

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

---

ВЫПУСК

32

# МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Межведомственный сборник научных трудов

Основан в 1969 г.

---

ДОНЕЦК 2002

УДК 629.78, 62-50

©2002. М.А. Велищанский, А.П. Крищенко, С.Б. Ткачев

## КВАЗИОПТИМАЛЬНАЯ ПЕРЕОРИЕНТАЦИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Для задачи пространственной переориентации космического аппарата (КА) из произвольного начального состояния в конечное состояние покоя находится программная траектория и реализующее ее управление. Осуществляется оптимизация программной траектории по заданному критерию. Решение основано на концепции обратной задачи динамики и описании движения в кватернионной форме. Предложен способ нахождения управления при наличии ограничений.

**Введение.** Задача переориентации космического аппарата (КА) подразумевает изменение его ориентации в инерциальной системе координат за заданное время из произвольного углового положения в требуемое конечное положение покоя.

Данная задача в различных постановках рассмотрена в целом ряде работ [1-6]. В большинстве из них – это задача оптимизационная. Рассматриваются вопросы получения управления, оптимального по быстродействию [1, 2] и расходу топлива [1, 3, 4]. Однако, в большинстве работ, посвященных решению данной задачи, решение ищется в виде плоского эйлера разворота или поворотов вокруг главных осей КА, что накладывает ограничения на класс программных траекторий.

В данной работе предлагается расширить множество программных траекторий и тем самым избежать упомянутых выше ограничений на класс программных траекторий. Предлагаемый алгоритм управления переориентацией КА основан на результатах работ [5, 7]. Он базируется на концепции обратной задачи динамики [6] и предполагает, во-первых, построение программной траектории, переводящей КА из заданного начального положения в заданное конечное положение покоя, и, во-вторых, синтез управления, стабилизирующего траекторию КА. Результаты, изложенные в [5], позволяют строить программные траектории КА, удовлетворяющие заданным начальным и конечным условиям на основе дважды дифференцируемых функций. Однако, основное внимание в [5] было уделено построению траектории на основе полиномов пятой степени специального вида, которые однозначно определяются по граничным условиям.

В данной работе множество таких полиномов расширяется до параметрических классов функций, на основе которых строится программная траектория. Это позволяет выбирать в таких классах траектории, оптимальные по некоторому критерию. Таким критерием может быть расход топлива, максимальный управляющий момент и т.д. Подобный подход позволяет использовать численные методы оптимизации программной траектории. Кроме того, данный подход позволяет учитывать ограничения, накладываемые на вектор управления и вектор угловой скорости КА.

**1. Постановка задачи.** Будем предполагать, что КА представляет собой твердое тело. Выберем жестко связанную с КА систему координат с началом в центре масс. Назовем ее связанной системой координат.

Движение твердого тела вокруг центра масс описывается следующей системой урав-

---

Работа выполнена при поддержке гранта № 02-01-00704 РФФИ и гранта № 00-15-96137 поддержки ведущих научных школ.

нений

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \omega, \quad I\dot{\omega} + \omega \times I\omega = \mathbf{u}, \quad (1)$$

где кватернион  $\Lambda(t) = (\lambda_0(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))^T$  удовлетворяет условию нормировки

$$|\Lambda(t)|^2 = \lambda_0^2(t) + \lambda_1^2(t) + \lambda_2^2(t) + \lambda_3^2(t) = 1 \quad (2)$$

и задает положение связанной системы координат относительно неподвижной системы координат,  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T \in \mathbf{R}^3$  – вектор угловой скорости в проекциях на оси связанной системы координат,  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T \in \mathbf{R}^3$  – управление,  $I$  – матрица моментов инерции КА,  $\circ$  – операция умножения кватернионов. Под управлением мы понимаем суммарный момент, действующий на корпус КА со стороны исполнительных органов. Будем предполагать, что компоненты вектора управления как функции времени непрерывны.

Рассмотрим задачу переориентации КА из произвольного заданного начального положения

$$\Lambda(0) = \Lambda_0, \quad \omega(0) = \omega_0 \quad (3)$$

в заданное конечное положение покоя

$$\Lambda(t_*) = \Lambda_*, \quad \omega(t_*) = \mathbf{0} \quad (4)$$

за интервал времени  $T = [0, t_*]$ .

