УДК 531.38, 531.36

©2011. **В.Е. Пузырев, Н.В. Топчий**

ОЦЕНКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Рассмотрена задача об оценке собственных значений и устойчивости линейной механической системы, находящейся под действием потенциальных, гироскопических, диссипативных и циркуляционных сил. Описаны возможные варианты, когда спектр системы лежит в левой полуплоскости – выполняется критерий Рауса–Гурвица, но затухание возмущенных движений происходит "слишком медленно". В качестве примера рассмотрена задача о равномерных вращениях тяжелого твердого тела под действием демпфирующего момента.

Ключевые слова: *структура сил, собственные значения, характеристические показатели Ляпунова, скорость затухания колебаний.*

Вопросы влияния структуры сил на динамику и устойчивость движения механических систем на протяжении последних десятилетий являлись объектом изучения для многих авторов. Наряду с результатами общего характера, посвященными обобщению и развитию классических теорем Томсона–Тэта–Четаева [1], из которых отметим работы [2–7], большое число исследований связано с поведением конкретных систем [8–15].

1. Постановка задачи. Рассмотрим линейный дифференциальный оператор

$$\boldsymbol{L} = \frac{d}{dt^2}\widetilde{\boldsymbol{A}} + \frac{d}{dt}\widetilde{\boldsymbol{B}} + \widetilde{\boldsymbol{C}},$$

где $\widetilde{\boldsymbol{A}}$, $\widetilde{\boldsymbol{B}}$, $\widetilde{\boldsymbol{C}}$ – вещественные квадратные матрицы второго порядка, $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ – положительно определенная. Разложим $\widetilde{\boldsymbol{B}}$, $\widetilde{\boldsymbol{C}}$ на симметрическую и кососимметрическую (с нулевой главной диагональю) составляющие: $\widetilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{B} \geq 0)$, $\widetilde{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C} + \boldsymbol{P}$ и запишем уравнение

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in R^2, \tag{1}$$

которое можно рассматривать как уравнения движения линеаризованной механической системы, находящейся под действием диссипативной, гироскопической, циркуляционной[1] и потенциальной сил (ДС, ГС, ЦС и ПС соответственно). Как известно [2, 16], всегда можно указать невырожденное преобразование $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Lambda}\widetilde{\boldsymbol{x}}$ такое, что $\boldsymbol{\Lambda}^\star \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{\Lambda}^\star \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(c_1, c_2)$. Верхний индекс "$\star$" означает транспонирование, $\boldsymbol{E}$ – единичная матрица. Структура матриц $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{P}$ не изменится, поэтому, не уменьшая общности, считаем, что

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{E},\ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{G} = g\boldsymbol{J},\ \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{P} = p\boldsymbol{J},\ \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[1] Другое распространенное название – неконсервативная позиционная сила. См. также [2, гл. 6].

Характеристический многочлен для системы (1) имеет вид

$$f = \lambda^4+(b_{11}+b_{22})\lambda^3+(c_1+c_2+g^2+b_{11}b_{22}-b_{12}^2)\lambda^2+(b_{11}c_2+c_1b_{22}+2gp)\lambda+c_1c_2+p^2. \tag{2}$$

2. Случай отсутствия циркуляционной силы. Остановимся вначале на случае $p = 0$. Перед тем, как делать оценки собственных значений (СЗ) – корней характеристического многочлена, проанализируем условия устойчивости нулевого решения системы (1). Для того, чтобы все СЗ имели отрицательные вещественные части, согласно критерию Рауса–Гурвица [2], необходима и достаточна положительность коэффициентов характеристического многочлена и выражения

$$\Delta_3^0 = (c_1 + c_2 + g^2 + b_{11}b_{22} - b_{12}^2)(b_{11} + b_{22})(b_{11}c_2 + c_1b_{22}) - (b_{11}c_2 + c_1b_{22})^2-$$

$$-c_1c_2(b_{11}+b_{22})^2 = b_{11}b_{22}(c_1-c_2)^2+(c_1b_{22}+c_2b_{11})(b_{11}+b_{22})(g^2+b_{11}b_{22}-b_{12}^2). \tag{3}$$

