НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ВЫПУСК 32

# МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Межведомственный сборник научных трудов Основан в 1969 г.

ДОНЕЦК 2002

ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2002. Вып. 32

УДК 531.38

©2002. **А.М. Ковалев**

# ВЛОЖЕНИЕ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ В СЕМЕЙСТВО ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ И АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ ГЕССА

Рассмотрена задача о включении инвариантного многообразия динамической системы в семейство интегральных многообразий. Показано, что такое включение всегда возможно, если только инвариантное многообразие не является особым (состоящим из особых точек системы) коразмерности единица. Это дает возможность изучать иинвариантные многообразия, используя уравнение для интегралов, а не уравнения Леви-Чивита, содержащие неопределенные множители. Установлена определяющая роль особых многообразий в формировании фазового портрета динамической системы и получены следующие из этого свойства интегралов. Результаты применены к анализу решений уравнений Эйлера-Пуассона. Дана характеристика четвертых интегралов в случаях Эйлера, Лагранжа и Ковалевской. Доказано, что при условиях Гесса существует четвертый интеграл, частным случаем которого являются интегралы Эйлера и Лагранжа, а также решения Гесса и Докшевича.

**Введение.** Проблема интегралов (или первых интегралов) вместе с задачей Коши занимает центральное место в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Для систем с достаточно хорошими правыми частями, которые и будут рассматриваться в данной статье, задача Коши хорошо изучена и разработаны различные численные методы ее решения, что позволяет для конкретной задачи получить решение и осуществить компьютерное моделирование. Все точки фазового пространства разделены на обыкновенные и особые и проанализированы локальные и глобальные свойства решений. Задача нахождения интегралов сведена к решению линейных однородных уравнений в частных производных первого порядка. Доказано существование полного набора независимых интегралов в окрестности обыкновенной точки. Существование интегралов в окрестности особой точки, глобальные свойства интегралов и определяемые ими свойства фазовых портретов динамических систем по-прежнему остаются актуальными проблемами. Трудности их решения приводят к появлению новых понятий и направлений, таких как интегрируемость и неинтегрируемость, странные аттракторы и фракталы, детерминированный хаос и т.д.

Исторически сложилось, что наибольшее внимание вопросам существования интегралов уделяется в теоретической механике и, особенно, в гамильтоновой механике. Областью применения теоретических результатов и источником новых подходов были и остаются две задачи: задача $N$ тел и задача о движении твердого тела с неподвижной точкой в поле силы тяжести. В этих задачах установлены случаи существования полного набора интегралов: задача двух тел, случаи Эйлера, Лагранжа и Ковалевской. Для механических систем общего вида рассмотрены вопросы существования интегралов специального вида: циклических, голоморфных, алгебраических и т.д., изучены связи между механическими и геометрическими свойствами и существованием интегралов, исследовано влияние возмущения параметров на сохранение интегралов и др. Однако полученных теоретических результатов пока недостаточно для полного решения этих двух задач классической механики.

Практически одновременно с исследованиями интегралов началось построение частных решений. Укажем на решения Лагранжа задачи трех тел и решения Гесса и Горячева-Чаплыгина уравнений Эйлера-Пуассона, как на одни из первых и наиболее интересные. Эти исследования проводились параллельно и в значительной мере изолированно в связи со сложившимся представлением, что в общем случае фазовое пространство нелинейной динамической системы не расслаивается на интегральные многообразия и могут существовать изолированные инвариантные многообразия, как раз и соответствующие частным решениям. В современном изложении эта ситуация нашла образное описание в том, что эти инвариантные многообразия "взвешены островами в море хаоса".

Уравнения инвариантных многообразий получены Леви-Чивита и представляют собой систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, содержащих неопределенные множители. Видимо, наличие этих неопределенных множителей и стало причиной того, что данные уравнения недостаточно известны и изучены. Однако подходы Барбашина-Красовского в теории устойчивости и Калмана в теории управляемости требуют детального исследования свойств инвариантных многообразий и, в частности, возможности замены их интегральными многообразиями. В теории динамических систем последний вопрос может быть сформулирован как задача о возможности включения заданного инвариантного многообразия в семейство интегральных и представляет самостоятельный интерес. Этой задаче и посвящена настоящая статья.

В первом разделе работы дана постановка задачи и приведены необходимые определения и уравнения. Вопросам включения инвариантного многообразия в семейство интегральных посвящен второй раздел. Роль особого многообразия в формировании фазового портрета динамической системы и вытекающие отсюда свойства интегралов описаны в третьем разделе. В четвертом разделе приведены уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой в поле силы тяжести и дано описание четвертых интегралов в случаях Эйлера, Лагранжа и Ковалевской. В пятом разделе доказывается, что при условиях Гесса существует четвертый интеграл, частным случаем которого являются интегралы Эйлера и Лагранжа, а также решения Гесса и Докшевича.

**1. Постановка задачи.** Рассматриваются динамические системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = f(x). \tag{1}$$

Здесь $x \in D \subseteq R^n$ – фазовый вектор, $\dot{x} = dx/dt,\ t \in [0, \infty),\ f(x)$ предполагается достаточное число раз непрерывно дифференцируемой функцией для $x \in D$.

Пусть $x(t; x^0)$ – решение системы (1) с начальным условием $x(0; x^0) = x^0 \in D$. Если $x(t; x^0) = x^0$ для всех $t \geq 0$, то точка $x^0$ называется особой и для нее имеем $f(x^0) = 0$. Если $f(x^0) \neq 0$, то точка $x^0$ называется обыкновенной.

Определение 1. Многообразие $M \subset D$ называется инвариантным многообразием системы (1), если $x(t; x^0) \in M$ для всех $t \geq 0$ и произвольного $x^0 \in M$. Если все $x^0 \in M$ являются особыми точками системы (1), то многообразие $M$ называется особым инвариантным многообразием.

Определение 2. Функция $F(x)$ называется интегралом системы (1), если она сохраняет постоянное значение на любом решении системы (1): $F(x(t; x^0)) = c(x^0)$ для всех $t \geq 0$ и произвольного $x^0 \in D$.

Уравнение $F(x) = c$ определяет в фазовом пространстве инвариантное многообразие, которое называют интегральным многообразием. Более того, данное уравнение задает однопараметрическое семейство интегральных многообразий, поскольку они существуют для значений $c$ из некоторого промежутка.

Определение 3. Многообразие $N = \{x : F_i(x) = c_i,\ i = 1, ..., k\}$, где $F_i$ – независимые интегралы системы (1), называется интегральным многообразием системы (1). Многообразия $N$ при изменении постоянных $c_i$ в промежутках $(c_{i0}, c_{i1})$ образуют $k$-параметрическое семейство интегральных многообразий.

Интегралы системы (1) находятся как решения линейного однородного уравнения в частных производных

$$L_f F = 0 \quad \left(L_f = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}\right). \tag{2}$$

Уравнение (2) задает $k$-параметрическое семейство интегральных многообразий, поскольку оно определяется $k$ независимыми решениями этого уравнения.