Непрерывному управлению  $\mathbf{u} = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))^T$ ,  $t \in T$  и любому начальному состоянию системы (1), удовлетворяющему условию нормировки (2), соответствует кинематическая траектория  $\Lambda = (\lambda_0(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))$ ,  $t \in T$ . Эта траектория принадлежит классу  $C^2$  (то есть  $\lambda_i(t) \in C^2(T)$ ) и при всех  $t \in T$  удовлетворяет условию нормировки (2). В работе [5] показано, что отображение вход-выход системы (1) с выходом  $y = \Lambda$  из множества непрерывных управлений в множество функций класса  $C^2$ , удовлетворяющих условию нормировки (2), обратимо, а реализующее выход  $\Lambda(t)$  непрерывное управление имеет вид

$$\mathbf{u} = 2I(\Lambda^{-1}(t) \circ \ddot{\Lambda}(t) - \Lambda^{-1}(t) \circ \dot{\Lambda}(t) \circ \Lambda^{-1}(t) \circ \dot{\Lambda}(t)) + 4\Lambda^{-1}(t) \circ \dot{\Lambda}(t) \times I\Lambda^{-1}(t) \circ \dot{\Lambda}(t). \quad (5)$$

Таким образом, задача переориентации (3),(4) сводится к построению кинематической траектории  $\Lambda(t)$  класса  $C^2$ , удовлетворяющей граничным условиям

$$\begin{aligned} \Lambda(0) &= \Lambda_0, & \Lambda(t_*) &= \Lambda_*, \\ \dot{\Lambda}(0) &= 0.5\Lambda_0 \circ \omega_0, & \dot{\Lambda}(t_*) &= \mathbf{0}, \\ \ddot{\Lambda}(0) &= 0.5(\dot{\Lambda}_0 \circ \omega_0 + \Lambda_0 \circ I^{-1}(\mathbf{u}_0 - \omega_0 \times I\omega_0)), & \ddot{\Lambda}(t_*) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (6)$$

соответствующим условиям (3),(4) и значениям управления  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ ,  $\mathbf{u}(t_*) = \mathbf{0}$ .

В работе [5] показано, что построение кинематической траектории можно проводить следующим образом. Сначала необходимо найти такие функции  $\mu_i(t) \in C^2(T)$ ,  $i = \overline{0, 3}$ , что  $\Lambda = (\mu_0(t), \mu_1(t), \mu_2(t), \mu_3(t))$  удовлетворяет граничным условиям (6) и дополнительному условию

$\sqrt{\sum_{i=0}^3 \mu_i^2(t)} \neq 0$ ,  $t \in T$ . Если такие функции найдены, то им соответствует

кинематическая траектория КА  $\Lambda(t) = (\lambda_0(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))$ , где

$$\lambda_i(t) = \frac{\mu_i(t)}{\sqrt{\sum_{i=0}^3 \mu_i^2(t)}}, \quad i = \overline{0, 3}, \quad (7)$$

удовлетворяющая условиям (6) и реализуемая управлением (5).

В качестве  $\mu_i(t)$  в [5] предложены многочлены пятой степени

$$\mu_i(t) = \lambda_{i*} + c_{i1}(t - t_*)^3 + c_{i2}(t - t_*)^4 + c_{i3}(t - t_*)^5, \quad i = \overline{0, 3}, \quad (8)$$

коэффициенты  $c_{ik}$  ( $i = \overline{0, 3}$ ,  $k = \overline{1, 3}$ ) которых однозначно выражаются через граничные условия (6), определяя тем самым единственную кинематическую траекторию. Изменение этой траектории возможно только путем изменения общего времени маневра  $t_*$ .

Далее предполагается использовать различные параметрические расширения набора функций (8) до множеств функций из  $C^2$ , удовлетворяющих граничным условиям (6). Это позволяет расширить класс рассматриваемых движений и при выборе решения использовать оптимизационный подход.

**2. Полиномиальные расширения.** Рассмотрим расширение набора функций (8) до параметрического множества полиномиальных вектор-функций размерности 4.

Если к функциям  $\mu_i(t)$ ,  $i = \overline{0, 3}$ , заданным в виде (8), прибавить полиномы

$$\mu_i^{k_i}(t) = t^3(t - t_*)^3(c_{i4} + c_{i5}t + \dots + c_{ik_i}t^{k_i-4}), \quad i = \overline{0, 3}, \quad (9)$$

то получим полиномы  $\tilde{\mu}_i(t) = \mu_i(t) + \mu_i^{k_i}(t)$ , также удовлетворяющие граничным условиям (6), поскольку добавленные слагаемые вида (9) равны нулю при  $t = 0$  и  $t = t_*$  вместе со своими первыми двумя производными. Следовательно, можно использовать функции  $\tilde{\mu}_i(t)$  для задания кинематической траектории по соотношениям (7), а затем по формуле (5) найти реализующее ее управление.

