УДК 531.36

©2002. **А.С. Андреев, Т.А. Бойкова**

ЗНАКОПОСТОЯННЫЕ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧАХ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ

В работе рассматривается задача о применении знакопостоянных функций Ляпунова в исследовании устойчивости невозмущенного движения неавтономной системы. Представлено целостное решение этой задачи, и его применение в задаче об устойчивости невозмущенного движения механической системы с первыми интегралами.

Как известно, модификация, развитие и обобщение основных теорем Ляпунова об устойчивости движения с применением вспомогательных функций позволяет значительно расширить классы решаемых теоретических и прикладных задач.

Первые результаты по такому развитию в направлении применения знакопостоянных функций Ляпунова были получены в работе[1]. В их основе лежит использование свойства инвариантности положительного предельного множества решения автономной системы.

Дальнейшее продолжение это направление получило в работах [2–9]. В работах [2–5] рассматривались автономная и периодическая системы дифференциальных уравнений. В работах [7–9] эти результаты на основе построений из [10–13] развивались на неавтономную систему.

В данной работе дается целостное применение техники вывода теорем об асимптотической устойчивости нулевого решения неавтономной системы из [12,13] для случая знакопостоянных функций Ляпунова.

Рассмотрим систему, движение которой описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}), \qquad \mathbf{X}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}, \tag{1}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)'$ — вектор n-мерного действительного пространства R^n с нормой $||\mathbf{x}||^2 = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$, (штрих означает транспонирование); $\mathbf{X}(t, \mathbf{x})$ – вектор-функция, определенная и непрерывная в области $R^+ \times \Gamma$; $R^+ = [0, +\infty)$ – действительная полуось, $\Gamma \subset R^n$ – открытая область, содержащая точку $\mathbf{x} = 0$.

Допустим, что вектор-функция $\mathbf{X}(t, \mathbf{x})$ ограничена и удовлетворяет условию Липшица: для любого компактного множества $K \subset \Gamma$ найдется число $L = L(K)$, такое, что

$$||\mathbf{X}(t, \mathbf{x}_2) - \mathbf{X}(t, \mathbf{x}_1)|| \leq L||\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|| \tag{2}$$

для любого $t \in R^+$ и любых точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$.

Отсюда следует, что для каждого начального условия $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, $(t_0, \mathbf{x}_0) \in R^+ \times \Gamma$, существует единственное решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ определенное на максимальном интервале $[t_0, \beta)$, $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0) \to \partial\Gamma$ при $t \to \beta$.

Кроме того, система (1) предкомпактна [10–12]: для любой последовательности $t_k \to +\infty$ найдется подпоследовательность $t_{kl} \to +\infty$, относительно которой существу-

Работа выполнена при финансовой поддержке программы "Университеты России – Фундаментальные исследования"(проект УР.04.01.004).

ет предельная система уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}^*(t,\mathbf{x}), \quad \mathbf{X}^*(t,\mathbf{x}) = \frac{d}{dt}\lim_{l\to\infty}\int\limits_0^t \mathbf{X}(t_{kl}+\tau,\mathbf{x})d\tau. \tag{3}$$

Функция $\mathbf{X}^* : R\times\Gamma \to R^n$ в соответствии с этим определением и в силу условия (2) будет такова, что для каждой точки $(t_0,\mathbf{x}_0)\in R\times\Gamma$ решение $\mathbf{x}=\mathbf{x}^*(t,t_0,\mathbf{x}_0)$ системы (3) является также единственным.

Предположим, что для системы (1) известна некоторая непрерывная функция Ляпунова $V : R^+\times\Gamma\to R^+$, верхняя правосторонняя производная [14] которой в силу системы (1) удовлетворяет для всех $(t,\mathbf{x})\in R^+\times\Gamma$ неравенству

$$\dot{V}^+(t,\mathbf{x}) \le -W(t,\mathbf{x}) \le 0,$$

где $W : R^+\times\Gamma\to R^+, W(t,0)=0$, есть некоторая непрерывная функция, удовлетворяющая условию Липшица

$$|W(t,\mathbf{x}_2)-W(t,\mathbf{x}_1)| \le L_W(K)\|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\|$$

для любых $(t,\mathbf{x}_2),(t,\mathbf{x}_1)\in R^+\times K$ и для каждого компакта $K\subset\Gamma$. При этом условии семейство сдвигов $\{W_\tau(t,\mathbf{x})=W(\tau+t,\mathbf{x}),\tau\in R\}$ предкомпактно [12] и аналогично (3) можно определить предельную функцию

$$W^*(t,\mathbf{x}) = \frac{d}{dt}\lim_{j\to\infty}\int\limits_0^t W(t_{klj}+\tau,\mathbf{x})d\tau$$

и предельную пару $(\mathbf{X}^*,W^*)$ [12].