Переходя к рассмотрению инвариантных многообразий, ограничимся случаем, когда они могут быть представлены в виде $M = \{x : V_i(x) = 0,\ i = 1, ..., n-m;\ m = \mathrm{dim} M\}$. Уравнения инвариантных многообразий получены Леви-Чивита [1]

$$L_f V_i = \sum_{j=1}^{n-m} \lambda_{ij}(x) V_j, \qquad i = 1, ..., n-m, \tag{3}$$

где функции $\lambda_{ij}(x)$ зависят от выбора функций $V_i(x)$, определяющих инвариантное многообразие. Инвариантное многообразие может быть описано [2] одной функцией $V(x)$:

$$V(x) = 0, \qquad L_f V(x) = 0, \quad \dots, \quad L_f^{n-m-1} V(x) = 0, \qquad (L_f^2 V = L_f(L_f V)), \tag{4}$$

которая удовлетворяет уравнению

$$L_f^{n-m} V + \lambda_1(x) L_f^{n-m-1} V + .. + \lambda_{n-m}(x) V = 0. \tag{5}$$

Исследование инвариантных многообразий по сравнению с интегральными многообразиями осложнено, во-первых, переходом от одного уравнения (2) к системе уравнений (3) либо к одному уравнению высокого порядка (5) и, во-вторых, наличием неопределенных функций $\lambda_{ij}(x), \lambda_i(x)$. Поэтому с аналитической и геометрической точек зрения представляет интерес задача о возможности включения инвариантного многообразия в семейство интегральных.

Задача 1. Задано инвариантное многообразие системы (1). Требуется включить его в некоторое семейство интегральных многообразий, то есть указать семейство интегральных многообразий $F_i(x) = c_i$ $(i = 1, ..., k)$, из которого при частных значениях постоянных $c_i^0$ получается заданное инвариантное многообразие.

**2. Включение инвариантного многообразия в семейство интегральных.** При исследовании инвариантных и интегральных многообразий в зависимости от способа их описания будем различать функциональный и параметрический подходы. При функциональном подходе интегральные многообразия описываются соотношениями $F_i(x) = c_i$ $(i = 1, ..., k)$, а функции $F_i(x)$ удовлетворяют уравнениям (2). Инвариантные многообразия описываются соотношениями $V_i(x) = 0,\ i = 1, ..., n-m$ и уравнениями (3), либо соотношениями (4) и уравнениями (5).

При параметрическом подходе эти многообразия описываются параметрически $x = \varphi(\tau_1, ..., \tau_{n-m})$. В качестве параметров можно взять локальные координаты. Поскольку локальные координаты можно выбирать различными способами, то выбор функции $\varphi$ допускает значительный произвол. Учитывая тот факт, что изучаемые многообразия состоят из траекторий, среди различных параметризаций выделим такую, в которой в качестве одного из параметров принято время $t$. Такую параметризацию назовем естественной. Ее можно представить в виде

$$x = x(t; x^0(\tau_1, ..., \tau_{n-m-1})),$$

где $x^0(\tau_1, ..., \tau_{n-m-1})$ есть параметризация начального состояния, которая, как и функции $\varphi$, допускает произвол. Естественная параметризация всегда существует в окрестности обыкновенной точки, причем она обладает следующим свойством (*a*): для рассматриваемых значений $\tau_1, ..., \tau_{n-m-1}$ векторы $f(x^0)$, $\partial x^0/\partial \tau_1, ..., \partial x^0/\partial \tau_{n-m-1}$ линейно независимы. Применение естественной параметризации для многообразий, содержащих особые точки, требует дополнительного рассмотрения. И, наконец, особое инвариантное многообразие естественной параметризаци не допускает. Это, в частности, объясняется тем, что особые точки не перемещаются с изменением времени, и поэтому время нельзя выбирать в качестве локальной координаты. Вопрос о включении инвариантных многообразий в семейство интегральных решается по-разному для особых и неособых инвариантных многообразий.

Теорема 1. Инвариантное многообразие размерности $n-k$ в окрестности обыкновенной точки включается в $k$-параметрическое семейство интегральных многообразий.

*Доказательство.* Определим инвариантное многообразие размерности $n-k$ в окрестности обыкновенной точки с помощью естественной параметризаци: $x = x(t; x^0(\tau_1, ...$ $..., \tau_{n-k-1}))$. Введем расширенное $n-1$ -мерное многообразие начальных состояний $X^0(\tau_1, ..., \tau_{n-1})$, включающее при $\tau_{n-k} = 0, ..., \tau_{n-1} = 0$ исходное начальное многообразие: $X^0(\tau_1, ..., \tau_{n-k-1}, 0, ..., 0) = x^0(\tau_1, ..., \tau_{n-k-1})$ и удовлетворяющее свойству (*a*): векторы $f(X^0), \partial X^0/\partial \tau_1, ..., \partial X^0/\partial \tau_{n-1}$ линейно независимы. Множество решений $x(t; X^0(\tau_1, ..., \tau_{n-1}))$ системы (1) включает рассматриваемое инвариантное многообразие $x(t; x^0(\tau_1, ..., \tau_{n-k-1}))$ и совпадает с ним при $\tau_{n-k} = 0, ..., \tau_{n-1} = 0$. Разрешив уравнения $x = x(t; X^0(\tau_1, ..., \tau_{n-1}))$ относительно $t, \tau_1, ..., \tau_{n-1}$, получим $n-1$ независимых интегралов $\tau_i(x), i = 1, ..., n-1$. По построению $k$-параметрическое семейство интегральных многообразий $\tau_i(x) = c_i, \quad i = n-k, ..., n-1$, включает рассматриваемое инвариантное многообразие, которое получается из него при $c_i = 0, \ i = n-k, ..., n-1$. □

Теорема 2. Особое инвариантное многообразие размерности $n-k$ включается в $(k-1)$-параметрическое семейство интегральных многообразий.

