

УДК 531.38

©2006. И.А. Болграбская, А.Я. Савченко, Н.Н. Щепин

ЗАМКНУТЫЕ СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Рассмотрена конечномерная модель замкнутого упругого стержня, позволяющая изучать системы с большим прогибом. Применен общий подход записи уравнений движения замкнутой системы n тел, исходя из законов об изменении количества движения и момента количества движения тела S_k . Получено выражение для упругого момента, которое при $n \rightarrow \infty$ совпадает с моментом, вводимым в теории упругих стержней. Исследованы положения равновесия изучаемой системы. Подробно изучен случай плоской осевой линии стержня. В явном виде найдены два решения: в одном из них моделируемая ось стержня представляет кольцо, а во втором – восьмерку.

Введение. В работе [1] представлена конечномерная модель упругого стержня, позволяющая изучать системы с большим прогибом. При записи потенциальной энергии системы полагалось, что углы Крылова $\psi_k, \theta_k, \varphi_k$ ($k = \overline{1, n}$), определяющие положение связанной системы координат по отношению к инерциальной, могут принимать произвольные значения, однако их разности $\psi_{k+1} - \psi_k, \theta_{k+1} - \theta_k, \varphi_{k+1} - \varphi_k$ малы. Записанные в [1] уравнения Лагранжа линейны по разности углов.

В настоящей статье предложен общий подход записи уравнений движения замкнутой системы, подобно [2], исходя из законов об изменении количества движения и момента количества движения тела S_k . Получено выражение для упругого момента, которое при $n \rightarrow \infty$ совпадает с моментом, вводимым в теории упругих стержней [3]. Исследование положений равновесия изучаемой системы позволило найти в явном виде не только решения, найденные в [1], но и решения типа "восьмерки". Именно эти решения отмечены как точные решения в работах [4–7] для замкнутой упругой оси стержня, в предположении, что она плоская.

1. Постановка задачи. Уравнения движения. Рассмотрим совокупность гироскопов Лагранжа S_k ($k = \overline{1, n}$), связанных в точках O_k пересечения их осей симметрии упругими сферическими шарнирами. Полагаем, что на систему не действуют внешние силы и моменты, вследствие чего ее центр масс C неподвижен. Свяжем с ним инерциальную систему координат $CXYZ$ (орты $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$), а с каждым телом S_k – связанную систему координат $C_kX_kY_kZ_k$ (орты $\mathbf{e}_k^1, \mathbf{e}_k^2, \mathbf{e}_k^3$), где C_k – центр масс тела S_k , а ось C_kZ_k направлена вдоль оси симметрии тела S_k .

Определим положение связанной системы координат по отношению к инерциальной углами Крылова $\psi_k, \theta_k, \varphi_k$. Полагая, как и в [1], что изучаемая система замкнута (т.е. $O_1 = O_{n+1}$), получаем, что эти углы должны удовлетворять соотношениям

$$\sum_{k=1}^n h_k \sin \psi_k \cos \theta_k = 0; \quad \sum_{k=1}^n h_k \sin \theta_k = 0; \quad \sum_{k=1}^n h_k \cos \psi_k \cos \theta_k = 0, \quad (1)$$

где $h_k = O_k O_{k+1}$.

Действие тела S_{k-1} на S_k характеризует сила \mathbf{R}_k и момент \mathbf{L}_k , приложенные в точке O_k , а действие тела S_{k+1} на S_k соответственно сила $-\mathbf{R}_{k+1}$ и момент $-\mathbf{L}_{k+1}$, приложенные в точке O_{k+1} .