Соответственно предельной паре для каждого $t\in R$ и каждого $c\in R^+$ вводится предельное множество [12]

$$V_\infty^{-1}(t,c) = \{\mathbf{x}\in\Gamma : \exists\mathbf{x}_j\to\mathbf{x} : V(t_{klj}+t,\mathbf{x}_j)\to c \text{ при } j\to\infty\}.$$

В частности $V_\infty^{-1}(t,0) = \{\mathbf{x}\in\Gamma : \exists\mathbf{x}_j\to\mathbf{x} : V(t_{klj}+t,\mathbf{x}_j)\to 0 \text{ при } j\to\infty\}$.

Введем следующие определения.

Определение 1. Нулевое решение $\mathbf{x}=0$ устойчиво относительно выбранной предельной пары $(\mathbf{X}^*,W^*)$ и множества $V_\infty^{-1}(t,0)$, если $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0)$ ($\forall$ решения $\mathbf{x}=\mathbf{x}^*(t,\mathbf{x}_0)$, $\mathbf{x}^*(0,\mathbf{x}_0)=\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_0\in\{\|\mathbf{x}\|<\delta\}\bigcap V_\infty^{-1}(t,0)\bigcap\{W^*(t,\mathbf{x})=0\}$ системы $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{X}^*(t,\mathbf{x})$) $(\forall t\ge 0)$ $\|\mathbf{x}^*(t,\mathbf{x}_0)\|<\varepsilon$.

Нулевое решение $\mathbf{x}=0$ асимптотически устойчиво относительно выбранной предельной пары $(\mathbf{X}^*,W^*)$ и множества $V_\infty^{-1}(t,0)$, если оно устойчиво, а также $(\exists\Delta>0)$ $(\forall\varepsilon>0)(\exists T=T(\varepsilon)>0)$ ($\forall$ решения $\mathbf{x}=\mathbf{x}^*(t,\mathbf{x}_0)$, $\mathbf{x}^*(0,\mathbf{x}_0)=\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_0\in\{\|\mathbf{x}\|<\Delta\}\bigcap$ $\bigcap V_\infty^{-1}(t,0)\bigcap\{W^*(t,\mathbf{x})=0\}$ системы $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{X}^*(t,\mathbf{x})$) $(\forall t\ge T)$ $\|\mathbf{x}^*(t,\mathbf{x}_0)\|<\varepsilon$.

Определение 2. Нулевое решение $\mathbf{x}=0$ равномерно устойчиво относительно семейства $\{(\mathbf{X}^*,W^*),V_\infty^{-1}(t,0)\}$, если число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ в определении 1 не зависит от выбора $(\mathbf{X}^*,W^*)$.

Нулевое решение $\mathbf{x}=0$ равномерно асимптотически устойчиво относительно семейства $\{(\mathbf{X}^*,W^*),V_\infty^{-1}(t,0)\}$, если также числа $\Delta>0$ и $T=T(\varepsilon)>0$ в определении 1 не зависят от выбора $(\mathbf{X}^*,W^*)$.

Теорема 1. Предположим, что:
1) существует функция $V : R^+ \times \Gamma \to R^+$ с производной $\dot{V}^+(t, \mathbf{x}) \leq -W(t, \mathbf{x}) \leq 0$;
2) нулевое решение $\mathbf{x} = 0$ равномерно асимптотически устойчиво относительно семейства $\{(\mathbf{X}^*, W^*), V_\infty^{-1}(t, 0)\}$.

Тогда решение $\mathbf{x} = 0$ системы (1) устойчиво.

Если в дополнение функция $V(t, \mathbf{x})$ допускает бесконечно малый высший предел, $V(t, \mathbf{x}) \leq a(\|\mathbf{x}\|)\ \forall (t, \mathbf{x}) \in R^+ \times \Gamma$, тогда эта устойчивость является равномерной.

