, более простых.

Наряду с набором переменных $\mathbf{x} = \{x_1, x_2 ..., x_N\}^T$, описывающих движение исходной системы (9), и переменными $\mathbf{q} = \{q_1, q_2 ..., q_N\}^T$, описывающих движение системы в главных координатах, рассмотрим некоторый промежуточный набор переменных $\mathbf{x}^* = \{q_1, q_2, x_3, x_4 ..., x_N\}^T$ и соответствующую ему промежуточную, *частично приведенную к главным координатам,* систему уравнений (11):

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \nu_1^2 q_1 + f_1^*(\mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*) = 0, \\ \ddot{q}_2 + \nu_2^2 q_2 + f_2^*(\mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*) = 0, \\ \ddot{x}_3 + k_{31}^* q_1 + k_{32}^* q_2 + k_{33}^* x_3 + ... + k_{3N}^* x_N + f_3^*(\mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*) = 0, \\ \ddot{x}_4 + k_{41}^* q_1 + k_{42}^* q_2 + k_{43}^* x_3 + ... + k_{4N}^* x_N + f_4^*(\mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*) = 0, \\ \dots \\ \ddot{x}_N + k_{N1}^* q_1 + k_{N2}^* q_2 + k_{N3}^* x_3 + ... + k_{NN}^* x_N + f_N^*(\mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

или в матричном виде

$$\ddot{\mathbf{x}}^* + [K^*]\mathbf{x}^* + \mathbf{F}^*(\mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*) = \mathbf{0}. \tag{12}$$

Такая система является полностью эквивалентной системам (9) и (10) и связана с каждой из них с помощью соответствующих линейных преобразований.

Если предположить, что все величины $x_i \quad (i = \overline{3, N})$ в режиме нормальных колебаний могут быть однозначно выражены через $q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2$, то определить такую зависимость можно при помощи процедуры, изложенной в п. 1, и сводящейся к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных относительно неизвестных функций $x_k(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2), y_k(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2), \quad k = \overline{3, N}$. Эта система имеет следующий вид:

$$\left\{ L\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^*, \quad L\mathbf{y}^* + [K^*]\mathbf{x}^* + \mathbf{F}^*(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = 0, \right. \tag{13}$$

где оператор L введен равенством (5).

Решение системы также можно представить в виде степенных рядов с неизвестными коэффициентами:

$$\begin{aligned} x_n &= a_1^{*(n)} q_1 + a_2^{*(n)} s_1 + a_3^{*(n)} q_2 + a_4^{*(n)} s_2 + a_5^{*(n)} q_1^2 + \dots , \\ y_n &= b_1^{*(n)} q_1 + b_2^{*(n)} s_1 + b_3^{*(n)} q_2 + b_4^{*(n)} s_2 + b_5^{*(n)} q_1^2 + \dots ; \quad n = \overline{3, N}. \end{aligned} \tag{14}$$

Процедура поиска коэффициентов аналогична процедуре, изложенной в п. 1.

Поскольку, как будет показано в п. 3, пара векторов $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{q}$, равно как и пара $\mathbf{y}^*$ и $\mathbf{s}$, связаны между собой линейными соотношениями $\mathbf{x}^* = [P]\mathbf{q}$, $\mathbf{y}^* = [P]\mathbf{s}$, то нетрудно показать, что система (13) полностью эквивалентна системе, получаемой из уравнений (7).

Итак, одни и те же режимы нормальных колебаний, описываемые нормальными формами Шоу–Пьера, могут быть получены как при рассмотрении уравнений в главных координатах (10), так и при рассмотрении более простой системы уравнений (12).

Замечание. Несмотря на то, что, теоретически, коэффициенты при линейных членах разложений (14) могут быть найдены в результате численного решения соответствующей системы нелинейных алгебраических уравнений, реально осуществить это не всегда просто. Это связано с тем, что среди фазовых переменных системы (12) нельзя выделить преобладающие, а значит, коэффициенты $a_1^{*(n)}, a_2^{*(n)}, b_1^{*(n)}, b_2^{*(n)}$, в отличие от аналогичных величин в разложениях (8), не обязательно малы, и искать их в окрестности нуля нельзя. Для нахождения этих величин необходим ряд дополнительных действий.