Это управление зависит от коэффициентов  $c_{ij}$  полиномов (9), на которые не наложено каких-либо условий. Поэтому их значения можно найти как решение задачи оптимизации. В качестве критерия оптимизации примем

$$J = \int_0^T \left( \frac{|u_1(\tau)|}{l_1} + \frac{|u_2(\tau)|}{l_2} + \frac{|u_3(\tau)|}{l_3} \right) d\tau, \quad (10)$$

где  $l_1, l_2, l_3$  – нормирующие множители. Тогда для нахождения коэффициентов  $c_{ij}$  получаем задачу конечномерной оптимизации  $J(c_{ij}, i = \overline{0, 3}, j = \overline{4, k_i}) \rightarrow \min$ , которая может решаться различными численными методами.

**3. Сплайн-расширения.** Другой способ расширения набора функций заключается в добавлении к каждой функции  $\mu_i(t)$  ( $i = \overline{0, 3}$ ) из (8) слагаемого

$$\mu_i^s(t) = t(t - t_*)p_i(t), \quad i = \overline{0, 3}, \quad (11)$$

где  $p_i(t)$  – кубический сплайн дефекта 1, который вместе со своей первой производной  $p_i'(t)$  равен нулю на концах интервала времени  $T$ .

Известно [8], что кубический сплайн  $p_i(t)$  на частичном отрезке  $[t_{j-1}, t_j]$  некоторого заданного разбиения  $0 = t_0 < \dots < t_n = t_*$  интервала времени управления  $T$  можно представить следующим образом

$$p_i(t) = \alpha(v)p_{i,j-1} + \beta(v)p_{ij} + \gamma(v)p'_{i,j-1} + \delta(v)p'_{ij},$$

где

$$\begin{aligned} p_{ij} &= p_i(t_j), \quad p'_{ij} = p'_i(t_j), \quad \Delta_j = t_j - t_{j-1}, \quad v = (t - t_{j-1})/\Delta_j, \\ \alpha(v) &= (1 - v)^2(1 + 2v), \quad \beta(v) = v^2(3 - 2v), \\ \gamma(v) &= v(1 - v)^2\Delta_j, \quad \delta(v) = -v^2(1 - v)\Delta_j. \end{aligned}$$

Поскольку сплайн  $p_i(t)$  должен равняться нулю на концах интервала времени управления вместе со своими первыми производными, то  $p_{i0} = p_{in} = 0$  и  $p'_{i0} = p'_{in} = 0$ .

Значения  $p'_{ij}$  производной сплайна во внутренних узлах находятся из условий непрерывности второй производной сплайна в этих узлах, которые имеют вид

$$a_j p'_{i,j-1} + 2p'_{ij} + (1 - a_j)p'_{i,j+1} = e_j, \quad j = \overline{1, n-1},$$

где

$$a_j = \frac{\Delta_{j+1}}{\Delta_j + \Delta_{j+1}}, \quad e_i = 3 \left( a_j \frac{p_{ij} - p_{i,j-1}}{\Delta_j} + (1 - a_j) \frac{p_{i,j+1} - p_{ij}}{\Delta_{j+1}} \right).$$

Используя данные условия, а также тот факт, что  $p'_{i0} = p'_{in} = 0$ , получаем следующую систему уравнений для определения значений  $p'_{ij}$ :

$$\begin{cases} p'_{i0} = 0, \\ a_j p'_{i,j-1} + 2p'_{ij} + (1 - a_j)p'_{i,j+1} = e_j, \quad j = \overline{1, n-1}, \\ p'_{in} = 0. \end{cases}$$

Данная система линейных алгебраических уравнений всегда имеет единственное решение [8].

При любых значениях  $p_{ij}$ ,  $j = \overline{1, n-1}$ ,  $i = \overline{0, 3}$  выполнены равенства

$$\begin{aligned} l\dot{\mu}_i^s(t) &= (2t - 1)p_i(t) + t(t - t_*)p'_i(t), \\ \ddot{\mu}_i^s(t) &= 2p_i(t) + 2(2t - 1)p'_i(t) + t(t - t_*)p''_i(t). \end{aligned}$$

Следовательно, функции  $\mu_i^s(t)$ ,  $i = \overline{0, 3}$ , вместе со своими первой и второй производными равны нулю на концах интервала  $T$ . Поэтому функции  $\mu_i(t) + \mu_i^s(t)$ ,  $i = \overline{0, 3}$ , удовлетворяют граничным условиям (6) и по соотношениям (7) задают кинематическую траекторию, которая реализуется управлением (5). Выбрать значения  $p_{ij}$ ,  $j = \overline{1, n-1}$ ,  $i = \overline{0, 3}$ , можно решив задачу конечномерной оптимизации

$$J(p_{ij}, i = \overline{0, 3}, j = \overline{1, n-1}) \rightarrow \min,$$

соответствующую критерию (10).