*Доказательство.* Определим особое инвариантное многообразие размерности $n-k$ с помощью параметризации $x = x^0(\tau_1, ..., \tau_{n-k})$ . Введем расширенное $(n-1)$-мерное многообразие начальных состояний $X^0(\tau_1, ..., \tau_{n-1})$, включающее при $\tau_{n-k+1} = 0, ..., \tau_{n-1} = 0$ особое многообразие: $X^0(\tau_1, ..., \tau_{n-k}, 0, ..., 0) = x^0(\tau_1, ..., \tau_{n-k})$ и удовлетворяющее свойству (*a*) при $\tau_{n-k+1}^2 + ... + \tau_{n-1}^2 \neq 0$ – векторы $f(X^0), \partial X^0/\partial \tau_{n-k+1}, ..., \partial X^0/\partial \tau_{n-1}$ линейно независимы. Множество решений $x(t; X^0(\tau_1, ..., \tau_{n-1}))$ системы (1) удовлетворяет условию $x(t; X^0(\tau_1, ..., \tau_{n-k}, 0, ..., 0)) = x^0(\tau_1, ..., \tau_{n-k})$. Точки $X^0(\tau_1, ..., \tau_{n-1})$ при $\tau_{n-k+1}^2 + ... + \tau_{n-1}^2 \neq$ $\neq 0$ являются обыкновенными точками системы (1), поэтому, разрешив в окрестности этих точек уравнения $x = x(t; X^0(\tau_1, ..., \tau_{n-1}))$ относительно $t, \tau_1, ..., \tau_{n-1}$, получим $(n-1)$ независимых интегралов $\tau_i(x), \ i = 1, ..., n-1$. По построению $k-1$-параметрическое семейство интегральных многообразий $\tau_i(x) = c_i, \ i = n-k+1, ..., n-1$, включает инвариантное многообразие. Интегральное многообразие $\tau_i(x) = 0$ $(i = n-k+1, ..., n-1)$, либо совпадает с рассматриваемым особым инвариантным многообразием, либо является $(n-k+1)$-мерным инвариантным многообразием, которое содержит заданное особое многообразие. □

Из теоремы 2 для $k = 1$ получаем следующее утверждение.

Следствие 1. Особое инвариантное многообразие размерности $n - 1$ включается в семейство интегральных многообразий тогда и только тогда, когда множитель Леви-Чивита тождественно равен нулю.

**3. Уравнения Леви-Чивита и структура интегралов.** Результаты предыдущего пункта показывают, что инвариантные многообразия, кроме особого инвариантного многообразия размерности $n-1$, включаются в семейство интегральных. На этом основании исследование инвариантных многообразий динамических систем можно проводить по следующей схеме. Первый шаг – изучение особого инвариантного многообразия, которое следует из уравнения $f(x) = 0$. На следующем шаге исследуются интегральные многообразия на основе уравнений (2). Этот анализ дает возможность установить все инвариантные многообразия динамической системы. Следующий отсюда важный вывод состоит в том, что находится "выделенное" инвариантное многообразие – особое, возможно, не являющееся интегральным, а все остальные являются интегральными многообразиями. Это позволяет избежать решения уравнений (3), (5), содержащих неопределенные множители, что важно как само по себе, так и, особенно, при применении метода инвариантных многообразий в других задачах, и, в первую очередь, задачах управления и устойчивости.

Полученный вывод о включении инвариантных многообразий в семейство интегральных указывает еще на одну грань частных решений дифференциальных уравнений, а именно, на возможность их использования для построения интегралов и описания их структуры. Решение этой задачи для инвариантных многообразий произвольной размерности достаточно трудно, однако для многообразий размерности $n - 1$ можно получить следующее свойство.

Теорема 3. Пусть для системы (1) известны $k$ инвариантных многообразий размерности $n - 1$, описываемых уравнениями $V_i(x) = 0,\ i = 1, ..., k$, для которых множители Леви-Чивита удовлетворяют условию $\alpha_1\lambda_1 + ... + \alpha_k\lambda_k = 0,\ \alpha_i$ – некоторые числа. Тогда система (1) допускает интеграл $V_1^{\alpha_1}V_2^{\alpha_2}...V_k^{\alpha_k} = c$.

Теорема доказывается непосредственной проверкой с помощью уравнений (2), (3).

Отметим, что утверждение теоремы не зависит от того, имеет ли уравнение $V_i(x) = 0$ решение или нет, то есть для построения интеграла можно использовать и “мнимые” решения, которые известны, например, в динамике твердого тела и физического значения им не придавалось. Следствием теоремы 3 является известная теорема о построении интеграла по двум интегрирующим множителям. Действительно, интегрирующий множитель $\mu(x)$ системы (1) удовлетворяет уравнению $L_f\mu = \mu \mathrm{div} f$. Тогда для двух решений $\mu_1, \mu_2$ условия теоремы 3 выполнены при $\alpha_1 = -\alpha_2 = 1$, что приводит к известному интегралу $\mu_1\mu_2^{-1} = c$. Укажем еще одно свойство интегрирующего множителя: если уравнение $\mu(x) = 0$ имеет решение, то оно определяет инвариантное многообразие. К сожалению, для уравнений Эйлера-Пуассона известный интегрирующий множитель $\mu(x) = 1$ инвариантного многообразия не определяет.

Теорема 3 может быть обобщена в различных направлениях и использована для описания структуры интегралов. Так, при $k = 2$ и инвариантных многообразий размерности $n - 2$ для описания интегралов может быть применена классификация особых точек дифференциальных уравнений на плоскости.

Теорема 4. Пусть инвариантные многообразия заданы уравнениями $V_1 = 0, V_2 = 0$. В зависимости от вида уравнений Леви-Чивита возможны следующие типы интегралов:

1. гиперболический интеграл: $V_1V_2 = c: \ L_fV_1 = \lambda V_1, \ L_fV_2 = -\lambda V_2$ ;
2. дикритический интеграл $V_1/V_2 = c: \ L_fV_i = \lambda V_i \ (i = 1, 2)$;
3. эллиптический интеграл $V_1^2 + V_2^2 = c: \ L_fV_1 = -\lambda V_2, \ \ L_fV_2 = \lambda V_1$;
4. спиральный интеграл $\ln(V_1^2 + V_2^2) + 2\mathrm{arctg}(V_2/V_1) = c:$

$$L_fV_1 = -V_1 - V_2, \ L_fV_2 = V_1 - V_2.$$

Доказательство теоремы проводится непосредственной проверкой с помощью уравнений (2).

Теоремы 3, 4 и аналогичные утверждения могут быть использованы для построения интегралов из известных частных решений и, наоборот, для получения инвариантных многообразий из известных интегралов. В качестве иллюстративного примера проанализируем инвариантные многообразия и интегралы одной системы, демонстрирующей сложность метода инвариантных соотношений [3]

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = x^2 + z^2 - a^2, \quad \dot{z} = -\frac{1}{z}(2x^2 + z^2 - a^2). \tag{6}$$