Разложения (8) можно представить в таком матричном виде:

$$\mathbf{q} = [A]\mathbf{w}, \qquad \mathbf{s} = [B]\mathbf{w}, \tag{15}$$

где $\mathbf{w} = \left\{q_1, s_1, q_2, s_2, q_1^2, s_1^2, q_2^2, s_2^2, q_1 s_1, q_1 q_2, q_1 s_2, \ldots, \right\}^T$,

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & a_4^{(3)} & a_5^{(3)} & \ldots \\ a_1^{(4)} & a_2^{(4)} & a_3^{(4)} & a_4^{(4)} & a_5^{(4)} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ b_1^{(3)} & b_2^{(3)} & b_3^{(3)} & b_4^{(3)} & b_5^{(3)} & \ldots \\ b_1^{(4)} & b_2^{(4)} & b_3^{(4)} & b_4^{(4)} & b_5^{(4)} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Разложения (14) можно записать как

$$\mathbf{x}^* = [A^*]\mathbf{w}, \qquad \mathbf{y}^* = [B^*]\mathbf{w}, \tag{17}$$

где матрицы $[A^*]$ и $[B^*]$ аналогичны матрицам $[A]$ и $[B]$.

С другой стороны, $\mathbf{x}^* = [P]\mathbf{q}$, $\mathbf{y}^* = [P]\mathbf{s}$, а значит, справедливо следующее:

$$[A^*]\mathbf{w} = [P][A]\mathbf{w}, \qquad [B^*]\mathbf{w} = [P][B]\mathbf{w}, \tag{18}$$

$$[A^*] = [P][A], \qquad [B^*] = [P][B]. \tag{19}$$

Соотношения (19) позволяют связать коэффициенты $a_k^{*(n)}, b_k^{*(n)}$ разложений (14) с коэффициентами $a_k^{(n)}, b_k^{(n)}$ разложений (8), которые являются малыми. Это позволяет привести разрешающие уравнения относительно $a_1^{*(n)}, a_2^{*(n)}, b_1^{*(n)}, b_2^{*(n)}$ к уравнениям относительно $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, b_1^{(n)}, b_2^{(n)}$ и искать решение этой системы в окрестности нуля.

3. Получение системы уравнений, частично приведенной к главным координатам, и ее свойства. Векторы $\mathbf{x}, \mathbf{q}$ и $\mathbf{x}^*$, описанные в п. 2, связаны между собой линейными невырожденными преобразованиями (то же справедливо и для соответствующих скоростей):

$$\mathbf{x} = [U]\mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{x} = [T]\mathbf{x}^*, \qquad \mathbf{x}^* = [P]\mathbf{q}, \tag{20}$$

где $[U]$ – матрица собственных форм системы (9).

Вводя новые обозначения $\mathbf{x}_{12} = \{x_1, x_2\}^T$, $\mathbf{x}_{3N} = \{x_3, x_4, \ldots, x_N\}^T$, $\mathbf{q}_{12} = \{q_1, q_2\}^T$, $\mathbf{q}_{3N} = \{q_3, q_4, \ldots, q_N\}^T$, равенства (20) представим в блочно-матричной форме

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{12} \\ \mathbf{x}_{3N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{2\times 2}{U_1} & \overset{2\times m}{U_2} \\ \overset{m\times 2}{U_3} & \overset{m\times m}{U_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{12} \\ \mathbf{q}_{3N} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{12} \\ \mathbf{x}_{3N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{2\times 2}{T_1} & \overset{2\times m}{T_2} \\ \overset{m\times 2}{T_3} & \overset{m\times m}{T_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{12} \\ \mathbf{x}_{3N} \end{bmatrix}, \tag{21}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_{12} \\ \mathbf{x}_{3N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{2\times 2}{P_1} & \overset{2\times m}{P_2} \\ \overset{m\times 2}{P_3} & \overset{m\times m}{P_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{12} \\ \mathbf{q}_{3N} \end{bmatrix}.$$