Как и в [2], уравнения движения центра масс тела S_k и уравнения изменения мо-

мента количества движения тела S_k относительно O_k могут быть представлены в виде:

$$m_k \dot{\mathbf{v}}_k^c = \mathbf{R}_k - \mathbf{R}_{k+1}; \quad (2)$$

$$(\hat{\mathbf{A}}_k \boldsymbol{\omega}_k)^\bullet + m_k \mathbf{c}_k \times \dot{\mathbf{v}}_k = \mathbf{L}_k - \mathbf{L}_{k+1} - \mathbf{h}_k \times \mathbf{R}_{k+1}. \quad (3)$$

Здесь $k = \overline{1, n}$; $\hat{\mathbf{A}}_k$ – тензор инерции тела S_k в точке O_k ; m_k – масса тела S_k ; $\boldsymbol{\omega}_k$ – его угловая скорость; \mathbf{v}_k^c и \mathbf{v}_k – соответственно скорости точек C_k и O_k ; $\mathbf{c}_k = \mathbf{O}_k C_k$. Поскольку система замкнута ($O_1 = O_{n+1}$), то $\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_1$, $\mathbf{L}_{n+1} = \mathbf{L}_1$.

Скорости \mathbf{v}_k и \mathbf{v}_k^c равны [2]

$$\mathbf{v}_k = \sum_{i=1}^{k-1} \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{h}_i, \quad \mathbf{v}_k^c = \mathbf{v}_k + \boldsymbol{\omega}_k \times \mathbf{c}_k, \quad (4)$$

а компоненты p_k, q_k, r_k абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_k$ на оси связанной системы координат имеют вид

$$p_k = \dot{\psi}_k \cos \theta_k \sin \varphi_k + \dot{\theta}_k \cos \varphi_k, \quad q_k = \dot{\psi}_k \cos \theta_k \cos \varphi_k - \dot{\theta}_k \sin \varphi_k, \quad r_k = \dot{\varphi}_k - \dot{\psi}_k \sin \theta_k. \quad (5)$$

Зависимость же упругих моментов \mathbf{L}_k от обобщенных координат получим, исходя из положений теории упругих стержней.

2. Момент в упругом шарнире. В теории упругих стержней связь между геометрическими характеристиками и силами, действующими в поперечном сечении стержня, определяется из закона Кирхгофа–Клебша [3]. В случае, когда главные оси изгиба и кручения совпадают с главными осями инерции поперечного сечения и материал стержня изотропен (именно такие симметричные объекты здесь и рассматриваются), его упругий момент равен

$$\mathbf{M} = c_1^2 (\varkappa_1 \mathbf{e}_1 + \varkappa_2 \mathbf{e}_2) + c_2^2 \varkappa_3 \mathbf{e}_3, \quad (6)$$

где c_1^2, c_2^2 – соответственно изгибная и крутильная жесткости, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – ортогональный базис, в котором вектор \mathbf{e}_3 направлен по касательной к осевой линии стержня, а векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ – по главным центральным осям инерции поперечного сечения ($\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(s)$, где s – дуговая координата), \varkappa_i – компоненты вектора Дарбу в проекциях на оси \mathbf{e}_i .

В (6) предполагается, что в недеформированном состоянии ось стержня прямолинейна. Вектор Дарбу \varkappa определяется как вектор угловой скорости вращения базиса $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$ при его движении по оси стержня.

Производные векторов базиса имеют вид

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{ds} = \varkappa \times \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Умножая векторно обе части равенства (7) на \mathbf{e}_i получим

$$\mathbf{e}_i \times \frac{d\mathbf{e}_i}{ds} = \mathbf{e}_i \times (\varkappa \times \mathbf{e}_i) = \varkappa - \varkappa_i \mathbf{e}_i,$$

откуда, суммируя, находим

$$\sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \times \frac{d\mathbf{e}_i}{ds} = 2\varkappa.$$

Вектор \varkappa может быть выражен как

$$\varkappa = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \times \frac{d\mathbf{e}_i}{ds}. \quad (8)$$

Введенная выше система n связанных твердых тел является конечномерной моделью упругого стержня. Тогда точкам O_k (шарнирным соединениям тел), расположенным на осевой линии, соответствуют дуговые координаты $s = \sum_{i=1}^k h_i$, где $h_i = O_k O_{k+1}$, $k = \overline{1, n}$.

Производная $\frac{d\mathbf{e}_i}{ds}$, отражающая изменение направления базисного вектора \mathbf{e}_i вдоль оси стержня в конечномерном случае, может быть представлена так

$$\frac{d\mathbf{e}_i}{ds} \approx \frac{\mathbf{e}_k^i - \mathbf{e}_{k-1}^i}{h}, \quad (9)$$

где полагалось $ds = h = \min_k h_k$ (в случае одинаковых тел $h_k = h$).