Теорема 2. Предположим, что выполнены условия 1), 2) теоремы 1, а также:
3) для каждой предельной пары $(\mathbf{X}^*, W^*)$ множество

$$\{V_\infty^{-1}(t, c) : c = c_0 = \mathrm{const}\} \bigcap \{W^*(t, \mathbf{x}) = 0\}$$

содержит только такие решения $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t)$ системы $\dot{\mathbf{x}} = X^*(t, \mathbf{x})$, которые содержатся в множестве $V_\infty^{-1}(t, 0) \bigcap \{W^*(t, \mathbf{x}) = 0\}$, $\mathbf{x}^*(t) \in V_\infty^{-1}(t, 0) \bigcap \{W^*(t, \mathbf{x}) = 0\}$ для всех $t \in R$.

Тогда решение $\mathbf{x} = 0$ системы (1) асимптотически устойчиво.

Теорема 3. Предположим, что выполнены условия 1) и 2) теоремы 1, а также:
3) существует хотя бы одна предельная пара $(\mathbf{X}^*, W^*)$, для которой множество

$$\{V_\infty^{-1}(t, c) : c = c_0 = \mathrm{const} > 0\} \bigcap \{W^*(t, \mathbf{x}) = 0\}$$

не содержит решений системы $\dot{\mathbf{x}} = X^*(t, \mathbf{x})$.

Тогда решение $\mathbf{x} = 0$ системы (1) эквиасимптотически устойчиво, то есть асимптотически устойчиво равномерно по $\mathbf{x}_0$.

Теорема 4. Предположим, что при условиях 1) и 2) теоремы 1 функция $V(t, \mathbf{x})$ допускает бесконечно малый высший предел, $V(t, \mathbf{x}) \leq a(\|\mathbf{x}\|)\ \forall (t, \mathbf{x}) \in R^+ \times \Gamma$, а также:
3) для каждой предельной пары $(\mathbf{X}^*, W^*)$ множество

$$\{V_\infty^{-1}(t, c) : c = c_0 = \mathrm{const} > 0\} \bigcap \{W^*(t, \mathbf{x}) = 0\}$$

не содержит решений системы $\dot{\mathbf{x}} = X^*(t, \mathbf{x})$.

Тогда решение $\mathbf{x} = 0$ системы (1) равномерно асимптотически устойчиво.

Допустим, что для системы (1) известны m первых независимых интегралов

$$\mathbf{U}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{c}, \quad \mathbf{U}(t, 0) \equiv 0,$$

где $\mathbf{c} = (c_1, c_2, ...c_m)'$ – вектор m-мерного пространства R^m с нормой $\|c\|^2 = c_1^2 + ... + c_m^2$, $\mathbf{U} : R^+ \times \Gamma \to R^m$ – непрерывная вектор-функция, локально липшицева по $\mathbf{x}$.

Устойчивость $\mathbf{x} = 0$ легко определяется, когда функция $U_0(t, \mathbf{x}) = \|\mathbf{U}(t, \mathbf{x})\|$ является определенно-положительной. Если $U_0(t, \mathbf{x})$ является лишь неотрицательной, устойчивость невозмущенного движения $\mathbf{x} = 0$ можно найти на основе теоремы 2.1, учитывая что $\dot{U}_0(t, \mathbf{x}) \equiv 0$.

Теорема 5. Пусть решение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ равномерно асимптотически устойчиво относительно семейства предельных систем (3) и множества

$$(U_0)_\infty^{-1}(t, 0) = (U_1)_\infty^{-1}(t, 0) \bigcap (U_2)_\infty^{-1}(t, 0) \bigcap ... \bigcap (U_m)_\infty^{-1}(t, 0).$$

Тогда решение $\mathbf{x} = 0$ системы (1) устойчиво.

Если функция $U_0(t, \mathbf{x})$ допускает бесконечно малый высший предел, эта устойчивость равномерна.