Систему (6) рассматриваем в области $D = R^3 \backslash \{(x, y, z) : z = 0\}$. Особое инвариантное многообразие определяется уравнениями

$$x = 0, \quad x^2 + z^2 - a^2 = 0, \quad 2x^2 + z^2 - a^2 = 0 \tag{7}$$

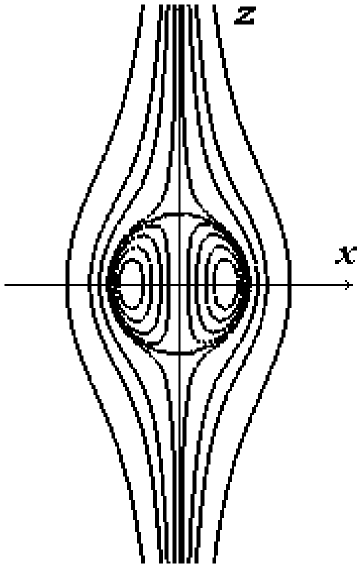
и представляет собой прямые. Первые два уравнения (7) являются независимыми и могут быть использованы для задания особого инвариантного многообразия. Для определяющих его функций $V_1 = x, \ V_2 = x^2 + z^2 - a^2$ запишем уравнения Леви-Чивита

$$L_fV_1 = V_1, \qquad L_fV_2 = -2V_2.$$

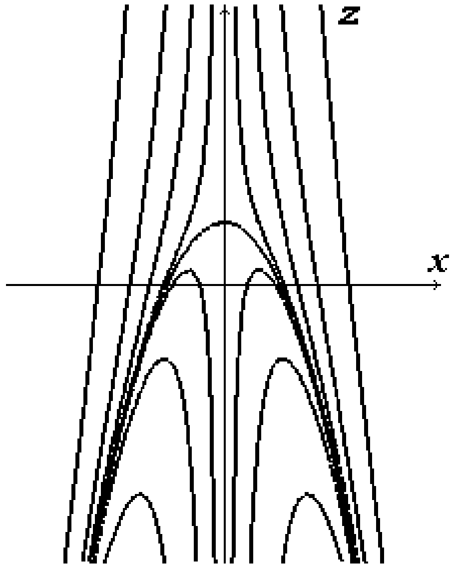
Отсюда видно, что двумерные многообразия, определяемые уравнениями $V_1 = 0$ и $V_2 = 0$, являются инвариантными. Для множителей Леви-Чивита выполнено условие $2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, и по теореме 3 система (6) допускает интеграл $I_1 = V_1^2V_2 = x^2(x^2 + z^2 - a^2) = c_1$. С помощью этого интеграла из двух первых уравнений (6) находим $dy/dx = c_1/x^3$, то есть система имеет еще один интеграл $I_2 = 2y + x^2 + z^2 = c_2$. Таким образом, для системы (6) указан полный набор интегралов

$$I_1 = x^2(x^2 + z^2 - a^2) = c_1, \qquad I_2 = 2y + x^2 + z^2 = c_2.$$

Строение фазового пространства можно описать следующим образом. В пространстве имеется особое инвариантное многообразие, состоящее из двух прямых $x = 0$, $z = \pm a$. Это одномерное многообразие включается в двумерное интегральное многообразие $I_1 = 0$, состоящее из двух связных компонент: плоскости $x = 0$ и кругового цилиндра $x^2 + z^2 = a^2$, пересекающихся по особому многообразию. Любое другое инвариантное многообразие является интегральным и определяется уравнениями: $I_1 = c_1, I_2 = c_2$ – траектория – одномерное инвариантное многообразие; $F(I_1, I_2) = c$ – двумерное инвариантное многообразие. Достаточно простую картину расслоения фазового пространства на интегральные поверхности дает первый интеграл $I_1$: это семейство цилиндрических поверхностей $x^2(x^2 + z^2 - a^2) = c_1$, сечение которого плоскостью $y = \mathrm{const}$ представлено на рис.1.




а)




б)

*Рис. 1. Расслоение фазового пространства с помощью интеграла $I_1$ в плоскости $y = \mathrm{const}$: а) для системы (6); б) для системы (8).*

Движение в плоскости $x = 0$ происходит по направлению к особому многообразию, которое достигается за бесконечное время. По остальным траекториям движение происходит в направлении возрастания $|x|$. Все точки достигают плоскости $z = 0$ за время

$$T(z_0) = \frac{1}{2} \ln \frac{|z_0^2 - a^2 + \sqrt{(z_0^2 - a^2)^2 - 4c_1}|}{|-a^2 + \sqrt{a^4 - 4c_1}|},$$

которое конечно для всякого конечного $z_0$, кроме точек цилиндра $x^2 + z^2 - a^2 = 0$, и неограниченно возрастает при приближении точек к сепаратрисному многообразию $x(x^2 + +z^2 - a^2) = 0$.

Отметим важное значение выбора функций для описания особого инвариантного многообразия. Если в качестве таковых принять простейшие $V_1 = x,\ V_2 = z^2 - a^2$, то уравнения Леви-Чивита $L_f V_1 = V_1;\ L_f V_2 = -4V_1^2 V_2$ не позволили бы получить интеграл, пользуясь теоремой 3.

Аналогично рассматривается следующий пример[1]

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = x^2 + z^2 - b^2, \quad \dot{z} = -2(2x^2 + z - b^2). \tag{8}$$

Интегралы имеют вид

$$I_1 = x^2(x^2 + z - b^2) = c_1, \qquad I_2 = x^2 + y + z = c_2.$$

Расслоение фазового пространства с помощью интеграла $I_1$ показано на рис. 2 сечением семейства поверхностей $I_1 = c_1$ плоскостью $y = \mathrm{const}$. В отличие от предыдущего случая все решения системы (8) продолжимы на бесконечный промежуток времени.

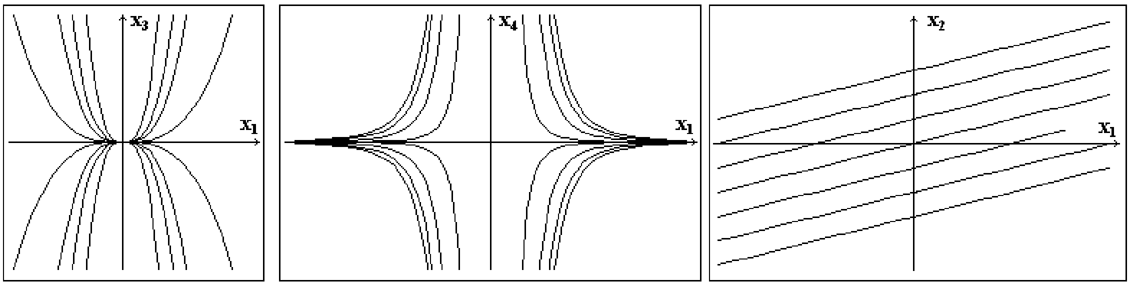
Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами являются важным классом систем при решении многих задач, в том числе и рассматриваемой в данной работе. Для них возможно полное описание типов интегралов, исходя из

[1] Автором данного примера, как и предыдущего, является Г.В. Горр

вида жордановых клеток определяющих их матриц. Эти интегралы можно использовать при описании фазового портрета многомерной системы следующим образом. Для изучаемой системы находится особое инвариантное многообразие и строится линеаризованная система в его окрестности. Интегралы линеаризованной системы являются линейным приближением интегралов исходной системы. При этом выделяется семейство интегральных многообразий, включающее особое инвариантное многообразие. Для изображения расслоения $n$-мерного фазового пространства интегралами удобны инвариантные переменные $V_i$, участвующие в формировании интегралов, например, по типам, указанным в теореме 4. Проиллюстрируем это на простом примере

$$\dot{x}_1 = x_1, \quad \dot{x}_2 = 2x_1, \quad \dot{x}_3 = 3x_3, \quad \dot{x}_4 = -4x_4.$$

Особое инвариантное многообразие одномерно $x_1 = x_3 = x_4 = 0$. По теореме 3 находим интегралы $I_1 = x_1^3 x_3^{-1} = c_1$, $I_2 = x_1^4 x_4 = c_2$, задающие двупараметрическое семейство интегральных многообразий, включающее особое инвариантное многообразие при $c_1 = c_2 = 0$. Для получения полного набора интегралов из двух первых уравнений легко находим интеграл $2x_1 - x_2 = c_0$, который можно назвать комбинационным (по причине его получения комбинацией уравнений системы).