Из (8) с учетом (9) получим

$$\varkappa_k = \frac{1}{2h} \sum_{i=1}^3 (\mathbf{e}_{k-1}^i \times \mathbf{e}_k^i), \quad (10)$$

где \varkappa_k — дискретный аналог вектора Дарбу \varkappa в точке O_k .

По аналогии с (6), обозначим компоненты \varkappa_k на оси связанной системы координат \varkappa_k^i ($i = 1, 2, 3$). Тогда упругий момент \mathbf{L}_k может быть представлен так

$$\mathbf{L}_k = c_1^2 (\varkappa_k^1 \mathbf{e}_k^1 + \varkappa_k^2 \mathbf{e}_k^2) + c_2^2 \varkappa_k^3 \mathbf{e}_k^3. \quad (11)$$

Как и в [1, 4–7], ниже будет изучен случай, когда осевая линия плоская. Предположим, что для всех тел $\psi_k = 0$ ($k = \overline{1, n}$), при этом осевая линия и касательные к ней орты \mathbf{e}_k^3 находятся в плоскости Oyz . Учитывая выражения для направляющих косинусов углов Крылова θ_k, φ_k [2], определяющих положение связанных систем координат $Oy_k z_k$ по отношению к инерциальной Oyz , из (10) находим

$$\begin{aligned} \varkappa_k^1 &= \frac{1}{2h} \sin(\theta_k - \theta_{k-1}) (\cos \varphi_k + \cos \varphi_{k-1}), \\ \varkappa_k^2 &= \frac{1}{2h} \sin(\theta_k - \theta_{k-1}) (\sin \varphi_k + \sin \varphi_{k-1}), \\ \varkappa_k^3 &= \frac{1}{2h} \sin(\varphi_k - \varphi_{k-1}) [1 + \cos(\theta_k - \theta_{k-1})]. \end{aligned} \quad (12)$$

Можно показать, что при $h \rightarrow 0$ из (7), (9) следует $\lim_{h \rightarrow 0} \varkappa_k^i = \varkappa_i$ ($i = 1, 2, 3$). Формула (12) дает выражение компонент вектора Дарбу для плоской кривой в случае учета геометрической нелинейности.

3. Положение равновесия в системе. Полагаем в (2)–(5) скорости обобщенных координат равными нулю, при этом $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_k^c = \boldsymbol{\omega}_k = 0$. Тогда положение равновесия тела S_k ($\theta_k = \theta_k^0, \varphi_k = \varphi_k^0$) может быть найдено из уравнений

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{R}, \quad (13)$$

$$\mathbf{L}_k - \mathbf{L}_{k+1} - \mathbf{h}_k \times \mathbf{R}_{k+1} = 0. \quad (14)$$

Поскольку движение происходит в плоскости Oyz , имеем

$$\mathbf{R} = R_y \mathbf{e}_y + R_z \mathbf{e}_z. \quad (15)$$

Так как $\mathbf{h} = h_k(-\sin \theta_k \mathbf{e}_y + \cos \theta_k \mathbf{e}_z)$, то из (13)–(15) получаем

$$L_k^x - L_{k+1}^x + h_k(R_z \sin \theta_k + R_y \cos \theta_k) = 0, \quad (16)$$

$$L_k^y = L_{k+1}^y, \quad L_k^z = L_{k+1}^z. \quad (17)$$

Здесь верхние индексы x, y, z означают проекции моментов \mathbf{L}_k и \mathbf{L}_{k+1} соответственно на оси $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$.

Проектируя (11) с учетом (12) на $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, получим

$$L_k^x = \frac{c_1^2}{2h} \sin(\theta_k - \theta_{k-1}) [1 + \cos(\varphi_k - \varphi_{k-1})], \quad (18)$$

$$L_k^3 = -L_k^y \sin \theta_k + L_k^z \cos \theta_k = \frac{c_2^2}{2h} \sin(\varphi_k - \varphi_{k-1}) [1 + \cos(\theta_k - \theta_{k-1})], \quad (19)$$

где $L_k^3 = \mathbf{L}_k \cdot \mathbf{e}_k^3$.