Если механическая система в отсутствие диссипативных и гироскопических сил устойчива ($c_1 > 0,\ c_2 > 0$), то легко видеть, что все коэффициенты многочлена (2) положительные ($b_{12}^2 \leq b_{11}b_{22}$). Очевидной является и неотрицательность определителя Δ_3^0 (сумма двух неотрицательных слагаемых в правой части (3)). Однако имеются следующие возможности для его обращения в нуль:

1) Если $b_{11} > 0,\ b_{22} > 0$, тогда $c_1 = c_2$. Первые две скобки в записи второго слагаемого в правой части (3) строго положительны, а третья равна нулю только при условиях $g = 0,\ b_{12}^2 = b_{11}b_{22}$. Т.е. ГС отсутствует, а диссипация энергии является частичной (функция Рэлея знакопостоянна). В этом случае система (1) является устойчивой неасимптотически, ее СЗ суть: $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{c_1}i$, $\lambda_{3,4} = -b \pm \sqrt{b^2-4c_1}$, где $2b = b_{11} + b_{22}$ – след матрицы $\boldsymbol{B}$.

2) При условии $c_1 \neq c_2$, имеем $b_{11}b_{22} = 0$. Если один из сомножителей не нулевой, то $b_{12} = 0$ – иначе нарушится предположение $\det \boldsymbol{B} \geq 0$. Тогда второе слагаемое в правой части (3) обратится в нуль только при условии $g = 0$. Система (1) распадается на два уравнения, одно из которых описывает колебания обычного осциллятора, а другое – осциллятора с вязким трением. Если же $b_{11} = 0,\ b_{22} = 0$, и, как следствие, $b_{12} = 0$, то характеристическое уравнение (2) – биквадратное, его дискриминант равен $D = (c_1 - c_2)^2 + 2g^2(c_1 + c_2) + g^4$ и строго положителен, значит СЗ чисто мнимые и различные, движение устойчиво неасимптотически. Последний вывод следует также из первой теоремы Томсона–Тета–Четаева [2].

Оба описанных случая возможны только при условии, что гироскопическая сила отсутствует, а диссипация является неполной. Другими словами, если ГС не равна нулю, или функция Рэлея положительно определенная, то любое движение системы (1) устойчиво асимптотически.

Если механическая система в отсутствие диссипативных и гироскопических сил неустойчива, и степень неустойчивости нечетная ($c_1c_2 < 0$), то свободный член характеристического многочлена отрицателен. Если же $c_1 < 0,\ c_2 < 0$ (четная степень неустойчивости потенциальной системы), то коэффициент при λ отрицателен. Как следствие, в обоих случаях хотя бы одно СЗ имеет положительную вещественную часть. Движение неустойчиво при любой гироскопической и диссипативной силах.

Перейдем к получению оценок для собственных значений. Пусть $0 < c_2 \le c_1 = \omega_0^2$ $(\omega_0 > 0)$, $b > 0$. Положим

$$b_{11} = 2b\delta_1, \quad b_{22} = 2b(1-\delta_1), \quad b_{12} = 2b\delta_2\sqrt{\delta_1(1-\delta_1)}, \quad 0 \le \delta_1 \le 1, \ -1 \le \delta_2 \le 1 \tag{4}$$

и введем безразмерные параметры и время по формулам

$$b = \omega_0\widetilde{b}, \quad g = \omega_0\widetilde{g}, \quad c_2 = \omega_0^2\widetilde{c}_2, \quad \lambda = \omega_0\widetilde{\lambda}, \quad t = \widetilde{t}/\omega_0. \tag{5}$$

Знак “тильда” ниже опускаем.

Обозначим $v = \max(b, g)$ и рассмотрим случай $v \gg 1$. Характеристическое уравнение $f(\lambda) = 0$ можно рассматривать как уравнение с большим параметром или (разделив обе части на v) как сингулярно возмущенное уравнение с малым параметром $\varepsilon = 1/v$. Чтобы избавиться от малого параметра при старшей степени, сделаем подстановку $\lambda = \sigma/\varepsilon$, $b = b_1/\varepsilon$, $g = g_1/\varepsilon$ (очевидно, что $\max(b_1, g_1) = 1$, $\varepsilon > 0$) и с помощью методов теории возмущений (см., например, [17]) найдем асимптотические разложения корней многочлена

$$f_1(\sigma,\varepsilon) = \sigma^4 + 2b_1\sigma^3 + [4b_1^2\delta_1(1-\delta_1)(1-\delta_2^2) + g_1^2 + \varepsilon^2(1+c_2)]\sigma^2 + \\ +2b_1\varepsilon^2[1-\delta_1(1-c_2)]\sigma + \varepsilon^4 c_2.$$