а) б) в)

*Рис. 2. Расслоение фазового пространства линейной системы:*
*а) с помощью интеграла $I_1$ в плоскости $Ox_1x_3$; б) с помощью интеграла $I_2$ в плоскости $Ox_1x_4$;*
*в) с помощью интеграла $I_0$ в плоскости $Ox_1x_2$.*

Переменные $x_1, x_3, x_4$ являются инвариантными, и для описания фазового портрета используем интегралы: $I_1$ – в плоскости $Ox_1x_3$ (рис. 2 а), $I_2$ – в плоскости $Ox_1x_4$ (рис. 2 б), $I_0$ – в плоскости $Ox_1x_2$ (рис. 2 в). Полученные сечения интегральных расслоений дают возможность достаточно полно представить фазовый портрет системы. Выбор изображающих поверхностей (плоскости $Ox_1x_3, Ox_1x_4, Ox_1x_2$ ) и строение фазового портрета отражают общую ситуацию для линейных систем. Учет нелинейностей приводит к новым задачам, включающим, в первую очередь, изучение локального искривления интегральных поверхностей и вопросы их глобального продолжения.

**4. Случаи интегрируемости уравнений Эйлера-Пуассона.** Рассмотрим задачу существования интегралов уравнений движения твердого тела с неподвижной точкой в поле силы тяжести. Используем две формы уравнений, описывающих движение тела в главных и специальных осях. Сохраняя для главных осей обычные обозначения, запишем уравнения Эйлера-Пуассона и их интегралы

$$A_1\dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + \Gamma(e_2\nu_3 - e_3\nu_2), \tag{9}$$

$$
\begin{gathered}
\dot{\nu}_1 = \omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3 \quad (123);\\
2E = A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2 - 2\Gamma(e_1\nu_1 + e_2\nu_2 + e_3\nu_3) = 2h,\\
K = A_1\omega_1\nu_1 + A_2\omega_2\nu_2 + A_3\omega_3\nu_3 = k,\\
\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1.
\end{gathered} \tag{10}
$$

Опишем структуру четвертого интеграла в случаях Ковалевской, Эйлера и Лагранжа, используя изложенный выше подход.

*Случай Ковалевской* [4] $A_1 = A_2 = 2A_3,\ e_2 = e_3 = 0$. Интеграл Ковалевской таков

$$
(\omega_1^2 - \omega_2^2 + c\nu_1)^2 + (2\omega_1\omega_2 + c\nu_2)^2 = \mathrm{const},
$$

где $c = \Gamma e_1/A_3$. Нулевой уровень распадается на два многообразия

$$
V_1 = \omega_1^2 - \omega_2^2 + c\nu_1 = 0, \quad V_2 = 2\omega_1\omega_2 + c\nu_2 = 0. \tag{11}
$$

Уравнения (11) определяют инвариантные многообразия, для которых уравнения Леви-Чивита записываются так

$$
L_fV_1 = \omega_3V_2, \quad L_fV_2 = -\omega_3V_1 \tag{12}
$$

Из вида уравнений (12) по теореме 4 следует, что существует интеграл $V_1^2 + V_2^2 = \mathrm{const}$, который и является интегралом Ковалевской – эллиптическим по предложенной классификации.

*Случай Эйлера* [5] $\Gamma = 0$. Интеграл Эйлера имеет вид

$$
G^2 = A_1^2\omega_1^2 + A_2^2\omega_2^2 + A_3^2\omega_3^2 = g^2. \tag{13}
$$

Вместо интеграла (13) рассмотрим комбинацию интегралов

$$
I_1 = G^2 - 2A_1E = A_2(A_2 - A_1)\omega_2^2 + A_3(A_3 - A_1)\omega_3^2 = \mathrm{const}, \tag{14}
$$

Если первая ось является средней: $A_2 > A_1 > A_3$, то интеграл (14) принимает вид

$$
\begin{gathered}
I_1 = (\sqrt{A_2(A_2 - A_1)}\omega_2 + \sqrt{A_3(A_1 - A_3)}\omega_3)(\sqrt{A_2(A_2 - A_1)}\omega_2 -\\
-\sqrt{A_3(A_1 - A_3)}\omega_3) = \mathrm{const}.
\end{gathered} \tag{15}
$$

Нулевой уровень интеграла (15) распадается на два многообразия

$$
\begin{gathered}
V_1 = \sqrt{A_2(A_2 - A_1)}\omega_2 + \sqrt{A_3(A_1 - A_3)}\omega_3 = 0,\\
V_2 = \sqrt{A_2(A_2 - A_1)}\omega_2 - \sqrt{A_3(A_1 - A_3)}\omega_3 = 0,
\end{gathered} \tag{16}
$$

которые являются линейными инвариантными многообразиями, описываемыми седующими уравнениями Леви-Чивита

$$
L_fV_1 = -\lambda V_1, \quad L_fV_2 = \lambda V_2, \quad \lambda = \omega_1\sqrt{\frac{(A_2 - A_1)(A_1 - A_3)}{A_2A_3}}.
$$

Таким образом, на основании теоремы 4 в этом случае интеграл (15) является гиперболическим. Линейные инвариантные многообразия (16) пересекаются по особому инвариантному многообразию – оси $O\omega_1$. Если же первой оси соответствует наибольшее или наименьшее значения момента инерции $A_1$, то интеграл (14) является эллиптическим и его нулевой уровень совпадает с особым инвариантным многообразием (осью $O\omega_1$). При этом для $A_1 < A_2 < A_3$ имеем очевидные соотношения

$$V_1 = \omega_2\sqrt{A_2(A_2 - A_1)}, \quad V_2 = \omega_3\sqrt{A_3(A_3 - A_1)},$$

$$L_f V_1 = \lambda V_1, \quad L_f V_2 = -\lambda V_2,$$

$$\lambda = \omega_1\sqrt{\frac{(A_2 - A_1)(A_3 - A_1)}{A_2 A_3}}.$$

В случае Эйлера динамические уравнения составляют независимую подсистему, которую можно изучать отдельно. Первый интеграл из (10) и интеграл (14) составляют для нее полный набор интегралов. Особое инвариантное многообразие состоит из трех координатных осей и включается в интегральные многообразия $I_i = \Gamma^2 - 2A_iE = c_i$ $(i = 1, 2, 3)$, при этом для средней оси интеграл является гиперболическим, а для большей и меньшей осей – эллиптическим.