Отметим, что количество внутренних узлов в сплайнах может выбираться достаточно большим и ограничено лишь техническими трудностями решения задачи конечномерной оптимизации.

**4. Стабилизация программной траектории.** Управление (5), построенное в п.п. 2, 3 является программным. Из-за ошибок его реализации, а также в силу различных возмущающих факторов, КА будет двигаться по некоторой траектории  $\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , отличной

от программной траектории  $\Lambda(t)$ . Получим управление, стабилизирующее программную траекторию.

Из-за условия нормировки (2) из четырех ошибок  $e_i = \lambda_i - \lambda_i(t)$ ,  $i = \overline{0, 3}$ , реализации программной кинематической траектории  $\Lambda(t)$  лишь три являются независимыми.

Покажем, что в области  $\lambda_0 > 0$  стабилизирующее управление в виде нестационарной обратной связи можно найти из условия экспоненциального убывания ошибок  $e_1, e_2, e_3$ . Для этого потребуем, чтобы эти ошибки удовлетворяли системе уравнений

$$\ddot{\lambda}_i - \ddot{\lambda}_i(t) + k_{1i}(\dot{\lambda}_i - \dot{\lambda}_i(t)) + k_{0i}(\lambda_i - \lambda_i(t)) = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (12)$$

где постоянные  $k_{ij}$  положительны.

Запишем управление (5) для текущего состояния

$$\mathbf{u} = 2I(\Lambda^{-1} \circ \ddot{\Lambda} - \Lambda^{-1} \circ \dot{\Lambda} \circ \Lambda^{-1} \circ \dot{\Lambda}) + 4\Lambda^{-1} \circ \dot{\Lambda} \times I\Lambda^{-1} \circ \dot{\Lambda}. \quad (13)$$

Исключим из (13) сначала  $\lambda_0, \dot{\lambda}_0, \ddot{\lambda}_0$  с помощью  $\lambda_0 = \sqrt{1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2}$  (условия нормировки) и дифференциальных следствий из него, а затем из полученного выражения для управления исключим  $\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2, \dot{\lambda}_3$ , воспользовавшись системой (12).

Полученное управление стабилизирует программную траекторию системы (1) [7] и имеет вид  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2, \dot{\lambda}_3, t)$ . Если производные  $\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2, \dot{\lambda}_3$  записать как функции  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \omega$  (с помощью кинематических уравнений и условия нормировки), то стабилизирующее управление будет представлено в виде функции  $\mathbf{u}_{\text{ст}} = \mathbf{u}_{\text{ст}}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \omega, t)$ . Отметим, что в области  $\lambda_0 < 0$  надо использовать равенство  $\lambda_0 = -\sqrt{1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2}$ . Также аналогичные управления можно построить и в областях  $\lambda_i > 0$  ( $\lambda_i < 0$ ),  $i \neq 0$ .

Для получения расчетных формул для найденного стабилизирующего управления запишем кинематические уравнения из системы (1) в координатной форме

$$\begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= -\lambda_1\omega_1 - \lambda_2\omega_2 - \lambda_3\omega_3, \\ 2\dot{\lambda}_1 &= \lambda_0\omega_1 - \lambda_3\omega_2 + \lambda_2\omega_3, \\ 2\dot{\lambda}_2 &= \lambda_3\omega_1 + \lambda_0\omega_2 - \lambda_1\omega_3, \\ 2\dot{\lambda}_3 &= -\lambda_2\omega_1 + \lambda_1\omega_2 + \lambda_0\omega_3. \end{aligned} \quad (14)$$

Используя обозначения

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda} &= (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \\ M(\omega) &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \\ M_0(\omega) &= \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_3 & \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_0(\Lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

из (1) и (14) получим

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda} &= M(\omega)\Lambda, \quad \dot{\bar{\Lambda}} = M_0(\omega)\Lambda, \quad \dot{\Lambda} = N_0(\Lambda)\omega, \\ 2\ddot{\Lambda} &= M_0(\omega)\dot{\Lambda} + N_0(\Lambda)\dot{\omega}, \end{aligned}$$