Соответствующий порождающий многочлен $f_1(\sigma, 0)$ имеет двукратный нулевой корень $(\sigma_0)_{1,2} = 0$. Определим порядок корней $\sigma_{1,2}(\varepsilon)$. С этой целью подставим $\sigma = \sigma_1\varepsilon^m$ $(m > 0)$ в многочлен $f_1(\sigma,\varepsilon)$ и выделим главную часть. Рассматривая последовательность степеней ε для каждого из слагаемых, выпишем их показатели: $4m$, $3m$, $2m$, $2(m+1)$, $m+2$, 4. Среди первых четырех показателей наименьшим является $2m$, и для определения m получаем условие $2m = \min(m+2, 4)$, т.е. $m = 2$.

Для второй пары корней порождающего уравнения находим

$$(\sigma_0)_{3,4} = -b_1 \pm \sqrt{D_1}, \ D_1 = b_1^2[1 - 4\delta_1(1-\delta_1)(1-\delta_2^2)] - g_1^2. \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что, вследствие условий (4), выражение в квадратных скобках неотрицательно. Оно равняется нулю только при условии $\delta_1 = 1/2$, $\delta_2 = 0$ и принимает наибольшее значение 1, если одно (и только одно) из значений δ_1, $1-\delta_1$, $1-\delta_2^2$ равно нулю, что соответствует неполной диссипации энергии. В первом из этих случаев корни $(x_0)_{3,4}$ сопряженные (и различные), поэтому корни многочлена f_1 можно искать в виде рядов относительно целых степеней ε. [2] Для всех остальных пар значений δ_1, δ_2 дискриминант D_1 может обратиться в нуль при соответствующем соотношении между коэффициентами b_1 и g_1, характеризующими величины (относительно времени $\widetilde{t}$) диссипативной и гироскопической силы соответственно. Тогда $(\sigma_0)_3 = (\sigma_0)_4 = -b_1$, и, как это было сделано выше, подставим $\sigma = -b_1 + \alpha\varepsilon^n$ в f_1 и выделим главную часть:

[2] Точнее ε^2, поскольку малый параметр представлен в f_1 только своими четными степенями.

$$\alpha^4\varepsilon^{4n} - 2b_1\alpha^3\varepsilon^{3n} + \alpha^2\varepsilon^{2+2n}(1+c_2) - 2b_1\alpha\varepsilon^{2+n}[\delta_1 + (1-\delta_1)c_2] +$$
$$+ b_1^2\alpha^2\varepsilon^{2n} + c_2\varepsilon^4 + b_1^2\varepsilon^2(1-c_2)(2\delta_1 - 1).$$

Если $\delta_1 \neq 1/2$, то наименьшими показателями будут $2n$ и 2, откуда выводим $n = 1$. Значение α будет при этом вещественным, если $\delta_1 \in [0, 1/2)$ и мнимым при $\delta_1 \in (1/2, 1]$. При $\delta_1 = 1/2$ наименьшими показателями будут $2+n$, $2n$ и 4, откуда имеем $n = 2$. Следовательно, для поиска корней $f_1(\sigma, \varepsilon)$ можно пользоваться разложениями в ряд по целым степеням ε, хотя, исключая частный случай $D_1 = 0$ $(\delta_1 \neq 1/2)$, эти разложения будут содержать только четные степени малого параметра. Коэффициенты разложений легко вычисляются с использованием любой системы аналитических вычислений (MAPLE, MATLAB, Mathematica). Так, с помощью пакета MAPLE 12 имеем

$$(\sigma_2)_{3,4} = -\frac{\sigma_0(1+c_2) + b_1(1-\delta_1+\delta_1 c_2)}{4\sigma_0^2 + 3b_1\sigma_0 + 2[b_1^2\delta_1(1-\delta_1)(1-\delta_2^2) + g_1^2]},$$