Теорема 6. В условиях теоремы 5 допустим также, что существует некоторая функция $V : R^+ \times \Gamma \to R^+$ с верхней правосторонней производной в силу системы (1.1) $\dot{V}^+(t, \mathbf{x}) \leq -W(t, \mathbf{x}) \leq 0$. Тогда каждое движение системы (1) неограниченно приближается к объединению по всем предельным парам $(\mathbf{X}^*, W^*)$ максимально инвариантных относительно $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}^*(t, \mathbf{x})$ подмножеств множеств

$$\{V_\infty^{-1}(t, \mathbf{c}) : \mathbf{c} = \mathbf{c}_0\} \bigcap \{W^*(t, \mathbf{x}) = 0\} \bigcap (U_1)_\infty^{-1}(t, c_1) \bigcap ... \bigcap (U_m)_\infty^{-1}(t, c_m)$$

для некоторых постоянных значений $c_0, c_1, ..., c_m$.

Теоремы 5, 6 дополняют некоторые результаты из [15].

Рассмотрим механическую систему с нестационарными, голономными и идеальными связями, положение которой определяется $n + m$ $(n \geq 1,\ m \geq 1)$ обобщенными координатами $\mathbf{q}' = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ и $\mathbf{z}' = (z_1, z_2, \ldots, z_m)$. При этом допустим, что $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — позиционные координаты, $z_1, z_2, \ldots, z_m$ — циклические и, соответственно, функция Лагранжа имеет вид

$$L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{z}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}' A(t, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}' B(t, \mathbf{q})\dot{\mathbf{z}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{z}}' C(t, \mathbf{q})\dot{\mathbf{z}} - \\ -\dot{\mathbf{q}}'\mathbf{g}(t, \mathbf{q}) - \dot{\mathbf{z}}'\mathbf{f}(t, \mathbf{q}) - \Pi(t, \mathbf{q}), \qquad (4)$$

где $A(t, \mathbf{q})$ и $C(t, \mathbf{q})$ – положительно-определенные матрицы размерности $n \times n$ и $m \times m$, матрица $B(t, \mathbf{q})$ имеет размерность $n \times m$, $\mathbf{g}(t, \mathbf{q})$ и $\mathbf{f}(t, \mathbf{q})$ – матрицы-столбцы размерности $n \times 1$ и $m \times 1$, скалярная функция $\Pi(t, \mathbf{q})$ – потенциальная энергия. Предположим, что все функции переменных $(t, \mathbf{q})$, входящие в выражение (4), определены и непрерывно дифференцируемы до второго порядка включительно в области $R^+ \times \Gamma_0$, $\Gamma_0 = \{\mathbf{q} \in R^n : \|\mathbf{q}\| < \beta_0,\ 0 < \beta_0 \leq +\infty\}$ ($\|\mathbf{q}\|$ – евклидова норма вектора $\mathbf{q} \in R^n$), ограничены вместе со всеми своими производными при $(t, \mathbf{q}) \in R^+ \times \Gamma_1$, $\Gamma_1 = \{\mathbf{q} : \|\mathbf{q}\| \leq \beta_1,\ 0 < \beta_1 < \beta_0\}$, а также

$$\det A \geq \alpha_0, \det C \geq \alpha_0,\ \det(A - BC^{-1}B') \geq \alpha_0 = \text{const} > 0, \forall (t, \mathbf{q}) \in R^+ \times \Gamma_1.$$

Пусть на систему действуют также обобщенные силы по позиционным координатам, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, которые непрерывно дифференцируемы в области $R^+ \times \Gamma_0 \times R^n$ и ограничены со своими производными при $(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in R^+ \times \Gamma_1 \times \Gamma_2$, $\Gamma_2 = \{\dot{\mathbf{q}} : \|\dot{\mathbf{q}}\| \leq \beta_2,\ 0 < \beta_2 < +\infty\}$.

Движение системы описывается уравнениями

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{z}}} = 0. \qquad (5)$$

Из последних уравнений находим циклические интегралы

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{z}}} = B'(t, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + C(t, \mathbf{q})\dot{\mathbf{z}} - \mathbf{f}(t, \mathbf{q}) = \mathbf{c}, \qquad (6)$$

где $\mathbf{c}' = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$ – m произвольных постоянных. Разрешая уравнения (6) относительно $\dot{\mathbf{z}}$, получаем соотношения

$$\dot{\mathbf{z}} = C^{-1}(t, \mathbf{q})(\mathbf{c} + \mathbf{f}(t, \mathbf{q}) - B'(t, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}). \qquad (7)$$