В случае, когда отсутствует крутка ($\varphi_k = \varphi_{k-1}$), выражение для упругого момента совпадает со введенным в [8] для упругого универсального шарнира.

Если предположить, что разность $\varphi_k - \varphi_{k-1}$ мала, и линеаризовать (18), (19) по малым величинам $\varphi_k - \varphi_{k-1}$, то с точностью до членов второго порядка малости имеем

$$L_k^x = \frac{c_1^2}{h} \sin(\theta_k - \theta_{k-1}); \quad (20)$$

$$L_k^3 = \frac{c_2^2}{2h} (\varphi_k - \varphi_{k-1}) [1 + \cos(\theta_k - \theta_{k-1})]. \quad (21)$$

Подставляя (20), (21) в (16), (17), получаем уравнения равновесия в виде

$$\sin(\theta_{k+1} - \theta_k) - \sin(\theta_k - \theta_{k-1}) = a_k (R_z \sin \theta_k + R_y \cos \theta_k); \quad (22)$$

$$b_k \varphi_{k-1} - (b_k + b_{k+1}) \varphi_k + b_{k+1} \varphi_{k+1} = 0, \quad (23)$$

где

$$a_k = \frac{h_k h}{c_1^2}, \quad b_k = \frac{c_2^2}{2h} [1 + \cos(\theta_k - \theta_{k-1})], \quad k = \overline{1, n}.$$

Поскольку система замкнута ($O_1 = O_{n+1}$), в (23) полагалось

$$\varphi_0 = \varphi_n; \quad \varphi_{n+1} = \varphi_1; \quad \theta_0 = \theta_n; \quad \theta_{n+1} = \theta_1.$$

К системе (22) следует добавить уравнения связи (1), которые в случае $\psi_k = 0$ принимают вид

$$\sum_{k=1}^n h_k \cos \theta_k = 0; \quad \sum_{k=1}^n h_k \sin \theta_k = 0. \quad (24)$$

Система (22)–(24) замкнута относительно величин φ_k, θ_k ($k = \overline{1, n}$), R_y, R_z . Переменные, описывающие форму упругой линии, определяются из уравнений (22), (24), а углы кручения φ_k находятся из линейной системы (23). Отметим, что поскольку сумма элементов всех строк (или столбцов) определителя системы уравнений (23) равна нулю, то он равен нулю, и система имеет ненулевое решение.

4. Точное решение в случае круговой оси стержня. В работах [4–7] установлено, что одна из возможных плоских форм равновесной оси – круговая. При этом

$$\theta(s) = \frac{2k\pi s}{L} + \delta, \quad \varphi(s) = \frac{2k\pi s}{L} + \delta_1, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (25)$$

где L – длина кривой, δ, δ_1 – произвольные постоянные.

В работе [1] при изучении уравнений равновесия конечномерной модели замкнутого упругого стержня, записанной в предположении малости разности углов $\theta_k - \theta_{k-1}$, $\varphi_k - \varphi_{k-1}$ ($k = \overline{1, n}$), было найдено решение

$$\varphi_k = 2k\pi/n + \alpha_1, \quad (26)$$

$$\theta_k = 2k\pi/n + \alpha, \quad (27)$$

где α, α_1 – произвольные постоянные. Полагая, что длина кривой L в (25) равна 2π , ($s = 2\pi/n$), нетрудно убедиться, что решение (26), (27) совпадает с решением (25), полученным для непрерывной стержневой модели.

Это решение удовлетворяет уравнениям (24), и, кроме того, из (26), (27) следует $\varphi_k - \varphi_{k-1} = \theta_k - \theta_{k-1} = 2\pi/n = \text{const}$, откуда получим

$$b_k = c_2^2 \left[1 + \cos \frac{2\pi}{n} \right] / (2h) = \text{const}, \quad (28)$$

и система (23) принимает вид

$$\varphi_{k-1} - 2\varphi_k + \varphi_{k+1} = 0 \quad (k = \overline{1, n}). \quad (29)$$

Система (29) совпадает с полученной в работе [1] и имеет решение (26) при условии

$$\varphi_0 = 2\pi + \varphi_n, \quad \varphi_{n+1} = \varphi_1 - 2\pi.$$

Если $R_y = R_z = 0$, что соответствует случаю $\lambda = 0$ в упругих стержневых системах [4–7], то решение (27) удовлетворяет и системе уравнений (22).