где соответствующее значение σ_0 берется из формулы (6). Таким образом, с учетом замены (5) в качестве искомых оценок для СЗ получаем

$$\lambda_{1,2} \approx -\frac{b[c_1(1-\delta_1) + c_2\delta_1] \pm R}{b^2\delta_1(1-\delta_1)(1-\delta_2^2) + g^2}, \quad \lambda_{3,4} \approx -(b \pm r\sqrt{D_1}) + r^{-1}(\sigma_2)_{3,4}\ ,$$
$$R = \sqrt{b^2c_1^2(1-\delta_1)^2 - 2c_1c_2[b^2\delta_1(1-\delta_1)(1-2\delta_2^2) + 2g^2] + b^2c_2^2\delta_1^2}. \qquad (7)$$

Как следует из формул (7), максимальный характеристический показатель для системы (1) (при $p = 0$) не превосходит выражения

$$-b[c_1(1-\delta_1) + c_2\delta_1]/[b^2\delta_1(1-\delta_1)(1-\delta_2^2) + g^2],$$

которое при $b \geq g$ имеет порядок b^{-1}, а в противном случае – порядок b/g^2. Это означает, что при заданных ПС системы добавление больших ДС и ГС хотя и гарантирует асимптотическую устойчивость, но обеспечивает слабую скорость стремления возмущенных движений к нулю, тем меньшую, чем больше $\max(b, g)$.

3. Учет влияния циркуляционной силы. Случай p $\gg 1$. Циркуляционные силы могут оказывать на движение системы как дестабилизирующее влияние [9, 10], так и стабилизирующее [2, 13]. Запишем выражение для $\Delta_3 = F(p, b, g)$:

$$F = -4p^2(b^2+g^2) + 4bgp[4b^2\delta_1(1-\delta_1)(1-\delta_2^2) + g^2 + (c_1-c_2)(2\delta_1-1)] + \Delta_3^0. \quad (8)$$

Если движение в отсутствие ЦС асимптотически устойчиво, то $F = \Delta_3^0 > 0$, и устойчивость, очевидно, сохранится при достаточно малых по модулю значениях p. В то же время из (8) следует, что $F < 0$ при достаточно больших по модулю значениях p, что гарантирует существование хотя бы одного положительного характеристического показателя, при этом движение неустойчиво. Эта ситуация представляется наиболее интересной с прикладной точки зрения, и мы рассмотрим ее подробнее.

Из (8) можно видеть, что скомпенсировать дестабилизирующее влияние ЦС можно либо большой величиной ГС, либо ДС (либо совместно ГС и ДС). Ограничимся здесь случаем $p > 0$, $g \gg 1$, а b, c_1, c_2 будем считать величинами порядка единицы.

А) Предположим вначале, что величина g не превосходит порядка $p^{1/2}$. Тогда можно положить $p = 1/\varepsilon^2$, $g = \gamma/\varepsilon$ ($\gamma > 0$). Характеристическое уравнение (2) имеет четыре различных комплексных корня порядка $1/\varepsilon$. В самом деле, аналогично п. 2 положим $\lambda = \widetilde{\lambda}/\varepsilon$ ("тильду" опускаем). Порождающее уравнение $f_0(\lambda) = \lambda^4 + \gamma^2\lambda^2 + 2\gamma\lambda + 1 = 0$ имеет корни

$$\lambda_{01} = -\frac{1}{r} + \frac{1}{2}i(\gamma - r),\ \lambda_{02} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2}i(\gamma + r),\ \lambda_{03} = \overline{\lambda}_{01},\ \lambda_{04} = \overline{\lambda}_{02},$$
$$r = \sqrt{\gamma^2 + \sqrt{\gamma^4 + 16}}. \tag{9}$$