Из условий, наложенных на функции, входящие в равенства (6) и (7), находим, что $\partial L/\partial \dot{\mathbf{z}}$ и $\dot{\mathbf{z}}$ – ограниченные, равномерно непрерывные функции по $(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{z}}) \in R^+ \times \Gamma_1 \times$ $\times \Gamma_2 \times \Gamma_3$ и $(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{c}) \in R^+ \times \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \Gamma_4$, где

$$\Gamma_3 = \{\dot{\mathbf{z}} \in R^m : \|\dot{\mathbf{z}}\| \leq \beta_3,\ 0 < \beta_3 < +\infty\},$$

$$\Gamma_4 = \{\mathbf{c} \in R^m : \|\mathbf{c}\| \leq \beta_4,\ 0 < \beta_4 < +\infty\}.$$

Используя соотношения (6) и (7), находим функцию Рауса в следующей форме:

$$R = L - \dot{\mathbf{z}}' \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{z}}}\right|_{\dot{\mathbf{z}} = C^{-1}(\mathbf{c}+\mathbf{f}-\mathbf{B}'\dot{\mathbf{q}})} = R_2 + R_1 - W,$$

$$R_2(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}' F \dot{\mathbf{q}}, \quad F(t, \mathbf{q}) = A - BC^{-1}B',$$

$$R_1(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{c}) = \mathbf{E}'\dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{E}(t, \mathbf{q}, \mathbf{c}) = BC^{-1}(\mathbf{c} + \mathbf{f}) - \mathbf{g},$$

$$W(t, \mathbf{q}, \mathbf{c}) = \Pi + \frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{f})' C^{-1} (\mathbf{c} + \mathbf{f}),$$

где F – положительно-определенная матрица, функция W называется приведенной потенциальной энергией.

Уравнения движения могут быть выражены посредством уравнений Рауса

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_2}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial R_2}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}} - G\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{Q}, \quad \frac{d\mathbf{c}}{dt} \equiv 0. \tag{8}$$

Матрица G определяется равенством

$$G(t, \mathbf{q}, \mathbf{c}) = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{q}} - \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{q}}\right)' = -G'$$

и может рассматриваться как матрица линейных гироскопических сил. В отличие от системы со стационарными связями в уравнениях (8) появились дополнительные слагаемые $(-\partial \mathbf{E}/\partial t)$, которые можно трактовать как инерционные силы, обусловленные нестационарностью связей.

Допустим, что для некоторого значения $(\mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0) \in \Gamma_0 \times R^m$ при всех $t \geq t_0$ имеет место равенство

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}(t, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0) + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(t, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0) = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}_0, \mathbf{0}).$$

Тогда система (8) имеет при $\mathbf{c} = \mathbf{c}_0$ положение относительного равновесия

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0},\ \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 \ \ (t \geq t_0),$$

которому соответствует обобщенное стационарное движение системы (5) [16]

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q}(t) = \mathbf{q_0}, \quad \dot{\mathbf{z}}(t) = C^{-1}(t, \mathbf{q_0})(\mathbf{c_0} + \mathbf{f}(t, \mathbf{q_0})). \tag{9}$$

В этом движении, в отличие от стационарного, циклические скорости не являются постоянными, а изменяются вместе с циклическими координатами в общем случае по нелинейному закону.

Предположим, что действие обобщенных сил $\mathbf{Q}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ и инерциальных сил представимо в виде

$$\mathbf{Q}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}(t,\mathbf{q},\mathbf{c}) - \frac{\partial E}{\partial t}(t,\mathbf{q},\mathbf{c}) = -p(t,\mathbf{q},\mathbf{c})\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q},\mathbf{c}) + \mathbf{Q}_d(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}), \qquad (10)$$

где $p(t,\mathbf{q},\mathbf{c})$, $S(\mathbf{q},\mathbf{c})$ – скалярные функции, удовлетворяющие условиям:
1) $S(\mathbf{q},\mathbf{c})$ определена в области $\Gamma_1 \times \Gamma_4$; $\dfrac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0,\mathbf{c}) = 0$ для всех $\mathbf{c}$;
2) $p(t,\mathbf{q},\mathbf{c})$ определена и непрерывно-дифференцируема в области $R^+ \times \Gamma_1 \times \Gamma_4$; а также выполнены соотношения

$$0 < p_0 \le p(t,\mathbf{q},\mathbf{c}) \le p_1 \quad p_0, p_1\text{– некоторые постоянные;}$$

$$\left\| \frac{\partial p(t,\mathbf{q},\mathbf{c})}{\partial \mathbf{q}} \right\| \le p_2 = \mathrm{const}.$$