Над составляющими матрицы блоками вверху записана их размерность, при этом $m = N - 2$. Из соотношений (21) следует, что $P_1 = \overset{2\times 2}{I}$, где I – единичная матрица; $P_2 = \overset{2\times m}{\mathrm{O}}$, где О – нулевая матрица; $T_3 = \overset{m\times 2}{\mathrm{O}}$, $T_4 = \overset{m\times m}{I}$. Зная это, из условия $[U] = [T][P]$ получаем, что $P_3 = U_3$, $P_4 = U_4$, что позволяет полностью определить матрицу $[P]$. Тогда $[T] = [P]^{-1}[U]$.

Теперь выведем систему дифференциальных уравнений относительно переменных $\mathbf{x}^*$, описывающую движение системы. Повторяя процедуру перехода от системы (9) к системе (10) и учитывая, что $\mathbf{x} = [T][P]\mathbf{q}$, получим

$$[T][P]\ddot{\mathbf{q}} + [K][T][P]\mathbf{q} + \mathbf{F}\big([T][P]\mathbf{q},\, [T][P]\dot{\mathbf{q}}\big) = 0. \tag{22}$$

Умножая слева на $[U]^{-1}$, т.е. на $[P]^{-1}[T]^{-1}$, и учитывая, что $\mathbf{x}^* = [P]\mathbf{q}$, получаем после несложных преобразований

$$\ddot{\mathbf{x}}^* + [T]^{-1}[K][T]\mathbf{x}^* + [T]^{-1}\mathbf{F}\big([T]\mathbf{x}^*, [T]\dot{\mathbf{x}}^*\big) = 0, \tag{23}$$

что представляет иную форму записи уравнений (12) и демонстрирует способ их получения из уравнений (9). Итак, имеем следующую связь между матрицами, которые определяют связь системы (12) с системами (9) и (10):

$$[T]^{-1}[K][T] = [K^*], \quad [P]^{-1}[K^*][P] = [K_0], \tag{24}$$

$$[T]^{-1}\mathbf{F}\big([T]\mathbf{x}^*, [T]\mathbf{y}^*\big) = \mathbf{F}^*\big(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*\big), \quad [P]^{-1}\mathbf{F}^*\big([P]\mathbf{q}, [P]\mathbf{s}\big) = \mathbf{F}_0\big(\mathbf{q}, \mathbf{s}\big). \tag{25}$$

Запишем теперь системы (9), (12), (10) в блочно-матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_{12} \\ \ddot{\mathbf{x}}_{3N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overset{2\times 2}{K_1} & \overset{2\times m}{K_2} \\ \overset{m\times 2}{K_3} & \overset{m\times m}{K_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{12} \\ \mathbf{x}_{3N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{12}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{F}_{3N}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \end{bmatrix} = 0, \tag{26}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}^*_{12} \\ \ddot{\mathbf{x}}^*_{3N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overset{2\times 2}{K^*_1} & \overset{2\times m}{K^*_2} \\ \overset{m\times 2}{K^*_3} & \overset{m\times m}{K^*_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^*_{12} \\ \mathbf{x}^*_{3N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}^*_{12}(\mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*) \\ \mathbf{F}^*_{3N}(\mathbf{x}^*, \dot{\mathbf{x}}^*) \end{bmatrix} = 0, \tag{27}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_{12} \\ \ddot{\mathbf{q}}_{3N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overset{2\times 2}{K_{0\,12}} & \overset{2\times m}{\mathrm{O}} \\ \overset{m\times 2}{\mathrm{O}} & \overset{m\times m}{K_{0\,3\mathrm{N}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{12} \\ \mathbf{q}_{3N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{0\,12}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{F}_{3N}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} = 0. \tag{28}$$

Переход от (26) к (27) сопряжен с умножением системы (26) на $[T]^{-1}$, переход от (27) к (28) сопряжен с умножением системы (27) на $[P]^{-1}$. Матрицы $[T]^{-1}$ и $[P]^{-1}$ имеют следующую структуру:

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} \overset{2\times 2}{\widetilde{T_1}} & \overset{2\times m}{\widetilde{T_2}} \\ \overset{m\times 2}{\mathrm{O}} & \overset{m\times m}{I} \end{bmatrix}, \qquad [P]^{-1} = \begin{bmatrix} \overset{2\times 2}{I} & \overset{2\times m}{\mathrm{O}} \\ \overset{m\times 2}{\widetilde{P_3}} & \overset{m\times m}{\widetilde{P_4}} \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Тогда из второго выражения зависимостей (24) при рассмотрении его в блочной форме следует, что $K_2^* = \overset{2\times m}{\mathrm{O}}$, $K_1^* = K_{0\,12}$. Также получаем, что первые два уравнения системы (12) с точностью до замены переменных в векторе, содержащем нелинейные и диссипативные члены, совпадают с первыми двумя уравнениями системы (10) в главных координатах.

Из (21) следует, что $\mathbf{x}_{12} = T_1\mathbf{q}_{12} + T_2\mathbf{x}_{3N}$, тогда после подстановки $\mathbf{x} = [T]\mathbf{x}^*$ в (26) получим

$$\ddot{\mathbf{x}}_{3N}^* + K_3T_1\mathbf{q}_{12} + (K_3T_2 + K_4)\mathbf{x}_{3N}^* + \mathbf{F}_{3N}\big([T]\mathbf{x}^*,\, [T]\dot{\mathbf{x}}^*\big) = 0. \tag{30}$$

Уравнения (30) представляют собой уравнения с номерами от 3 до N исходной системы (26), в которых была произведена замена переменных $\mathbf{x} = [T]\mathbf{x}^*$. Уравнения (30) являются частью системы (27), или в иной форме, уравнений (12).

Таким образом, система (12), частично приведенная к главным координатам и сформулированная относительно вектора переменных $\mathbf{x}^* = \{q_1, q_2, x_3,\ x_4, ..., x_N\}^T$, *состоит из двух дифференциальных уравнений второго порядка, взятых из системы (10) в главных координатах, а также из* $N-2$ *уравнений исходной системы (9), причем во всех этих уравнениях исключены переменные, не входящие в вектор* $\mathbf{x}^*$, *что возможно сделать с использованием условия* $\mathbf{x} = [U]\boldsymbol{q}$.

Замечание. Активными координатами можно заменять любые два перемещения, входящие в вектор $\mathbf{x}$ (при условии, что это не породит вырожденные матрицы $[T]$ и $[P]$).

4. Динамика однодискового неуравновешенного ротора на нелинейно-упругих массивных опорах. В этом пункте описанная выше методика используется для исследования динамики неуравновешенного однодискового ротора с изотропно-упругим валом на податливых изотропных нелинейно-упругих опорах. В отличие от модели, рассмотренной в [7], здесь учитываются инерционные силы в опорах. Учитывается наличие внутреннего резонанса, который всегда имеет место для ротора с изотропно-упругими опорами и валом. Краткий обзор литературы, относящейся к нелинейной динамике роторов, также можно найти в работе [7].

Рассмотрим однодисковый неуравновешенный асимметричный ротор с изотропно-упругими валом и опорами в неподвижной системе координат XYZ (рис. 1, a).

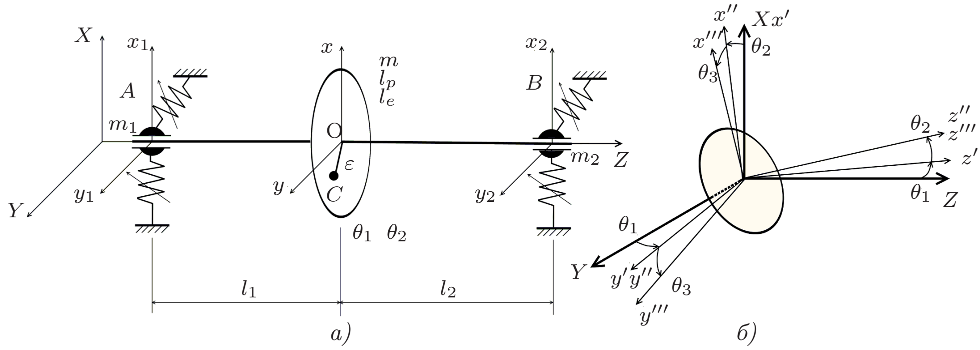


Рис. 1. Модель однодискового ротора с нелинейными массивными опорами (а); подвижная и неподвижная системы координат диска (б).