Последующие коэффициенты λ_{sj} ($s = 1, 2, \cdots$) разложений $\lambda_j(\varepsilon)$ ($j = \overline{1,4}$) в ряды Тейлора находятся как решения линейных уравнений, коэффициенты которых являются целыми функциями от $\lambda_{0j}, \cdots, \lambda_{s-1j}$. В частности, $\lambda_{1j} = -b\ \lambda_{0j}^3/\rho$, где $\rho = 2\lambda_{0j}^3 + \gamma^2\ \lambda_{0j} + \gamma$. Отметим, что $\rho \neq 0$. В этом можно убедиться непосредственной подстановкой в $\rho(\lambda)$ выражений из (9), но значительно проще вычислить результант многочленов $f_0(\xi)$ и $\rho(\xi)$. Он равен $\gamma^4 + 16 > 0$, следовательно, ни один из корней $f_0(\xi)$ не может являться корнем $\rho(\xi)$. Таким образом, для корней уравнения (2) получаем

$$\lambda_j = \lambda_{0j}p^{1/2} + \lambda_{1j} + O(p^{-1/2}). \tag{10}$$

Из (9) и (10) видно, что при сделанных предположениях система (1) имеет два больших положительных характеристических показателя порядка

$$p^{1/2}/r = p\ (g^2 + \sqrt{g^4 + 16p^2})^{-1/2},$$

что гарантирует быстрый рост возмущенных решений (независимо от вида диссипативной и потенциальной сил).

Б) Пусть теперь преобладающей является ГС [3], т.е. $g \gg \max(b, p, c_1, c_2)$. Вводя обозначения

$$b = g\widetilde{b}\varepsilon, \qquad p = g^2\widetilde{p}\varepsilon, \qquad c_1 = g^2\widetilde{c}_1\varepsilon, \qquad c_2 = g^2\widetilde{c}_2\varepsilon, \qquad \lambda = g\widetilde{\lambda}, \tag{11}$$

получим многочлен

$$\widetilde{\lambda}^4 + 2\widetilde{b}\varepsilon\widetilde{\lambda}^3 + [1 + \varepsilon(\widetilde{c}_1 + \widetilde{c}_2) + 4\varepsilon^2\widetilde{b}^2\delta_1(1 - \delta_1)(1 - \delta_2^2)]\widetilde{\lambda}^2 +$$
$$+2\varepsilon[\widetilde{p} + \varepsilon\widetilde{b}(\widetilde{c}_1 - \widetilde{c}_1\delta_1 + \widetilde{c}_2\delta_1)]\widetilde{\lambda} + \varepsilon^2(\widetilde{p}^2 + \widetilde{c}_1\widetilde{c}_2),$$

[3] В случаях, когда преобладающей является ПС, ДС или две какие-либо силы, техника расчета такая же.

который имеет пару чисто мнимых корней $(\widetilde{\lambda}_0)_{1,2} = \pm i$ и двойной нулевой корень $(\widetilde{\lambda}_0)_{3,4} = 0$. Аналогично тому, как это делалось выше, подставляем $\widetilde{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_1\varepsilon + \lambda_2\varepsilon^2$ и находим выражения для λ_1, λ_2. Выполняя переход к первоначальным параметрам согласно (11), получаем для СЗ следующие приближения:

$$\lambda_{1,2} \approx \pm i[g + \frac{1}{2g}(c_1 + c_2)] - b + \frac{1}{g}p + \frac{1}{g^2}b[c_1(1-\delta_1) + c_2\delta_1],$$

$$\lambda_{3,4} \approx \frac{1}{g}\{-p \pm R_1 - \frac{1}{g}b[c_1(1-\delta_1) + c_2\delta_1] - \frac{1}{2g^2}(c_1 + c_2)(p \mp R_1)^2\},$$

где $R_1 = \sqrt{-c_1c_2}$.

4. Пример. Тяжелый гироскоп. Рассмотрим уравнения движения тяжелого твердого тела под действием демпфирующего момента $\boldsymbol{M} = -k(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0)$:

$$\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + P\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{M}, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu} = 0. \tag{12}$$

Выберем в качестве невозмущенного движения равномерные вращения тела вокруг главной оси, несущей центр масс

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 = (0, 0, \omega_0)^\star, \qquad \boldsymbol{\nu} = (0, 0, 1)^\star, \tag{13}$$