ЗАМЕЧАНИЕ. Следует отметить, что решение (26), (27) существует у системы и в общем случае, без предположения малости крутки ($\varphi_k - \varphi_{k-1}$), поскольку из (28), (18), (19) следует $L_k^3 = \text{const}$, $L_k^x = \text{const}$, и при условии $R_y = R_z = 0$ система (16), (17) удовлетворена.

5. Решение типа "восьмерки". В работах [4–7] для плоской осевой линии упругого стержня было найдено еще одно точное решение, которое соответствует конфигурации упругой линии вида "восьмерки". Это решение было получено в эллиптических функциях. Найдем соответствующий ему аналог в конечномерном случае.

Поскольку моделируемая ось стержня симметрична относительно оси OY , полагаем наличие симметрии и в ее конечномерном аналоге. При этом считаем, что число тел в системе четное (т. е. $n = 2N$) и, кроме того,

$$h_{N+l} = h_l; \quad \theta_{N+l} = \pi - \theta_l \quad (l = \overline{1, N}). \quad (30)$$

Тогда из (22), (30) следует, что $R_z = 0$, и система уравнений (22), (24), позволяющая определить форму упругой оси, принимает вид

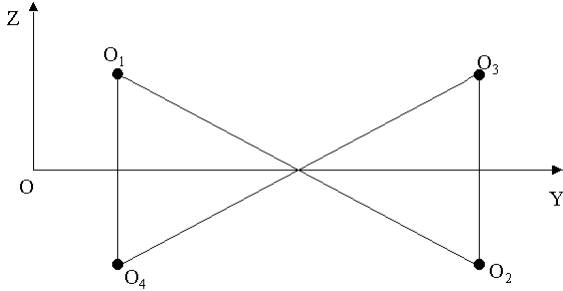


Рис. 1. Система четырех тел.

$$\sin(\theta_{k+1} - \theta_k) - \sin(\theta_k - \theta_{k-1}) = a_k R_y \cos \theta_k, \quad (31)$$

$$k = \overline{1, N},$$

$$\sum_{k=1}^{2N} h_k \sin \theta_k = 0. \quad (32)$$

Найдем решение этой системы в случаях, когда она состоит из четырех и шести тел.

6. Случай четырех тел. В случае четырех тел возможна лишь одна конфигурация системы тел, моделирующая упругую ось, типа "восьмерки" (рис. 1).

Согласно (30), длины осей симметрий твердых тел S_k , $k = \overline{1, 4}$, должны удовлетворять равенствам: $h_1 = h_3$; $h_2 = h_4$. Решение ищем в виде

$$\theta_1 = -\theta, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_3 = \pi + \theta, \quad \theta_4 = \frac{\pi}{2}. \quad (33)$$

Подставляя (33) в (31), (32), получим

$$R_y = \frac{2}{a_1}, \quad \sin \theta = \frac{h_2}{h_1}. \quad (34)$$

Итак, при условии, что сила реакции и угол θ удовлетворят соотношениям (34), система (31), (32) допускает решение (33).

Теперь найдем углы φ_k из системы уравнений (23), в которой коэффициенты b_k зависят от θ_k . Подставляя (33) в выражения для коэффициентов b_k , получаем

$$b_k = \frac{c_2^2}{2h} [1 - \sin \theta] = b,$$

т. е. в случае четырех тел все b_k равны и система (23) приводится к виду (29), а φ_k определяются из (26).

7. Случай шести тел. В случае шести тел возможно два варианта моделирования оси стержня типа "восьмерки".

В первом случае оси O_2O_3 и O_5O_6 пересекаются не в шарнирной точке (рис. 2), а во втором (рис. 3) – в шарнире (при этом точки O_2 и O_5 совпадают). Назовем последний вариант случаем шарнирного пересечения осей.