Пусть восстанавливающая сила в опорах описывается следующим выражением: $P = k_1x + k_2x^3$. Подвижная система координат, связанная с вращающимся диском, показана на рис. 1, *б*. Позиционные углы $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ определяют взаимосвязь подвижной и неподвижной систем координат.

Уравнения вынужденных колебаний данной системы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&m\ddot{x} + \rho_1\dot{x} + c_{11}(x - h_1x_2 - h_2x_1) + c_{12}(\theta_2 - (x_2 - x_1)/I) = \varepsilon\Omega^2 m\cos\Omega t,\\
&m\ddot{y} + \rho_1\dot{y} + c_{11}(y - h_1y_2 - h_2y_1) + c_{12}(-\theta_1 - (y_2 - y_1)/l) = \varepsilon\Omega^2 m\sin\Omega t,\\
&I_e\ddot{\theta}_1 + \rho_2\dot{\theta}_1 + I_p\Omega\dot{\theta}_2 - c_{21}(y - h_1y_2 - h_2y_1) - c_{22}(-\theta_1 - (y_2 - y_1)/l) = 0,\\
&I_e\ddot{\theta}_2 + \rho_2\dot{\theta}_2 - I_p\Omega\dot{\theta}_1 + c_{21}(x - h_1x_2 - h_2x_1) + c_{22}(\theta_2 - (x_2 - x_1)/l) = 0,\\
&m_1\ddot{x}_1 + \beta\dot{x}_1 + s_1(x - h_1x_2 - h_2x_1) + s_2(\theta_2 - (x_2 - x_1)/l) + c_x^{(1)}x_1 + c_x^{(2)}x_1^3 = 0,\\
&m_1\ddot{y}_1 + \beta\dot{y}_1 + s_1(y - h_1y_2 - h_2y_1) + s_2(-\theta_1 - (y_2 - y_1)/l) + c_y^{(1)}y_1 + c_y^{(2)}y_1^3 = 0,\\
&m_2\ddot{x}_2 + \beta\dot{x}_2 + s_3(x - h_1x_2 - h_2x_1) + s_4(\theta_2 - (x_2 - x_1)/l) + k_x^{(1)}x_2 + k_x^{(2)}x_2^3 = 0,\\
&m_2\ddot{y}_2 + \beta\dot{y}_2 + s_3(y - h_1y_2 - h_2y_1) + s_4(-\theta_1 - (y_2 - y_1)/l) + k_y^{(1)}y_2 + k_y^{(2)}y_2^3 = 0,
\end{aligned} \tag{31}$$

где m, I_p, I_e – масса и моменты инерции диска; m_1, m_2 – массы опор; $c_{11} = 3EJ\dfrac{l_1^3 + l_2^3}{l_1^3 l_2^3}$, $c_{12} = c_{21} = 3EJl\dfrac{l_1 - l_2}{l_1^2 l_2^2}$, $c_{22} = 3EJ\dfrac{l}{l_1 l_2}$ – статические коэффициенты жесткости вала; ε – эксцентриситет диска; Ω – частота вращения ротора; β, ρ_1, ρ_2 – коэффициенты демпфирования перемещений опор и диска; $c_x^{(1)}, c_y^{(1)}$ и $k_x^{(1)}, k_y^{(1)}$ – коэффициенты, характеризующие линейную часть восстанавливающих сил в опорах (для левой и правой опор соответственно); $c_x^{(2)}, c_y^{(2)}$ и $k_x^{(2)}, k_y^{(2)}$ – аналогичные коэффициенты, определяющие нелинейные компоненты восстанавливающих сил; $h_1 = l_1/l, \quad h_2 = l_2/l,$

$$s_1 = c_{12}/l - c_{11}h_2,\ s_2 = c_{22}/l - c_{12}h_2,\ s_3 = -c_{12}/l - c_{11}h_1,\ s_4 = -c_{22}/l - c_{12}h_1.$$