и запишем уравнения в вариациях:

$$\begin{pmatrix} \dot{\widetilde{\omega}}_1 \\ \dot{\widetilde{\omega}}_2 \\ \dot{\widetilde{\omega}}_3 \\ \dot{\widetilde{\nu}}_1 \\ \dot{\widetilde{\nu}}_2 \\ \dot{\widetilde{\nu}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k/J_1 & \omega_0(J_2 - J_3)/J_1 & 0 & 0 & P/J_1 & 0 \\ \omega_0(J_3 - J_1)/J_2 & -k/J_2 & 0 & -P/J_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k/J_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \omega_0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\omega}_1 \\ \widetilde{\omega}_2 \\ \widetilde{\omega}_3 \\ \widetilde{\nu}_1 \\ \widetilde{\nu}_2 \\ \widetilde{\nu}_3 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

значком “тильда” обозначены возмущения. Очевидно, без ограничения общности, можно считать $\omega_0 > 0$. Вводя безразмерные параметры и время по формулам

$$\alpha = J_2/J_1, \quad \beta = J_3/J_1, \quad \mu = P/(J_1\omega_0^2), \quad \varkappa = k/J_1\omega_0, \quad \tau = \omega_0 t \tag{15}$$

и, выражая из четвертого и пятого уравнений (14) переменные $\widetilde{\omega}_1$, $\widetilde{\omega}_2$, получаем

$$\widetilde{\nu}_2'' + \varkappa\widetilde{\nu}_2' + (\alpha - \beta + 1)\widetilde{\nu}_1' + (\beta - \beta - \mu)\widetilde{\nu}_2 + \varkappa\widetilde{\nu}_1 = 0,$$

$$\alpha\widetilde{\nu}_1'' + \varkappa\widetilde{\nu}_1' - (\alpha - \beta + 1)\widetilde{\nu}_2' + (\beta - 1 - \mu)\widetilde{\nu}_1 - \varkappa\widetilde{\nu}_2 = 0,$$

т.е. систему вида (1) при

$$\boldsymbol{x} = (\tilde{\nu}_2, \sqrt{\alpha}\tilde{\nu}_1)^*, \quad \boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(1,1), \quad \boldsymbol{B} = \mathrm{diag}(\varkappa, \frac{\varkappa}{\alpha}), \quad \boldsymbol{G} = g\boldsymbol{J},$$

$$\boldsymbol{C} = \mathrm{diag}(\beta-\alpha-\mu, (\beta-1-\mu)/\alpha), \quad \boldsymbol{P} = \varkappa\boldsymbol{J}, \qquad g = \frac{\alpha+1-\beta}{\sqrt{\alpha}}.$$

Характеристическое уравнение таково

$$\alpha\lambda^4 + \varkappa(\alpha+1)\lambda^3 + [\varkappa^2 + 2\alpha + \beta^2 - (\alpha+1)(\beta+\mu)]\lambda^2 +$$
$$+\varkappa(\alpha+1-2\mu)\lambda + (\beta-1-\mu)(\beta-\alpha-\mu) + \varkappa^2 = 0. \tag{16}$$

Запишем условия асимптотической устойчивости изучаемого движения (13) системы (12). Критерий Рауса–Гурвица для уравнения (16) дает следующие условия:

$$\varkappa^2 + 2\alpha + \beta^2 - (\alpha+1)(\beta+\mu) > 0, \quad (\alpha+1-2\mu) > 0; \tag{17}$$

$$(\beta-1-\mu)(\beta-\alpha-\mu) + \varkappa^2 > 0; \tag{18}$$

$$\Delta_3 = -\mu\varkappa^2[-\mu(\alpha-1)^2 + 2(\alpha+1)(\varkappa^2 + (\alpha+1-\beta)^2)] > 0. \tag{19}$$

Анализ неравенств (17)–(19) не представляется сложным с алгебраической точки зрения [4]. Вместе с тем он достаточно громоздкий из-за большого числа различных возможных случаев. Поэтому здесь мы ограничимся констатацией следующего факта.