или, с учетом динамических уравнений,

$$2\ddot{\Lambda} = M_0(\omega)M(\omega)\Lambda + N_0(\Lambda)(I^{-1}\mathbf{u} - I^{-1}\omega \times I\omega). \quad (15)$$

Поскольку  $\det N_0(\Lambda) = \lambda_0^3 + \lambda_0(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \neq 0$  при  $\lambda_0 \neq 0$ , то из (15) можно найти управление

$$\mathbf{u} = IN_0^{-1}(\Lambda)(2\ddot{\Lambda} - M_0(\omega)M(\omega)\Lambda) + \omega \times I\omega. \quad (16)$$

Далее, записав (12) в виде  $\ddot{\Lambda} = F(\bar{\Lambda}, \dot{\Lambda}, t)$ , где

$$F(\bar{\Lambda}, \dot{\Lambda}, t) = \begin{pmatrix} \ddot{\lambda}_1(t) - k_{11}(\dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_1(t)) - k_{01}(\lambda_1 - \lambda_1(t)) \\ \ddot{\lambda}_2(t) - k_{12}(\dot{\lambda}_2 - \dot{\lambda}_2(t)) - k_{02}(\lambda_2 - \lambda_2(t)) \\ \ddot{\lambda}_3(t) - k_{13}(\dot{\lambda}_3 - \dot{\lambda}_3(t)) - k_{03}(\lambda_3 - \lambda_3(t)) \end{pmatrix},$$

из (16) получим

$$\mathbf{u} = IN_0^{-1}(\Lambda)(2F(\bar{\Lambda}, \dot{\Lambda}, t) - M_0(\omega)M(\omega)\Lambda) + \omega \times I\omega. \quad (17)$$

Если в правой части выражения (17) положить  $\lambda_0 = \sqrt{1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2}$ , то оно совпадет с функцией  $\mathbf{u}_{\text{ст}}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \omega, t)$ .

**5. Учет ограничений.** Система управления, как правило, характеризуется наличием ограничений, что связано с ограниченностью ресурсов управления. Будем предполагать, что на управления наложены ограничения

$$|u_i| \leq u_{i\text{max}}, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (18)$$

Программное управление, реализующее получаемую из решения задачи конечномерной оптимизации кинематическую траекторию, не всегда удовлетворяет ограничениям (18). Это влечет нарушение ограничений (18) и для стабилизирующего управления, построенного в п. 4. Одним из возможных подходов к решению данной проблемы является использование управления с насыщением, состоящее в замене обратной связи  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{ст}} = \mathbf{u}_{\text{ст}}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \omega, t) = (u_{1\text{ст}}, u_{2\text{ст}}, u_{3\text{ст}})^T$  на обратную связь  $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \omega, t) = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)^T$ , где

$$\tilde{u}_i = \begin{cases} u_{i\text{ст}}, & |u_{i\text{ст}}| \leq u_{i\text{max}}, \\ \text{sign}(u_{i\text{ст}}) u_{i\text{max}}, & |u_{i\text{ст}}| > u_{i\text{max}}. \end{cases}$$

Если программное управление удовлетворяет ограничению (18) при строгих неравенствах, то при достаточно малых положительных постоянных  $k_{ij}$  стабилизирующее управление  $\mathbf{u}_{\text{ст}}$  тоже удовлетворяет тем же неравенствам. В таких случаях на интервале времени управления  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_{\text{ст}}$ . В остальных случаях управления  $\tilde{\mathbf{u}}$  и  $\mathbf{u}_{\text{ст}}$  не совпадают. Использование управления  $\tilde{\mathbf{u}}$  с насыщением расширяет множество программных траекторий, стабилизируемых управлением, удовлетворяющим ограничениям [9].

Другой подход к учету ограничений на управление заключается в использовании методов конечномерной оптимизации при наличии ограничений, что дает возможность учитывать ограничения (18) уже на этапе построения программной траектории. Аналогично можно учесть ограничения на угловые скорости КА  $\omega_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$ , которые также являются типичными для задачи переориентации.

**6. Пример.** Приведем результаты решения задачи переориентации КА из начального положения покоя в конечное положение покоя при следующих исходных данных:

- начальное состояние  $\Lambda_0 = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)$ ,  $\omega_0 = (0, 0, 0)$ ,  $u_0 = (0, 0, 0)$ ,  $t_0 = 0$ ;
- конечное состояние  $\Lambda_* = (1, 0, 0, 0)$ ,  $\omega_* = (0, 0, 0)$ ,  $u_* = (0, 0, 0)$ ,  $t_* = 30$ ;
- матрица моментов инерции КА  $\text{diag}(62382, 68658, 11965)$ ;
- нормирующие множители в критерии (10)  $l_1 = 1$ ,  $l_2 = 1$ ,  $l_3 = 1$ .