Теорию нелинейных нормальных форм колебаний можно использовать и в неавтономных системах, что позволяет построить резонансные вынужденные колебания [5, 6]. При этом используется метод Раушера, впервые предложенный для систем с одной степенью свободы [9], который позволяет в режиме вынужденных колебаний заменить неавтономную систему эквивалентной автономной. Обобщение метода Раушера на системы с несколькими степенями свободы было предложено в работе [10]. Система уравнений (31), в соответствие с методикой, описанной в пп. 2, 3, должна быть представлена в виде системы, частично приведенной к главным координатам. При этом вводятся активные в окрестности первого резонанса главные координаты q_1, q_2 (изменение каждой из них соответствует первой форме собственных колебаний) вместо координат x, y. Таким образом, первые два уравнения из системы (31) заменяются на два уравнения из системы уравнений в главных координатах. Полученная система, частично приведенная к главным координатам, здесь не представлена.

Для дальнейших числовых расчетов используются следующие значения параметров ротора:

$$\begin{gathered} m_1 = m_2 = 2\,\textit{кг},\quad m = 12\,\textit{кг},\quad I_e = 0.1225\,\textit{кг}\cdot\textit{м}^2,\quad I_p = 0.24\,\textit{кг}\cdot\textit{м}^2,\quad l = 0.8\,\textit{м}, \\ l_1 = 0.24\,\textit{м},\qquad \varepsilon = 0.00003\,\textit{м},\qquad c_x^{(1)} = c_y^{(1)} = k_x^{(1)} = k_y^{(1)} = 7\cdot 10^5\,\textit{Н/м}, \\ c_x^{(2)} = c_y^{(2)} = k_x^{(2)} = k_y^{(2)} = 8\cdot 10^{10}\,\textit{Н/м}^3,\qquad E = 2.1\cdot 10^{11}\,\textit{Па},\qquad \beta = 60\,\textit{Н}\cdot\textit{с/м}, \\ \rho_1 = 5\textit{Н}\cdot\textit{с/м},\qquad \rho_2 = 5\textit{Н}\cdot\textit{с},\qquad J = 3.976\cdot 10^{-8}\,\textit{м}^4. \end{gathered}$$

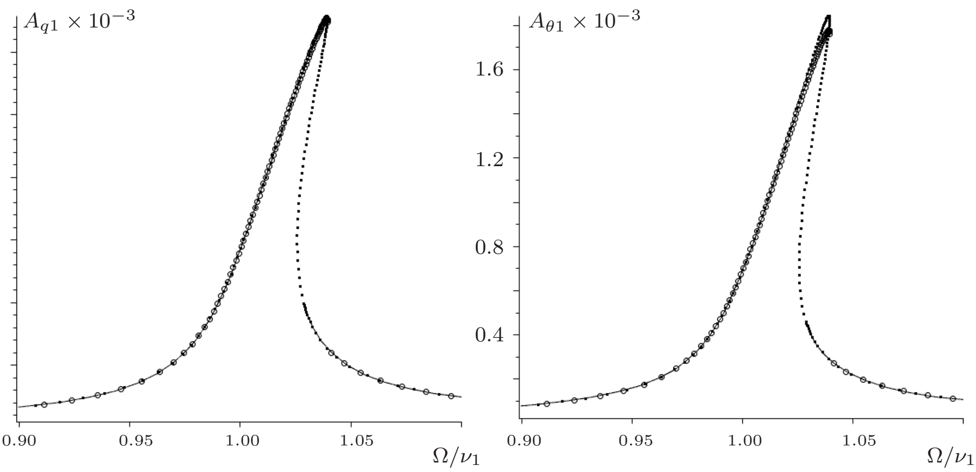
Было произведено масштабирование всех переменных с масштабным коэффициентом 0.001, а также произведена нормировка времени: $\tau = \nu_1 t$, $\omega = \Omega/\nu_1$, где ν_1 – первая собственная частота, равная для выбранных значений параметров $211.54\,c^{-1}$. Полагаем, что выполняется условие резонанса $\Omega \approx \nu_1 \approx \nu_2$. (Для рассматриваемой модели ротора $\nu_1 = \nu_2$).