В отсутствие демпфирующего момента ($k = 0$) [5], если свободный член характеристического уравнения отрицателен (неравенство (18) имеет противоположный знак), то решение (13) неустойчиво: имеется одно положительное (вещественное) СЗ. Покажем, что можно подобрать такое значение $\varkappa$, что все корни уравнения (16), будут иметь отрицательные вещественные части. Так, при $\alpha < \beta < 1$ (вращение вокруг средней оси) и $\beta - 1 < \mu < \beta - \alpha$ (при этом $\mu < 0$ – "висящий" гироскоп [19]) неравенства (17)–(19) выполнены в том и только в том случае, если

$$\varkappa^2 > \varkappa_0^2 = \max(\varkappa_1,\ \varkappa_2), \tag{20}$$

где $\varkappa_1 = \alpha(\beta+\mu-2) - \beta^2 + \beta + \mu$, $\varkappa_2 = (1-\beta+\mu)(\beta-\mu-\alpha)$. Например, при $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.7$, $\mu = -0.25$ имеем $\varkappa_1 = -0.815$, $\varkappa_2 = 0.0225$, $\varkappa_0 = 0.15$. В частности, при $\varkappa = 0.14$ условия (17)–(19) не выполнены и корни уравнения (16) суть $\lambda_{12} \approx -0.0398 \pm 1.2822i$, $\lambda_3 \approx -0.3505$, $\lambda_4 \approx 0.0101 > 0$. При $\varkappa = 0.16$ эти условия выполнены; корни характеристического уравнения (16) равны $\lambda_{12} \approx -0.0452 \pm 1.2807i$, $\lambda_3 \approx -0.3796$, $\lambda_4 \approx -0.0099$.

Найдем асимптотические оценки СЗ в случае быстрых вращений ($\omega_0 \gg 1$). Положим

$$\mu = \delta\varepsilon^2, \qquad (\delta = \mathrm{sgn}P), \qquad \varkappa = \kappa\varepsilon. \tag{21}$$

[4]Пример подобного анализа можно найти, например, в [18].

[5]Анализ необходимых условий устойчивости содержится в [19].

При $\varepsilon = 0$ характеристический многочлен имеет корни

$$(\lambda_0)_{1,2} = \pm i, \qquad (\lambda_0)_{3,4} = \pm\sqrt{(\beta-1)(\alpha-\beta)/\alpha}.$$

Заметим, что подкоренное выражение для второй пары корней не равно -1, поскольку иначе было бы $\alpha-\beta+1=0$ – нарушение неравенства треугольника для моментов инерции. Поэтому, независимо от того, положительно оно – вращение тела вокруг средней оси и $(\lambda_0)_{3,4}$ вещественны, или отрицательно (все корни чисто мнимые) – корни порождающего уравнения для (16) различны. Решения (16) ищутся согласно стандартной процедуре в виде степенных рядов относительно ε. Если же $(\beta-1)(\alpha-\beta)=0$, то порождающее уравнение имеет кратные корни, и эти два случая ($\alpha=\beta$, $\beta=1$) требуют отдельного рассмотрения.

Для первой пары корней уравнения (16) имеем

$$(\lambda)_{1,2} = (\frac{\delta\kappa}{\beta^2}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)) \pm i(1 - \frac{\delta}{\beta}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)),$$

или, с учетом обозначений (21),

$$(\lambda_\star)_{1,2} = \frac{1}{\beta^2}[\varkappa\mu \pm i\beta(\beta-\mu)]. \tag{22}$$

Звездочка означает приближенное значение СЗ.

Для второй пары корней получаем

$$\begin{gathered}(\lambda_\star)_{3,4} = \pm\frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha(\beta-1)(\alpha-\beta)} - \frac{\alpha+1}{2\alpha}\varkappa + \\ + \frac{1}{8\alpha\beta\sqrt{\alpha(\beta-1)(\alpha-\beta)}}[\beta\varkappa(\alpha-1)^2 + 4\alpha\mu(\alpha\beta+\beta-2\alpha)].\end{gathered} \tag{23}$$

Из формул (22), (23) можно видеть, в частности, что для висящего гироскопа ($\mu < 0$), в случае вращения вокруг большей или меньшей главной оси инерции, первое слагаемое в правой части (23) является чисто мнимым, поэтому наибольшему характеристическому показателю соответствует значение $\varkappa\mu/\beta^2$. С учетом (15) это означает, что изучаемое движение является асимптотически устойчивым, но скорость затухания имеет порядок ω_0^{-2}.

1. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 536 с.
2. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
3. *Пожарицкий Г.К.* Об асимптотической устойчивости равновесий и стационарных движений механических систем с частичной диссипацией // Прикл. математика и механика. – 1961. – **25**, № 4. – С. 657 – 667.
4. *Кошляков В.Н.* О структурних преобразованиях неконсервативных систем// Там же. – 2000. – **64**, вып. 6. – С. 933–941.
5. *Agafonov S.A.* Stability and motion stabilization of nonconservative mechanical systems// J. Math. Sci. Dynamical systems II. – 2002. – **112**, № 5. – P. 4419–4497.
6. *Пузырев В.Е.* Влияние сил вязкого трения на устойчивость стационарных движений механических систем при наличии частичной диссипации энергии // Докл. НАН Украины. – 2004. – N 8. – С. 61–65.
7. *Косов А.А.* Об экспоненциальной устойчивости и стабилизации неавтономных механических систем с неконсервативными силами // Прикл. математика и механика. – 2007. – **71**, вып. 3. – С. 411–426.

8. *Карапетян А.И., Лагутина И.С.* О влиянии диссипативного и постоянного моментов на вид и устойчивость стационарных движений волчка Лагранжа // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 5. – С. 29 – 33.
9. *Стороженко В.О.* До дослідження дії неконсервативних позиційних сил в системах з обертанням // Доп. НАНУ. Сер. Математ, природн., техн. науки. – 1998. – № 7. – С. 67–70.
10. *Лобас Л.Г., Лобас Л.Л.* Влияние ориентации следящей силы на устойчивость верхнего положения перевернутого двухзвенного маятника// Механика твердого тела. – 2001. – Вып. 31. – С. 83–89.
11. *Ишлинский А.Ю., Стороженко В.А., Темченко М.Е.* Исследование устойчивости сложных механических систем. – М.: Наука, 2002. – 300 с.
12. *Кириллов О.Н.* Об устойчивости неконсервативных систем с малой диссипацией // Современная математика и ее приложения. – 2005. – **36**. – С. 107–117.
13. *Агафонов С.А.* Об устойчивости и стабилизации движения неконсервативных механических систем // Прикл. математика и механика. – 2010. – **74**, вып. 4. – С.560–566.
14. *Байков А.Е., Красильников П.С.* Об эффекте Циглера в неконсервативной механической системе // Там же. – 2010. – **74**, вып. 1. – С. 74–88.
15. *Kirillov O.N., Verhulst F.* Paradoxes of dissipation-induced destabilization or who opened Whitney's umbrella? // Z. angew. Math. Mech. – 2010. – **90**, № 6. – P. 462–488.
16. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
17. *Найфе А.* Введение в методы возмущений. – М.: Мир, 1984. – 535 с.
18. *Пузырев В.Е.* Анализ условий устойчивости равномерных вращений тяжелого гироскопа на упруго закрепленном основании// Механика твердого тела. – 2005. – Вып. 35. – С. 124–127.
19. *Граммель Р.* Гироскоп, его теория и применения: В 2-х т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1952. – Т.1. – 351 с.

V.E. Puzyrev, N.V. Topchiy

The estimation of eigenvalues for linear mechanical 2-DOF system

The problem of eigenvalues estimation and stability for linear mechanical system is considered. The system is under influence of potential, gyroscopic, dissipative, and circulatory forces. Possible variants are described, when the spectrum of the system belongs to the left semi-plane – the conditions of Routh–Hurwitz criterion are fulfilled, but fading of perturbed motions is "too slowly". As an example, the problem about permanent rotations of rigid body under the action of damping torque is considered.

Keywords: *structure of the forces, eigenvalues, rate of the oscillations fading.*

В.Є. Пузирьов, Н.В. Топчій

Оцінка власних значень лінійної механічної системи з двома степенями вільності

Розглянуто задачу про оцінку власних значень і стійкості лінійної механічної системи, що перебуває під дією потенціальних, гіроскопічних, дисипативних і циркуляційних сил. Описано можливі варіанти, коли спектр системи лежить в лівій напівплощині – виконується критерій Рауса–Гурвіца, але згасання збурених рухів відбувається "надто повільно". Як приклад розглянуто задачу про рівномірні обертання важкого твердого тіла під дією демпфіруючого моменту.

Ключові слова: *структура сил, власні значення, швидкість згасання коливань.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
vpsr@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 14.03.11