*Случай Лагранжа* [6] $A_1 = A_2,\ e_1 = e_2 = 0$. Из третьего уравнения (9) сразу получаем интеграл Лагранжа

$$\omega_3 = \mathrm{const}. \tag{17}$$

Особое инвариантное многообразие в пространстве $\omega, \nu$ состоит из двух компонент: одномерного многообразия, соответствующего равномерным вращениям вокруг оси $O\omega_3$, и двумерного многообразия. Их включение в семейство интегральных многообразий представляется достаточно трудной задачей. Необходимо отметить, что несмотря на простоту интеграла (17) аналитическое и геометрическое исследования движения гироскопа Лагранжа значительно сложнее анализа движение тела в случае Эйлера.

К описанию свойств интегралов Эйлера и Лагранжа вернемся в следующем пункте при рассмотрении движения гироскопа Гесса и решения Гесса в специальных осях.

**5. Интеграл Гесса.** Следующим по общности после решения Эйлера, Лагранжа и Ковалевской является решение Гесса [7]. В главных осях условия на параметры (задающие гироскоп Гесса) и инвариантное соотношение имеют следующий вид

$$e_2 = 0, \quad e_1\sqrt{A_1(A_2 - A_3)} + e_3\sqrt{A_2(A_1 - A_2)} = 0, \tag{18}$$

$$V = A_1 e_1 \omega_1 + A_3 e_3 \omega_3 = 0. \tag{19}$$

Запишем для соотношения (19) уравнение Леви-Чивита (3)

$$L_f V = \lambda V, \qquad \lambda = \frac{(A_2 - A_1)e_1}{A_3 e_3}\omega_2.$$

Решение Гесса изучалось многими авторами. Последние результаты и перспективы дальнейших исследований решения Гесса методами компьютерной динамики приведены в монографии[8]. Основная трудность и отличие этого решения от других решений динамики твердого тела состоят в том, что оно не сведено к квадратурам. Для его исследования пришлось применить [9] качественную теорию дифференциальных уравнений и использовать не главные, а специальные оси координат [10].

Поскольку дальнейшее рассмотрение будет проводиться именно в специальной системе координат, то запишем в ней уравнения Эйлера-Пуассона и их интегралы [10]

$$
\begin{gathered}
\dot{x} = (a_2 z + b_2 x) y - (a_1 y + b_1 x) z, \\
\dot{y} = (a x + b_1 y + b_2 z) z - (a_2 z + b_2 x) x - \nu_3 \Gamma, \\
\dot{z} = -(a x + b_1 y + b_2 z) y + (a_1 y + b_1 x) x + \nu_2 \Gamma, \\
\dot{\nu}_1 = (a_2 z + b_2 x) \nu_2 - (a_1 y + b_1 x) \nu_3, \\
\dot{\nu}_2 = (a x + b_1 y + b_2 z) \nu_3 - (a_2 z + b_2 x) \nu_1, \\
\dot{\nu}_3 = -(a x + b_1 y + b_2 z) \nu_2 + (a_1 y + b_1 x) \nu_1,
\end{gathered} \tag{20}
$$

$$
\begin{gathered}
2E = a x^2 + a_1 y^2 + a_2 z^2 + 2(b_1 y + b_2 z) x - 2\nu_1 \Gamma = 2h, \\
K = x\nu_1 + y\nu_2 + z\nu_3 = k, \\
\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1.
\end{gathered} \tag{21}
$$

Поясним обозначения, введенные для специальных осей, которые выбираются таким образом, что первая ось проходит через центр масс, а две другие выбираются так, чтобы компонента $a_{23}$ гирационного тензора обратилась в нуль. Компоненты гирационного тензора обозначаются через $a, a_1, a_2, b_1, b_2$, а через $x, y, z$ обозначены компоненты вектора кинетического момента.

Условия (18), означающие, что центр масс тела находится на перпендикуляре к круговому сечению гирационного эллипсоида, принимают вид

$$
b_2 = 0, \qquad a_1 = a_2 = a_*. \tag{22}
$$

Перепишем для гироскопа Гесса (при условиях (22)) уравнения (20) и интегралы (21)

$$
\begin{gathered}
\dot{x} = -b_1 z x, \quad \dot{y} = (a - a_*) z x + b_1 y z - \nu_3 \Gamma, \\
\dot{z} = -(a - a_*) y x + b_1 (x^2 - y^2) + \nu_2 \Gamma, \\
\dot{\nu}_1 = a_* z \nu_2 - (a_* y + b_1 x) \nu_3, \\
\dot{\nu}_2 = (a x + b_1 y) \nu_3 - a_* z \nu_1, \\
\dot{\nu}_3 = (a_* y + b_1 x) \nu_1 - (a x + b_1 y) \nu_2,
\end{gathered} \tag{23}
$$

$$
\begin{gathered}
2E = a x^2 + a_* (y^2 + z^2) + 2 b_1 y x - 2\nu_1 \Gamma = 2h, \\
K = x\nu_1 + y\nu_2 + z\nu_3 = k, \\
\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1.
\end{gathered} \tag{24}
$$

Из первого уравнения (23) сразу следует решение Гесса и уравнение Леви-Чивита для него

$$
V = x = 0, \tag{25}
$$

$$
L_f V = -b_1 z V. \tag{26}
$$

Уравнения (23) и интегралы (24) описывают случаи Эйлера ( $\Gamma = 0$ ) и Лагранжа ($b_1 = 0$). Поэтому, прежде чем переходить к анализу решения Гесса, рассмотрим свойства интегралов Эйлера и Лагранжа в специальных осях.

*Случай Эйлера* $\Gamma = 0$ . Интеграл Эйлера в специальных осях имеет вид

$$G^2 = x^2 + y^2 + z^2 = g^2. \tag{27}$$

Из первых двух уравнений (23) находим

$$V_1 = (a - a_*)x + 2b_1 y, \tag{28}$$

$$L_f V_1 = b_1 z V_1. \tag{29}$$

С помощью формул (25), (26), (28), (29) на основании теоремы 3 получаем интеграл

$$I_1 = VV_1 = x((a - a_*)x + 2b_1 y) = \mathrm{const}. \tag{30}$$

Отметим, что этот интеграл получается из интеграла (27) таким же образом, как и интеграл (14)

$$I_1 = -a_* G^2 + 2E.$$

*Случай Лагранжа* $b_1 = 0$. Первое уравнение (23) сразу дает интеграл Лагранжа

$$x = \mathrm{const}. \tag{31}$$

Приведем еще одну форму интеграла, связывающую случаи Лагранжа и Эйлера

$$I = a_*(x^2 + y^2 + z^2) - 2\Gamma\nu_1 = \mathrm{const}. \tag{32}$$

Интеграл (32) при $\Gamma = 0$ переходит в интеграл (27) и, наоборот, интеграл (30) при $b_1 = 0$ переходит в интеграл (31).