Теорема 7. Пусть система (4) имеет обобщенное стационарное движение (9), отвечающее значению $\mathbf{c} = \mathbf{c}_0$, при этом

1) функция $S(t,\mathbf{q},\mathbf{c}_0) - S_0(t)$, где $S_0(t) = S(t,\mathbf{q}_0,\mathbf{c}_0)$, является положительно-определенной по $\mathbf{q} - \mathbf{q}_0$;

2) для всех $(t,\mathbf{q},\mathbf{c}) \in R^+ \times \{(\mathbf{q},\mathbf{c}) : \|\mathbf{q}-\mathbf{q}_0\| \le \delta, \|\mathbf{c}-\mathbf{c}_0\| \le \delta > 0\}$ выполнено неравенство

$$\frac{\partial}{\partial t}(S - S_0) \le 0;$$

3) функция $p\,(t,\mathbf{q},\mathbf{c})$ такова, что для всех $(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\mathbf{c}) \in R^+ \times \{(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\mathbf{c}) : \|\mathbf{q}-\mathbf{q}_0\| \le \le \delta,\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \le \delta,\ \|\mathbf{c}-\mathbf{c}_0\| \le \delta > 0\}$ выполнено неравенство

$$-\frac{1}{p^2}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \dot{\mathbf{q}}'\frac{\partial p}{\partial \mathbf{q}}\right)R_2 - \frac{1}{p}\frac{\partial R_2}{\partial t} + \frac{1}{p}\mathbf{Q}_d'\dot{\mathbf{q}} \le 0;$$

4) обобщенное стационарное движение является изолированным при $\mathbf{c} = \mathbf{c}_0$, таким образом $\forall \eta > 0$ найдется $\varepsilon = \varepsilon(\eta) > 0$ такое, что при $t \ge t_0$ для каждого $\mathbf{q} \in \{0 < \eta \le \le \|\mathbf{q}-\mathbf{q}_0\| \le \delta\}$ при $\mathbf{c} = \mathbf{c}_0$ выполняется неравенство

$$\left\| \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \right\| \ge \varepsilon.$$

Тогда обобщенное стационарное движение (9) равномерно устойчиво, является равномерно притягивающим для возмущенных движений с циклическими постоянными $\mathbf{c} = \mathbf{c}_0$.

Заменим предположение (10) следующим

$$\mathbf{Q}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) - \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}t,\mathbf{q},\mathbf{c}) - \frac{\partial E}{\partial t}(t,\mathbf{q},\mathbf{c}) = -P(t,\mathbf{q},\mathbf{c})\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q},\mathbf{c}) + \mathbf{Q}_d(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}),$$

где $P(t,\mathbf{q})$ – матрица размерности $n \times n$ является невырожденной и ограниченной, то есть выполняются условия

$$detP \ne 0,$$

$$P(t,\mathbf{q}) \le p_1 E.$$

При этом предполагается, что

$$F(t,\mathbf{q})P^{-1}(t,\mathbf{q}) \geq h(\|\mathbf{q}\|).$$

Разрешая уравнения движения относительно $\ddot{\mathbf{q}}$, представим их в следующем виде

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \dot{\mathbf{q}}, \quad \frac{d}{dt}(F\dot{\mathbf{q}}) + \{\dot{\mathbf{q}}'D(t,\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}\} = -P(t,\mathbf{q})\frac{\partial S(t,\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} + G'(t,\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}_d(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}),$$

где $\{\dot{\mathbf{q}}'D(t,\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}\}$ - набор n квадратичных относительно $\dot{\mathbf{q}}$ форм.