Процедура применения метода Раушера описана в работах [7, 8]. В этом случае после некоторых преобразований внешнее периодическое воздействие приближенно заменяется следующим разложением по активным переменным q_1, s_1, q_2, s_2:

$$\cos(\Omega t) = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 s_1 + \alpha_3 q_2 + \alpha_4 s_2 + \alpha_5 q_1^2 + \alpha_6 s_1^2 + \ldots\ ;\quad \sin(\Omega t) = \ldots\ . \tag{32}$$

В результате в режиме нормальных форм вынужденных колебаний исходная неавтономная система заменяется эквивалентной автономной системой, получаемой в результате подстановки (32). Именно в переходе к автономной системе и состоит основная идея метода Раушера. Далее следует, как описано в пп. 2, 3, построить нормальные формы Шоу–Пьера в новой, эквивалентной системе. Нелинейные нормальные формы колебаний определяются в виде степенных рядов вида (14) по четырем выделенным фазовым переменным. В результате в режиме нормальных колебаний исходная система (31), имеющая восемь степеней свободы, сводится к системе с двумя степенями свободы, что позволяет найти периодическое решение для активных фазовых переменных методом гармонического баланса, а затем определить новые зависимости вида (32). Далее, как описано в работах [7, 8], можно построить итерационный процесс нахождения резонансных вынужденных колебаний с необходимой точностью.

На рис. 2 представлены амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) ротора вблизи первого резонанса. На рис. 2, *а* избражены амплитуды первой гармоники активной обобщенной координаты q_1; на рис. 2, *б* – амплитуды первой гармоники перемещения диска θ_1. АЧХ получены с помощью применения итерационной процедуры метода ННФ к уравнениям в главных координатах (линии), к частично приведенной системе уравнений (окружности), а также методом гармонического баланса (точки).

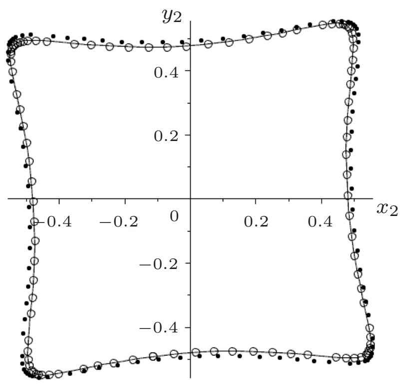


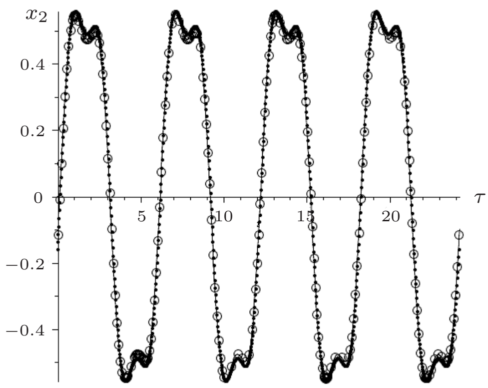
а) *б)*

Рис. 2. Сравнение АЧХ ротора, полученных тремя методами.

Очевидно, что процедура частичного приведения к главным координатам дает столь же точные результаты, как и стандартная процедура, и не уступает в точности другим методам расчета резонансных колебаний. Однако эта процедура значительно облегчает проведение аналитических и числовых преобразований при конкретном расчете.

Результаты сравнительного расчета траектории перемещения в опоре B, а также изменение перемещения в опоре x_2 во времени представлены на рис. 3 (единица измерения – мм).





а) *б)*

Рис. 3. Результаты сравнительного расчета траектории $y_2 = y_2(x_2)$ и изменения во времени перемещения $x_2 = x_2(\tau)$.