Переходя к рассмотрению движения гироскопа Гесса, замечаем, что по теореме 3 уравнения движения допускают дополнительный интеграл $I = xV_1$, где $V_1$ – решение уравнения (29). Необходимо только доказать, что этот интеграл не является комбинацией известных интегралов (24). Для этого используем свойства особого инвариантного многообразия гироскопа Гесса, которое представляет собой многообразие (с учетом интеграла $\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2 = 1$), состоящее из шести кривых $S_1, ..., S_6$ [11].

$S_1,\ S_2$:

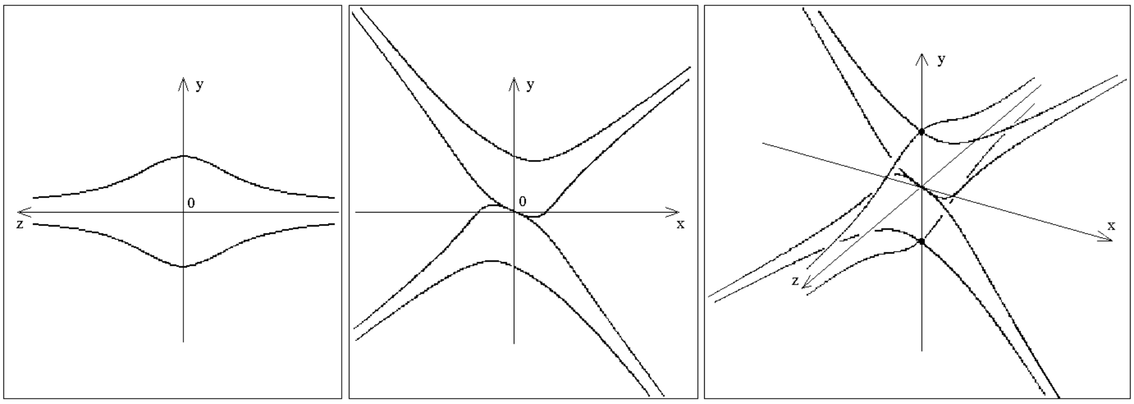
$$\begin{aligned} &x = 0,\\ &\Gamma^2 a_*^2 = b_1^2 y^2 (z^2 a_*^2 + (a_*^2 + b_1^2) y^2),\\ &\Gamma\nu_1 = b_1^2 y^2 / a_*, \quad \Gamma\nu_2 = b_1 y^2, \quad \Gamma\nu_3 = b_1 y z, \end{aligned} \tag{33}$$

$S_3, ..., S_6$:

$$\begin{aligned} &z = 0,\\ &\left[(a - a_*)yx - b_1(x^2 - y^2)\right]^2 \left[(ax + b_1 y)^2 + (a_* y + b_1 x)^2\right] = \Gamma^2 (a_* y + b_1 x)^2,\\ &\Gamma\nu_1 = \frac{ax + b_1 y}{a_* y + b_1 x} \left[(a - a_*)yx - b_1(x^2 - y^2)\right],\\ &\Gamma\nu_2 = (a - a_*)yx - b_1(x^2 - y^2), \quad \nu_3 = 0. \end{aligned}$$

Проекции кривых $S_i$ на пространство $Oxyz$ показаны на рис. 3 в, кривые $S_1, S_2$ лежат в плоскости $Oyz$ (рис. 3 а), кривые $S_3, ..., S_6$ лежат в плоскости $Oxy$ (рис. 3 б) [11]. Интеграл $I = xV_1 = c$ при $c = 0$ определяет интегральное многообразие, которое включает кривые

$S_1, S_2$ особого многообразия. Покажем, что любая комбинация интегралов (24), определяющая интегральное многообразие, включающее кривые $S_1, S_2$, не может иметь такую структуру.




а) б) в)

*Рис. 3. Проекции кривых $S_i (i = 1, ..., 6)$ на пространство $Oxyz$:*
*а) кривых $S_1 S_2$; б) кривых $S_3, ..., S_6$; в) кривых $S_1, ..., S_6$.*

Лемма. Любая комбинация интегралов (24), определяющая интегральное многообразие, включающее кривые $S_1, S_2$ особого инвариантного многообразия, не содержит $x$ в качестве множителя.

*Доказательство.* С помощью формул (33) исключим переменные $\nu_i$ из интегралов (24) энергии и площадей

$$\Gamma K = b_1 y(y^2 + z^2), \tag{34}$$

$$2a_* E = a_*^2(y^2 + z^2) - 2b_1^2 y^2. \tag{35}$$

Исключая из уравнения (35) выражение $y^2 + z^2$ с помощью формулы (34) и переменную $z$ с помощью второго уравнения (33), приходим к уравнениям

$$2b_1 y(b_1^2 y^2 + a_* E) - a_*^2 \Gamma K = 0, \tag{36}$$

$$3b_1^2 y^2 - \Gamma^2 a_*^2 (b_1^2 y^2)^{-1} + 2a_* E = 0. \tag{37}$$

Исключая из уравнений (36), (37) переменную $y$, получаем искомое выражение для комбинации интегралов

$$-E^4 + 2\kappa E^3 + 2\Gamma^2 E^2 - 18\Gamma^2 \kappa E + 27\Gamma^2 \kappa^2 - \Gamma^4 = 0, \tag{38}$$

где $4\kappa = a_* K^2$. Явная запись его в исходных переменных, полученная с помощью компьютерной программы аналитических вычислений, показывает, что уравнение (38) не содержит $x$ в качестве множителя. $\square$

Прежде чем сформулировать заключительное утверждение, укажем, что для гироскопа Гесса, кроме решения Гесса, существует еще решение Докшевича [12] . Приведем его запись в специальных осях, следуя монографии[12]

$$\Gamma\nu_1 = \alpha_0 x^2 + \alpha_2, \qquad \Gamma\nu_2 = \beta_0 x^2 + \beta, \qquad \Gamma\nu_3 = \gamma_0 xz,$$

$$b_1 y = (p_0 - a)x + p_2/x, \tag{39}$$

$$(\alpha_0 x^2+\alpha_2)^2+(\beta_0 x^2+\beta)^2+\gamma_0^2 x^2 z^2=\Gamma^2.$$

Явные выражения для коэффициентов, входящих в формулы (39), можно найти в работе[12].

Приведенные рассуждения позволяют сделать заключение.

Утверждение. Уравнения Эйлера-Пуассона при условиях Гесса (22) имеют дополнительный интеграл вида $I=xV$, где $V$ есть решение уравнения $L_f V=b_1 zV$ . Частным случаем этого интеграла являются интегралы Эйлера и Лагранжа, а также решения Гесса и Докшевича.

С целью описания структуры интеграла Гесса рассмотрим интегралы системы (23), линеаризованной в окрестности кривой (33). Введем возмущения по формулам

$$x=x_1,\ \ y=y_0+x_2,\ \ z=z_0+x_3,\ \ \nu_1=\nu_{10}+x_4,\ \ \nu_2=\nu_{20}+x_5,\ \ \nu_3=\nu_{30}+x_6.$$

Величины $y_0,z_0$ удовлетворяют второму уравнению (33), а $\nu_{10},\nu_{20},\nu_{30}$ выражаются через $y_0,z_0$ по трем последним формулам (33).