Рассмотрим сначала первый вариант (рис. 2). Полагаем, что длины осей симметрии тел и углы удовлетворяют равенствам

$$O_1O_2 = O_3O_4 = h_1, \quad O_2O_3 = h_2; \quad (35)$$

$$\theta_1 = \theta, \quad \theta_2 = -\psi, \quad \theta_3 = \theta. \quad (36)$$

В (36) углы θ, ψ строго больше нуля и меньше $\pi/2$. Остальные углы и длины с учетом (35), (36) находятся из (30).

После подстановки (35), (36) в (31), (32) получаем, что искомое решение существует, если углы θ, ψ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\sin 2\theta - \sin(\theta + \psi)}{2 \sin(\theta + \psi)} = a \frac{\cos \theta}{\cos \psi}, \quad (37)$$

$$2a \sin \theta = \sin \psi, \quad (38)$$

где $a = h_1/h_2$.

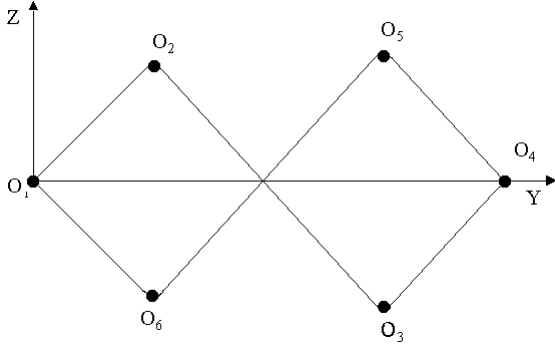


Рис. 2. Система шести тел.

Допустим, что

$$\cos \psi = p \cos \theta. \quad (39)$$

Очевидно, что введенный в (39) дополнительный параметр p больше нуля, так как углы θ и ψ острые.

Из (38), (39) получаем

$$4a^2 \sin^2 \theta + p^2 \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \sin^2 \theta = \frac{1 - p^2}{4a^2 - p^2},$$

откуда следует

$$0 < \frac{1 - p^2}{4a^2 - p^2} < 1. \quad (40)$$

Подставляя (38), (39) в (37) и учитывая, что $\sin \theta \cos \theta \neq 0$, получаем уравнение

$$p^2 + 2p(2a - 1) + 4a^2 = 0. \quad (41)$$

Корни уравнения (41) действительны при условии

$$a \leq \frac{1}{4} \quad (42)$$

и при этом уравнение (41) имеет два положительных действительных корня.

Из анализа неравенства (40) с учетом условия (42) следует, что

$$4a^2 < 1, \quad p^2 > 1. \quad (43)$$

Требование существования у уравнения (41) корня $p > 1$ выполняется при условии

$$0 < a < \frac{\sqrt{2} - 1}{2}. \quad (44)$$

Таким образом, решение (36) существует для рассматриваемой системы шести тел, если углы θ и ψ определяются из соотношений

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{1 - p^2}{4a^2 - p^2}}, \quad \sin \psi = 2a \sqrt{\frac{1 - p^2}{4a^2 - p^2}},$$

где $p = -2a + 1 + \sqrt{1 - 4a}$, а $a \in (0, (\sqrt{2} - 1)/2)$.

Теперь определим крутку $\varphi_k - \varphi_{k-1}$. Для решения (30), (36) получаем

$$b_1 = b_4 = b_7 = \frac{c_2^2}{2h} [1 - \cos 2\theta]; \quad b_2 = b_3 = b_5 = b_6 = \frac{c_2^2}{2h} [1 + \cos(\theta + \psi)].$$

Обозначим

$$c = \frac{1 + \cos(\theta + \psi)}{1 - \cos 2\theta} > 0 \quad (45)$$

и, подставляя b_k с учетом (45) в систему уравнений (23), приводим ее к системе линейных однородных уравнений

$$\hat{D}\varphi = 0, \quad (46)$$

где

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} -c-1 & c & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -c-1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c-1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & c & -c-1 \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{pmatrix}.$$

Вводя в (46) замену переменных

$$u_k = \frac{1}{2}(\varphi_k + \varphi_{n-k+1}), \quad v_k = \frac{1}{2}(\varphi_k - \varphi_{n-k+1}) \quad (k = 1, 2, 3; \quad n = 6), \quad (47)$$

получаем

$$\begin{aligned} u_2 - u_1 &= 0, & cv_2 - (c+2)v_1 &= 0, \\ u_1 - 2u_2 - u_3 &= 0, & v_1 - 2v_2 - v_3 &= 0, \\ u_2 - u_3 &= 0; & cv_2 - (c+2)v_3 &= 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Определитель первой системы (48) равен нулю и ее решение

$$u_3 = u_2 = u_1 = u/2. \quad (49)$$

Здесь u — произвольная постоянная.