На приведенных ниже графиках независимой переменной является безразмерное время  $\tau = t/t_*$ ,  $\tau \in [0, 1]$ .

Было проведено математическое моделирование решения рассматриваемой задачи в классе программных управлений по методике, изложенной в [5]: кинематическая программная траектория  $\Lambda$  строилась с помощью только многочленов пятой степени (8). Значение критерия  $J$  (10) при реализующем эту траекторию программном управлении равно 25618.

Движение КА моделировалось с помощью системы (1). В этом и последующих примерах при интегрировании системы (1) использовался метод Рунге-Кутты четвертого порядка с постоянным шагом 0.01. Полученные численные решения с точностью до ошибок численного интегрирования совпали с решениями, построенными по аналитическим выражениям для программной кинематической траектории и программных угловых скоростей.

На рис. 1. *a*, *б* приведены полученные по результатам моделирования управления, стабилизирующие программные траектории, построенные с помощью полиномиального расширения (рис. 1. *a*) и сплайн-расширения (рис. 1. *б*). В алгоритме стабилизации (здесь и далее) использовались значения параметров  $k_{1i} = 3$ ,  $k_{0i} = 2$  из системы (12). При полиномиальном расширении использовались многочлены (9) шестой степени, что привело к конечномерной задаче оптимизации с четырьмя параметрами. Для решения этой задачи (здесь и далее) использовался метод деформируемого симплекса [10]. Значение критерия  $J$  (10) равно 13872.

При сплайн-расширении использовались равномерные разбиения с тремя внутренними узлами ( $n = 5$ ), что привело к задаче конечномерной оптимизации с 12 параметрами. В этом варианте решения задачи переориентации КА  $J = 13016$ .

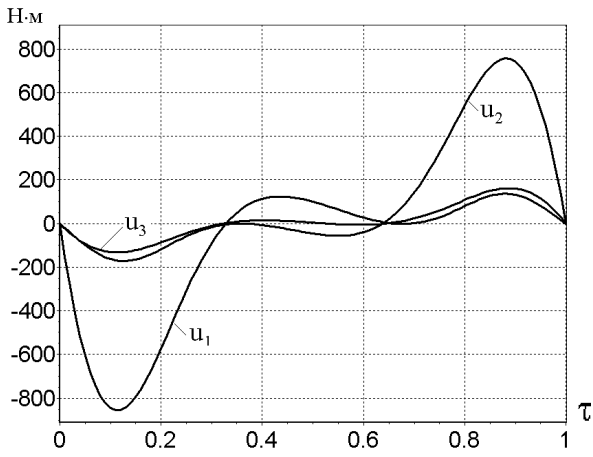
Рассмотрим задачу с ограничениями на управления и примем  $u_{i \max} = 700$ . Согласно рис. 1. *a*, *б* значения стабилизирующих управлений по абсолютной величине превышают значение  $u_{i \max}$ . Поэтому было проведено моделирование стабилизирующих управлений с учетом ограничения  $|u_i| \leq u_{i \max} = 700$ ,  $i = \overline{1, 3}$  с помощью управлений с насыщением в каждом из двух рассмотренных вариантов: для полиномиального расширения (рис. 1. *в*,  $J = 14167$ ) и сплайн расширения (рис. 1. *г*,  $J = 14716$ ).

Методом математического моделирования исследовалось также влияние ошибок в значениях элементов матрицы инерции КА на точность решения задачи переориентации. Численные эксперименты показали, что если алгоритм стабилизирует программную траекторию, построенную с помощью полиномиального или сплайн-расширения с использованием управления с насыщением при точно известной матрице инерции, то этот же алгоритм решает задачу переориентации и при ошибках в элементах матрицы инерции. Моделировались ошибки в элементах матрицы инерции до 10%. На рис. 2 приведены результаты моделирования в случае алгоритма управления с насыщением, стабилизирующего программную траекторию, построенную с помощью полиномиального расширения. В качестве матрицы инерции КА при моделировании использовалась матрица  $\text{diag}(68000, 64000, 12300)$ .