Уравнения линейного приближения имеют вид [11]

$$\dot{x}_1=-b_1 z_0 x_1,$$

$$\dot{x}_2=(a-a_*)z_0 x_1+b_1 z_0 x_2+b_1 y_0 x_3-\Gamma x_6,$$
$$\dot{x}_3=(a_*-a)y_0 x_1-2b_1 y_0 x_2+\Gamma x_5,$$
$$\dot{x}_4=-\frac{b_1 y_0 z_0}{\Gamma}(b_1 x_1+a_* x_2)+\frac{a_* b_1 y_0^2}{\Gamma}x_3+a_* z_0 x_5-a_*-y_0 x_6,$$
$$\dot{x}_5=\frac{b_1 y_0 z_0}{\Gamma}(a x_1+b_1 x_2)-\frac{b_1^2 y_0^2}{\Gamma}x_3-a_* z_0 x_4+b_1 y_0 x_6,$$
$$\dot{x}_6=\frac{b_1 y_0^2}{\Gamma a_*}(b_1^2-aa_*)x_1+a_* y_0 x_4-b_1 y_0 x_5.$$

Собственным числам $\lambda_1=-b_1 z_0,\ \lambda_2=b_1 z_0$ характеристического уравнения этой системы соответствует интеграл

$$x_1[(a_*(a_*^2+b_1^2)(a_*-a)(z_0^2+y_0^2)+b_1^2 y_0^2(b_1^2-2a_*^2-3aa_*))x_1-$$
$$-2a_* b_1(a_*^2+b_1^2)(z_0^2+2y_0^2)x_2-2a_* b_1 y_0 z_0(a_*^2+b_1^2)x_3+$$
$$+6a_*^2+b_1 y_0\Gamma x_4+2a_* y_0(a_*^2-2b_1^2)\Gamma x_5+2a_* z_0(a_*^2+b_1^2)\Gamma x_6]=\mathrm{const}.$$

Этот интеграл и является первым членом разложения интеграла Гесса в окрестности кривой (33).

В заключение отметим, что решение Докшевича принадлежит интегральному многообразию с ненулевой константой интеграла Гесса, о чем свидетельствует наличие члена $x^{-1}$ в формулах (39).

**Заключение.** Основной целью данной работы было изучение связи между инвариантными и интегральными многообразиями динамических систем, а именно исследование возможности включения заданного инвариантного многообразия в некоторое семейство интегральных многообразий. Исследование этой задачи проводилось в локальной постановке и полученное решение определило особую роль особых инвариантных многообразий – многообразий особых точек динамической системы. Следующий отсюда важный вывод состоит в том, что вопросы существования инвариантных многообразий можно изучать, пользуясь уравнениями для интегралов, предварительно рассмотрев особое инвариантное многообразие. Это позволяет обойтись без множителей Леви-Чивита, которые в задачах существования инвариантных многообразий заранее неизвестны и затрудняют применение метода инвариантных многообразий в задачах управления, устойчивости и других задачах динамики.

Проведенное исследование с использованием уравнений Леви-Чивита позволило указать новые свойства инвариантных многообразий и их роль в построении интегралов. Связанный с этим новый взгляд на соотношение общих и частных решений дифференциальных уравнений дал возможность установить факт существования интеграла Гесса уравнений Эйлера-Пуассона и получить его локальное описание, основываясь на кривой Штауде для гироскопа Гесса и линеаризованных уравнениях. Попытки получения явной записи этого интеграла пока не удались, хотя автору неоднократно казалось, что он был близок к успеху.

В качестве развития полученных результатов можно указать задачу классификации интегралов, взяв за основу предложенное описание интегралов динамических систем в зависимости от вида уравнений Леви-Чивита. Давно привлекающую внимание специалистов задачу исследования окрестности частных решений можно рассматривать как задачу включения частного решения в интегральное семейство и анализ получаемого расслоения. Возможны и другие применения сформированного в работе подхода, особенно в динамике твердого тела, так богатой частными решениями.

В заключение отметим, что локальность выполненного исследования можно отнести к его недостаткам, однако она дала возможность избежать основного недостатка исследований по динамическим системам, связанного с априорным заданием свойств их решений. Соображения естественности, часто приводимые в качестве обоснования выбора представления решения, зачастую обманчивы. Не лишен этого недостатка и метод возмущений, поскольку нулевое приближение, описываемое простыми формулами, является следствием наличия различных соизмеримостей и, как правило, исключением из общей ситуации, что и определяет сложное поведение рядов теории возмущений. Локальность рассмотрения и факт существования в этой ситуации полного набора интегралов [13, с. 7] дают основание интерпретировать указание Пуанкаре, “что система дифференциальных уравнений может быть только более или менее интегрируемой” [13, с. 16], как наличие различных оттенков интегрируемости, но не неинтегрируемости, поскольку последнее понятие связано с большим числом различных оговорок и не нацелено на конечное решение задачи. Рассмотрение с этой позиции вопросов продолжения решений и глобальных свойств интегральных многообразий позволит включить полученные локальные результаты в общую картину глобального описания фазового пространства динамической системы.


1. *Levi-Civita T., Amaldi U.* Lezioni di Meccanica Razionale. – Bologna: Nicola Zanichelli, 1927. – **2**. – 671 p.
2. *Ковалев А.М.* Уравнения инвариантных и ориентированных многообразий динамических систем // Докл. НАНУ. – № 9. – 1998. – С. 21-25.
3. *Kovalev A., Savchenko A.* On the State and Development Perspectives of Rigid Body Dynamics // Multibody System Dynamics. – 2001. – **6** . – P. 73-98.
4. *Ковалевская С.В.* Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки. – В кн.: Ковалевская С.В. Научные работы. – М.: Изд-во АН СССР, 1948. – С. 153-220.
5. *Euler L.* Découverte d’un nouveau principe de mécanique // Histoire de l’Académie Royale des Science et

Belles Lettres. – Berlin, 1750, 1752. – **6** . – P.185-217.
6. *Лагранж Ж.* Аналитическая механика. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – **2**. – 440 с.
7. *Hess W.* Über die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikülare Lösung des Problems der Bewegung eines starren schweren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. – 1890. – **37**, H. **2**. – S. 153-181.
8. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. – 384 с.
9. *Ковалев А.М.* Подвижный годограф угловой скорости в решении Гесса задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1968. – **32**, вып. 6. – С. 1111-1118.
10. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1965. – 221 с.
11. *Ковалев А.М., Кириченко В.В.* Уравнения и интегралы движения гироскопа Гесса в окрестности равномерных вращений // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С.87-93.
12. *Докшевич А.И.* Решения в конечном виде уравнений Эйлера-Пуассона. – Киев, Наук. думка, 1992. – 168 с.
13. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи матем. наук. – **38**, вып.1. – 1983. – С. 3-67.

*Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк*
kovalev@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 19.10.2002