Определитель же второй системы равен нулю только при условии $c = -2$, что невозможно, так как из (45) следует $c > 0$. Поэтому

$$v_3 = v_2 = v_1 = 0. \quad (50)$$

Подставляя (49), (50) в (47), получаем $\varphi_k = u$, $k = \overline{1, 6}$, тогда $\varphi_k - \varphi_{k-1} = 0$. Таким образом, в изучаемом случае $\varphi_k \neq 0$, но разность $\varphi_k - \varphi_{k-1}$ равна нулю, т. е. в рассматриваемом случае крутка отсутствует.

Отметим один интересный случай, когда $c = 1$. При этом система уравнений (46) приводится к виду (29) и имеет решение (26).

Полагая в (45) $c = 1$, получаем, что это возможно, если $\cos(\theta + \psi) = \cos 2\theta$. Из анализа этого соотношения при условии, что углы θ и ψ больше нуля и меньше $\pi/2$, получаем

$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}, \quad 0 < \psi < \frac{\pi}{2}, \quad 3\theta + \psi = \pi.$$

Таким образом, при рассматриваемой конфигурации тел возможен случай, когда крутка отлична от нуля.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если полагать, как и в [1], что $\varphi_0 = 2\pi + \varphi_n$, $\varphi_{n+1} = \varphi_1 - 2\pi$, то аналогично можно показать, что крутка будет отлична от нуля при произвольном $c > 0$.

8. Случай шарнирного пересечения осей. При такой конфигурации тел в точке O_2 , совпадающей с точкой O_5 , расположен упругий шарнир, являющийся общим для тел S_1, S_2, S_4, S_5 .

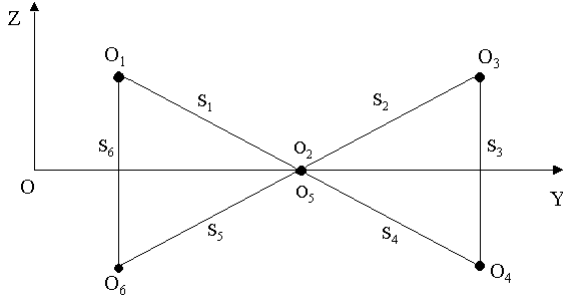


Рис. 3. Шарнирное пересечение.

Для записи уравнений движения в виде (2), (3) введем дополнительно безмассовое тело S_7 , позволяющее выделить, как и в (2), реакции \mathbf{R}_k . Тогда, как и в п.1, будем считать, что сила реакции предшествующего тела на последующее равна \mathbf{R}_k , а действие последующего на предшествующее $(-\mathbf{R}_{k+1})$.

Обозначим дополнительные реакции $\mathbf{R}_{17}, \mathbf{R}_{27}, \mathbf{R}_{47}, \mathbf{R}_{57}$ и будем считать, что действие тел S_1 и S_4 на S_7 определяют соответственно реакции \mathbf{R}_{17} и \mathbf{R}_{47} , а действие S_2 и S_5 на S_7 — соответственно $-\mathbf{R}_{27}$ и $-\mathbf{R}_{57}$. Реакции же $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4, \mathbf{R}_6$ вводятся как и прежде. Тогда, добавляя к уравнениям (13) уравнения равновесия для тела S_7 , получаем

$$\mathbf{R}_{17} = \mathbf{R}_{57} = \mathbf{R}_6 = \mathbf{R}_1,$$

$$\mathbf{R}_{27} = \mathbf{R}_{47} = \mathbf{R}_4 = \mathbf{R}_3.$$

Таким образом, в отличие от предыдущего случая, мы имеем две отличные от нуля силы реакции, однако, как и в п. 5, учитывая симметрию моделируемой оси стержня относительно OY , получаем $R_{1z} = R_{3z} = 0$.