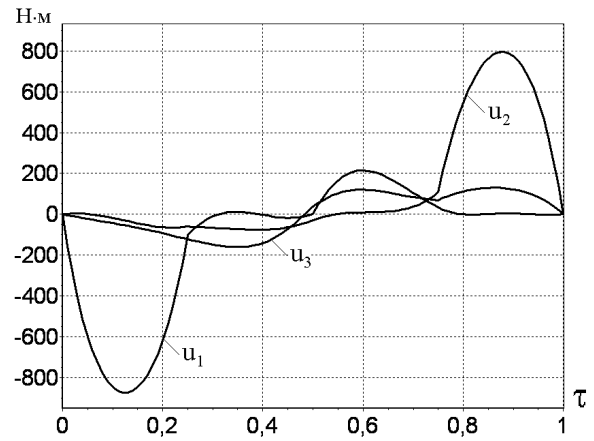
Следует отметить, что основные затраты машинного времени при моделировании приходятся на решение конечномерной задачи оптимизации и определяются ее размерностью.



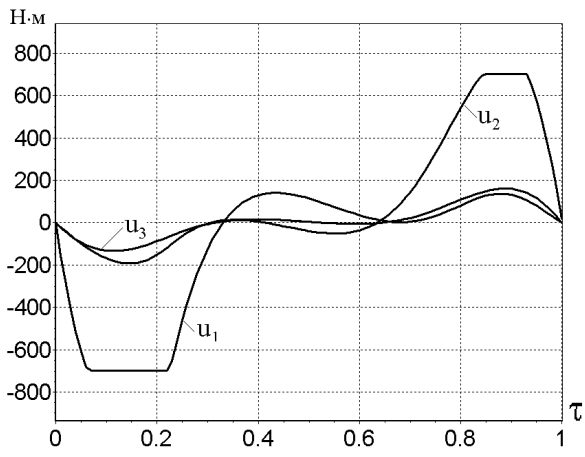
Квазиоптимальная переориентация космического аппарата



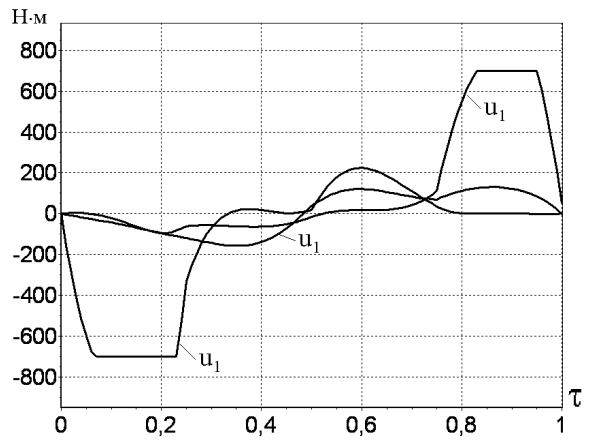
а) Полиномиальные расширения;



б) Сплайн-расширения;

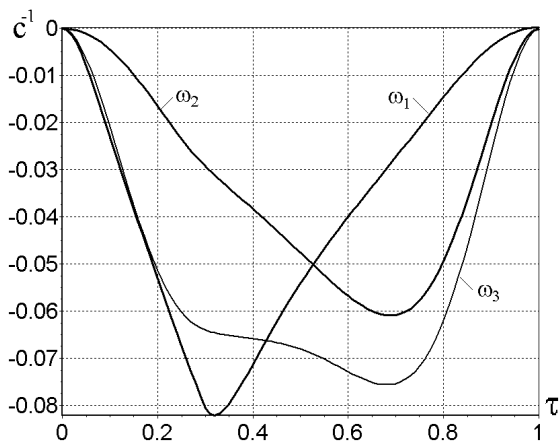


в) Полиномиальные расширения;

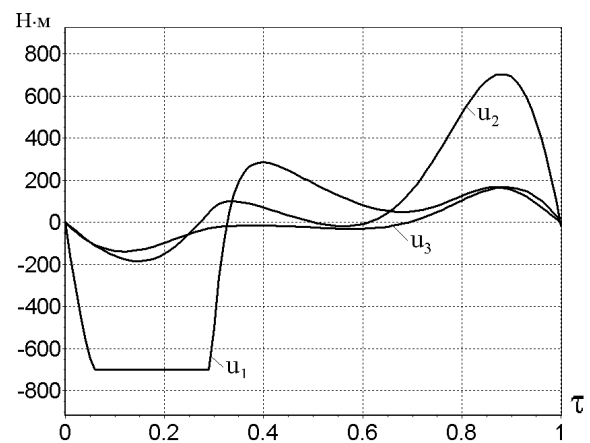


г) Сплайн-расширения;

Рис. 1.