На рис. 3, *а* представлена траектория перемещения в опоре B, на рис. 3, *б* – изменение во времени перемещения x_2. Линии представляют результаты расчета с применением итерационной процедуры метода ННФ, применяемой к уравнениям в главных координатах. Окружности соответствуют аналогичному расчету для частично приведенной системы уравнений. Точки соответствуют результатам, полученным с использованием метода гармонического баланса.

Выводы. Показано, что вычислительную процедуру определения нелинейных нормальных форм колебаний Шоу–Пьера при наличии внутреннего резонанса можно существенно упростить. Основное упрощение состоит в частичном приведении системы к главным координатам, которое затрагивает только активные координаты, имеющие наибольшие амплитуды. Модифицированный метод расчета нелинейных нормальных форм колебаний использован для расчета вынужденных резонансных колебаний однодискового ротора на нелинейно-упругих массивных опорах. При этом, помимо наличия вынужденного резонанса в системе, учтено также наличие инерционных сил в нелинейно-упругих опорах. Предложенная процедура расчета может быть использована в задачах динамики различных механических систем в условиях внутреннего резонанса.

1. *Rosenberg R.* Nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom // Adv. of Appl. Mech. – 1966. – **9**. – P. 156–243.
2. *Mikhlin Yu.* Normal vibrations of a general class of conservative oscillators // Nonl. Dyn. – 1996. – **11**. – P. 1–16.

3. *Shaw S., Pierre C.* Nonlinear normal modes and invariant manifolds // J. of Sound and Vibration. – 1991. – **150**. – P. 170–173.
4. *Shaw S. and Pierre C.* Normal modes for nonlinear vibratory systems //J. of Sound and Vibration. – 1993. – **164**. – P. 85–124.
5. *Vakakis A., Manevitch L., Mikhlin Yu., Pilipchuk V., Zevin A.* Normal modes and localization in nonlinear systems. – New-York: Wiley, 1996. – 552 p.
6. *Аврамов К.В., Михлин Ю.В.* Нелинейная динамика упругих систем. – М.;Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2010. – 704 с.
7. *Перепелкин Н.В., Михлин Ю.В.* Анализ вынужденных форм колебаний однодискового ротора на нелинейно-упругих опорах // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 221–232.
8. *Mikhlin Y.V., Perepelkin N.V.* Non-linear normal modes and their applications in mechanical systems // Proc. of the Institution of Mechanical engineers, Part C: J. of Mechanical engineering science. – 2011. – **225**(10). – P. 2369–2384.
9. *Rauscher M.* Steady oscillations of system with nonlinear and unsymmetrical elasticity // J. Appl. Mech. – 1938. – **5**. – A–169.
10. *Mikhlin Yu.V.* Resonance modes of near-conservative nonlinear systems // Appl. Math. Mech. (PMM USSR). – 1974. – **38**(3). – P. 425–429.

N.V. Perepelkin, Yu.V. Mikhlin

Analysis of forced vibration modes of a one-disk rotor on a nonlinear flexible base

The effective simplification of the iteration method of construction of the nonlinear normal vibration modes by Shaw-Pierre taking into account the inner resonance is proposed. The simplification consists of the system partial reduction to principal coordinates, which affects only active coordinates having the largest amplitudes. It is shown that the modified method can be successfully used in a problem of the one-disk rotor on nonlinear flexible inertial supports dynamics.

Keywords: *nonlinear normal vibration modes, principal coordinates, forced vibrations of a rotor.*

М.В. Перепелкін, Ю.В. Міхлін

Модифікований метод побудови нормальних форм вимушених коливань та його застосування в динаміці однодискового ротора

Запропоновано ефективне спрощення ітераційного методу побудови нелінійних нормальних форм коливань Шоу–П'єра при наявності внутрішнього резонансу. Суть спрощення полягає в частковому приведенні системи до головних координат, яке торкається лише активних координат, що мають найбільші амплітуди. Показано, що такий модифікований метод може бути з успіхом запропонований в задачі щодо динаміки однодискового ротора на нелінійно-пружних масивних опорах.

Ключові слова: *нелінійні нормальні форми коливань, головні координати, вимушені коливання ротора.*

Национальный техн. ун-т "Харьковский политехн. ин-т"

Получено 14.10.11

muv@kpi.kharkov.ua