Допустим далее, что длины осей симметрий тел связаны соотношениями

$$\begin{aligned} O_1O_2 = O_2O_3 = O_4O_5 = O_5O_6 &= h_1, \\ O_3O_4 = O_6O_1 &= h_2. \end{aligned} \tag{51}$$

Для кривой, изображенной на рис. 3, разыскиваемое решение имеет вид

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -\theta, & \theta_2 &= \theta, & \theta_3 &= -\frac{\pi}{2}, \\ \theta_4 &= \pi - \theta, & \theta_5 &= \pi + \theta, & \theta_6 &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{52}$$

При подстановке его в (22), (24) с учетом (51) находим выражение для сил реакций. Они равны

$$R_{1y} = -R_{3y} = \frac{2 \sin \theta + 1}{a_1}.$$

Здесь значение угла θ зависит от соотношений между длинами h_1 и h_2 ($\sin \theta = h_2/(2h_1)$), и в случае одинаковых тел ($h_1 = h_2 = h$) получаем $\theta = \pi/6$.

Подставляя (52) в (23), находим b_k для этого случая. После сокращения на общий множитель эти коэффициенты можно считать равными

$$b_1 = b_3 = b_4 = b_6 = b_7 = 1; \quad b_2 = b_5 = k_1,$$

где $k_1 = (1 + \cos 2\theta)/(1 - \sin \theta)$.

В отличие от предыдущего случая, нетрудно убедиться, что при условии острых углов θ и ψ , величина k_1 не может равняться единице и система (23) не приводится к виду (29). Однако, ее определитель равен нулю, и она имеет решение $\varphi_k = u$, $k = \bar{1}, \bar{6}$.

Таким образом, для всех рассмотренных случаев решение типа "восьмерки" существует и при этом углы кручения не равны нулю, однако крутка $(\varphi_k - \varphi_{k-1})$ может быть как нулевой, так и отличной от нуля.

Замечание. Отметим, что для конфигурации, изображенной на рис.3, существует еще одно решение (для этого на рис. 3 необходимо поменять местами точки O_3 и O_4):

$$\theta_1 = \theta_2 = -\theta, \quad \theta_3 = \theta_6 = \pi/2, \quad \theta_4 = \theta_5 = \pi + \theta.$$

При подстановке его в (22), (24) с учетом (51) находим $R_{1y} = R_{3y} = 1/a_1$. Как и в предыдущем случае, значение угла θ зависит от соотношений между длинами h_1 и h_2 , и в случае одинаковых тел $\theta = \pi/6$.

1. Болграбская И.А., Щепин Н.Н. Конечномерная модель замкнутого упругого стержня // Механика твердого тела. – 2005. – Вып. 35. – С.33–39.
2. Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононыхин Г.А. Устойчивость движения систем связанных твердых тел. – Киев: Наук. думка, 1991. – 168 с.
3. Илюхин А.А. Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней. – Киев.: Наук. думка, 1979. – 216 с.
4. Wadati M., Tsuru H. Elastic model of looped DNA // Physica. – 1986. – 21D. – P. 213–226.
5. Бензэм Дж. Механика и равновесные состояния сверхспирализованной ДНК // В кн.: Математические методы для анализа последовательностей ДНК. – М.: Мир, 1999. – С. 308–338.
6. Starostin E.L. Three-dimensional shapes of looped DNA // Colloquium EVROMECH 325 (19-22 September, 1994, L'Aquila, Italy). – 1994. – 23 p.
7. Кугушев Е.И., Пирогова Е.Е., Старостин Е.Л. Математическая модель образования трехмерной структуры ДНК. – 1997. – 24 с. – (Препринт / РАН Ин-т проблем механики им. М.В. Келдыша; № 77).
8. Савченко А.Я., Болграбская И.А. Система твердых тел, образующих полужамкнутую цепь // Механика твердого тела. – 1994. – Вып.26(I). – С.33–39.