а) Угловые скорости  $\omega$ ;



б) Управление  $u$ ;

Рис. 2.

Анализ приведенных результатов показывает, что при использовании оптимизации программной траектории управление принимает "импульсный" характер: на начальном этапе ( $\approx 1/3$  интервала управления) КА сообщают необходимую угловую скорость, затем ( $\approx 1/3$  интервала управления) КА движется как свободное тело (управления близки нулю) и затем происходит торможение КА. Увеличение числа интервалов  $n$  при использовании сплайн-расширения при построении кинематической траектории не изменяет характера управления. С ростом числа  $n$  лишь уменьшается время разгона и торможения и, как следствие, увеличивается максимально потребный момент управления.

При наличии ограничений на управление отмечается лишь незначительное (до 5%) увеличение значения критерия при уменьшении максимального значения необходимого момента управления (до 20%) по сравнению со значениями, полученными при отсутствии ограничений на управления. Необходимо отметить, что в случае наличия ограничений на управления или наличия возмущений в матрице инерции КА возможно наличие небольшой ошибки по угловому ускорению, а в случае значительного (более 25%) ограничения по максимальному значению момента управления возможно наличие ошибки и по угловой скорости на конце интервала управления, что вызвано отсутствием достаточного запаса времени для ее ликвидации. При наличии подобных ошибок по окончании интервала управления необходимо продолжить работу алгоритма стабилизации, который переходит в режим стабилизации заданного углового положения. В случае наличия ограничений на управление появление подобных ошибок можно избежать, если решать задачу условной оптимизации при построении программной траектории. В этом случае алгоритм стабилизации будет компенсировать лишь неучтенные в модели внешние и внутренние возмущающие факторы.

Как показали вычислительные эксперименты, наибольшее уменьшение оптимизируемого значения критерия при использовании полиномиального расширения происходит при  $k_i = 4$ , а при использовании сплайн-расширения – с тремя внутренними узлами ( $n = 5$ ). Дальнейший рост значений  $k_i$  и  $n$  не приводит к существенному изменению критерия.

**Заключение.** Рассмотрена задача пространственной переориентации КА за заданный интервал времени. В отличие от классической постановки, в данной работе не накладываются традиционных ограничений на класс движений. Предложенный подход позволяет рассмотреть приближения произвольного пространственного разворота. Сравнение полиномиального расширения и сплайн-расширения при построении программной кинематической траектории не выявило принципиальных преимуществ одного из этих методов при близких количествах оптимизируемых параметров. Однако, для достижения схожих результатов, при использовании метода сплайн-расширения, требуется большее количество оптимизируемых параметров, что ведет к увеличению времени решения оптимизационной задачи. В то же время установлено, что целесообразно учитывать ограничения на управления на этапе построения программного решения путем учета соответствующих ограничений на параметры конечномерной задачи оптимизации.

1. Алексеев К.Б. Экстенсивное управление ориентацией космических летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1977. – 120 с.
2. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М.: Наука, 1973. – 320 с.
3. Левский М.В. Оптимальное управление пространственным разворотом космического аппарата // Космические исследования. – 1995. – 33, № 5. – С. 498–502.
4. Левский М.В. Задача оптимального управления терминальной переориентацией КА. // Там же. – 1993. – 31, № 4. – С. 12–17.

5. *Ермошина О.В., Крищенко А.П.* Синтез программных управлений ориентацией космического аппарата методом обратных задач динамики // Изв. АН. Теория и системы управления. – 2000. – № 2. – С. 155 - 162.
6. *Крутько П.Д.* Обратные задачи динамики управляемых систем: нелинейные модели. – М.: Наука, 1988. – 328 с.
7. *Кавинов А.В., Крищенко А.П.* Стабилизация аффинных систем // Дифференциальные уравнения. – 2000. – **36**, № 11. – С. 1628 - 1633.
8. *Канатников А.Н., Крищенко А.П., Четвериков В.Н.* Дифференциальное исчисление функций многих переменных. – М.: Изд-ие МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 455 с.
9. *Krishchenko A.P.* Estimation of stabilization domains for program motions of affine systems // NOLOS'01 Preprints. – 2001. – Vol.4. – P. 1003 - 1005.
10. *Лесин В.В., Лисовец Ю.П.* Основы методов оптимизации. – М.: Изд-ие МАИ, 1998. – 341 с.

Московский гос. техн. ун-т им. Н.Э. Баумана, Россия  
arpmath@bmstu.ru

Получено 31.10.2002