Теорема 8. Пусть система (4) имеет обобщенное стационарное движение (9), отвечающее значению $\mathbf{c} = \mathbf{c}_0$, при этом

1) функция $S(t,\mathbf{q},\mathbf{c}_0) - S_0(t)$, где $S_0(t) = S(t,\mathbf{q}_0,\mathbf{c}_0)$, является определенно-положительной по $\mathbf{q} - \mathbf{q}_0$;

2) для всех $(t,\mathbf{q},\mathbf{c}) \in R^+ \times \{(\mathbf{q},\mathbf{c}) : \|\mathbf{q}-\mathbf{q}_0\| \leq \delta,\ \|\mathbf{c}-\mathbf{c}_0\| \leq \delta > 0\}$ выполнено неравенство

$$\frac{\partial}{\partial t}(S - S_0) \leq 0;$$

3) функция $P(t,\mathbf{q},\mathbf{c})$ такова, что для всех $(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\mathbf{c}) \in R^+ \times \{(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\mathbf{c}) : \|\mathbf{q}-\mathbf{q}_0\| \leq \leq \delta,\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \leq \delta,\ \|\mathbf{c}-\mathbf{c}_0\| \leq \delta > 0\}$ выполнено неравенство

$$\dot{\mathbf{q}}'P^{-1}\left(G'\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}_d - \{\dot{\mathbf{q}}'D\dot{\mathbf{q}}\}\right) + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}'F\frac{dP^{-1}}{dt}\dot{\mathbf{q}} \leq 0;$$

4) обобщенное стационарное движение является изолированным при $\mathbf{c} = \mathbf{c}_0$, таким образом $\forall \eta > 0$ найдется $\varepsilon = \varepsilon(\eta) > 0$ такое, что при $t \geq t_0$ для каждого $\mathbf{q} \in \{0 < \eta \leq \leq \|\mathbf{q}-\mathbf{q}_0\| \leq \delta\}$ выполняется неравенство

$$\left\|\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}\right\| \geq \varepsilon.$$

Тогда обобщенное стационарное движение (9) равномерно устойчиво, является равномерно притягивающим для возмущенных движений с циклическими постоянными $\mathbf{c} = \mathbf{c}_0$.

Полученные результаты развивают и обобщают результаты работ[15,16].

1. *Самойленко А.М.* Изучение динамических систем с помощью знакопостоянных функций // Укр. мат. журн. – 1972. – **24**, №3. – С.374–386.
2. *Булгаков Н.Г., Калитин Б.С.* Обобщение теорем второго метода Ляпунова // Весцi АН БССР. Сер. физ.-мат. навук. – 1978. – №3. – С.32–35.
3. *Гайшун И.В., Княжище Л.Б.* Условия устойчивости вполне интегрируемых автономных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, №8. – С.1453–1456.
4. *Грудо Э.И.* К теории устойчивости обыкновенных дифференциальных систем и систем Пфаффа // Дифференц. уравнения. – 1983. – **19**, №5. – С.782–789.
5. *Булгаков Н.Г.* Знакопостоянные функции в теории устойчивости. – Минск, 1984. – 80 с.
6. *Косов А.А.* К теории устойчивости неавтономных систем // Ред.журн. "Вестник ЛГУ". –Ленинград, 1985. – 10 с. – Деп. в ВИНИТИ №4848-85.
7. *Косов А.А.* К задаче об устойчивости движения относительно части переменных // Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука, 1988. – С.185–194.
8. *Косов А.А.* О глобальной устойчивости неавтономных систем.I // Изв. высших учебных заведений. Математика. – 1997. – №7(422) – С.28–35.
9. *Косов А.А.* О глобальной устойчивости неавтономных систем.II // Там же. №8(423) – С. 33–42.

10. *Artstein Z.* Topological dynamics of an ordinary differential equation // J. Different. Equat. – 1977. – **23**, №2. – P. 216–223.
11. *Artstein Z.* Uniform asymptotic stability via the limiting equations // J. Different. Equat. – 1978. – **27**, №2. – P. 172–189.
12. *Андреев А.С.* Об асимптотической устойчивости инеустойчивости нулевого решения неавтономной системы // Прикл. математика и механика. – 1984. – **48**, вып. 2. – С. 225–232.
13. *Андреев А.С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости неавтономной системы относительно части переменных //Там же. – 1984. – **48**, вып.5. – С. 707–713.
14. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980. – 300 с.
15. *Андреев А.С., Ризито К.* Об устойчивости обобщенного стационарного движения // Прикл. математика и механика. – 2002. – **66**, вып.3. – С. 339–349.
16. *Risito C.* Metodi per lo studio della stabilita’ di sistemi con integrali primi noti // Annali di Mat. Pura ed Appl. – 1976. – **107**. – P. 49–94.

Ульяновский Гос. Ун-т, Россия
AndreevAS@ulsu.ru, BoykovaTA@ulsu.ru

Получено 31.10.2002