

УДК 531.38

©2007. П.Е. Рябов

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ И БИФУРКАЦИОННЫЕ ДИАГРАММЫ ДВУХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ЗАДАЧ

В статье приводится построение бифуркационных диаграмм двух интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем на основе выделения действительной части алгебраических поверхностей, ассоциированных с этими системами. Первая система отвечает новому случаю интегрируемости уравнений Кирхгофа, обнаруженному В.В. Соколовым. Вторая описывает движение гиростата Ковалевской в двойном силовом поле.

1. Введение. Система уравнений Кирхгофа в безразмерных переменных

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= -s_2(s_3 + \lambda), & \dot{r}_1 &= r_3s_2 - 2r_2s_3 - \lambda r_2 + a(r_2^2 + r_3^2), \\ \dot{s}_2 &= s_1(s_3 + \lambda) - br_3 + a(r_1s_2 - r_2s_1), & \dot{r}_2 &= -s_1r_3 + 2r_1s_3 + \lambda r_1 - ar_1r_2, \\ \dot{s}_3 &= br_2 + a(r_1s_3 - s_1r_3), & \dot{r}_3 &= s_1r_2 - s_2r_1 - ar_1r_3 \end{aligned} \quad (1)$$

содержит произвольные постоянные a, b, λ , имеющие определенный физический и механический смысл [1] (см. также [2]). Систему (1) можно записать в гамильтоновом виде на \mathbb{R}^6 следующим образом:

$$\dot{\mu}_i = \{\mu_i, H\}. \quad (2)$$

Здесь $\boldsymbol{\mu} = (\mathbf{s}, \mathbf{r}) \in \mathbb{R}^6$, а гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + 2s_3^2) + \lambda s_3 + br_1 + a(r_3s_2 - r_2s_3)$$

представляет собой энергию системы “тело–жидкость”. Векторы \mathbf{s}, \mathbf{r} называются соответственно импульсивным моментом и импульсивной силой. Параметр гиростатического момента λ можно связать с циркуляцией жидкости через отверстия в теле [3]. Скобка Пуассона в (2) на пространстве \mathbb{R}^6 для координатных функций определяется так:

$$\{s_i, s_j\} = \varepsilon_{ijk}s_k, \quad \{s_i, r_j\} = \varepsilon_{ijk}r_k, \quad \{r_i, r_j\} = 0. \quad (3)$$

Два геометрических первых интеграла системы (1)

$$F_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2, \quad F_2 = s_1r_1 + s_2r_2 + s_3r_3$$

являются функциями Казимира относительно структуры (3).

Векторное поле (1), ограниченное на четырехмерное многообразие

$$M^4 = \{(\mathbf{s}, \mathbf{r}) \in \mathbb{R}^6 : F_1 = c^2, F_2 = g\} \cong T^*\mathbb{S}^2,$$

порождает гамильтонову систему с двумя степенями свободы. Таким образом, для интегрируемости по Лиувиллю, кроме функций Казимира F_1 , F_2 и гамильтониана H , необходимо наличие одного дополнительного интеграла. Легко показать, что функция

$$F = \left[\frac{s_1^2}{2} - \frac{s_2^2}{2} - br_1 + a(r_2s_3 - r_3s_2) - \frac{a^2c^2}{2} \right]^2 + [s_1s_2 - br_2 + a(s_1r_3 - r_1s_3)]^2 - \lambda(s_3 + \lambda)(s_1^2 + s_2^2) + \lambda[2bs_1r_3 + 2as_1(r_2s_1 - s_2r_1) + a^2c^2s_3]$$

коммутирует на M^4 с гамильтонианом H относительно скобки Пуассона (3). Отметим, что интеграл F не является новым, поскольку функционально связан на M^4 с интегралом, обнаруженным В.В. Соколовым в 2001 году [4]. С точностью до переобозначений переменных эта связь с выражением I_4 (см. [4–6]) выглядит следующим образом:

$$F = \frac{1}{4}(2H + a^2c^2)^2 - a^2F_2^2 + b^2c^2 - I_4. \quad (4)$$

При $\lambda = 0$ в работе [7] найдено разделение переменных. Не ограничивая общности, полагаем в дальнейшем, что $a = 1$, $c = 1$.

Рассмотрим другую систему, связанную с гиростатом Ковалевской в двойном поле сил, которая также является гамильтоновой, но уже с тремя степенями свободы. Соответствующая система дифференциальных уравнений в безразмерных переменных имеет вид

$$\begin{aligned} 2\dot{\omega}_1 &= \omega_2(\omega_3 - \lambda) + \beta_3, & \dot{\alpha}_1 &= \alpha_2\omega_3 - \alpha_3\omega_2, & \dot{\beta}_1 &= \beta_2\omega_3 - \omega_2\beta_3, \\ 2\dot{\omega}_2 &= -\omega_1(\omega_3 - \lambda) - \alpha_3, & \dot{\alpha}_2 &= \omega_1\alpha_3 - \omega_3\alpha_1, & \dot{\beta}_2 &= \omega_1\beta_3 - \omega_3\beta_1, \\ \dot{\omega}_3 &= \alpha_2 - \beta_1, & \dot{\alpha}_3 &= \alpha_1\omega_2 - \alpha_2\omega_1, & \dot{\beta}_3 &= \beta_1\omega_2 - \beta_2\omega_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Система (5) представляется в гамильтоновом виде (2) на пространстве $\mathbb{R}^9(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(2\omega_1^2 + 2\omega_2^2 + \omega_3^2) - \alpha_1 - \beta_2.$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ – вектор мгновенной угловой скорости, векторы $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ характеризуют направление и интенсивность действия силовых полей. Как показано в [8], векторы $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ без ограничения общности можно считать взаимно ортогональными. Обозначения силовых полей, порядок и направление осей выбраны так, чтобы выполнялось неравенство

$$|\boldsymbol{\alpha}| \geq |\boldsymbol{\beta}|. \quad (6)$$

Скобки Пуассона на \mathbb{R}^9 получаются из введенных в работе [9]

$$\begin{aligned} \{M_i, M_j\} &= \varepsilon_{ijk}M_k, & \{M_i, \alpha_j\} &= \varepsilon_{ijk}\alpha_k, & \{M_i, \beta_j\} &= \varepsilon_{ijk}\beta_k, \\ \{\alpha_i, \alpha_j\} &= 0, & \{\alpha_i, \beta_j\} &= 0, & \{\beta_i, \beta_j\} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

если положить $M_1 = 2\omega_1$, $M_2 = 2\omega_2$, $M_3 = \omega_3 + \lambda$. Геометрические интегралы системы (5)

$$F_1 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2, \quad F_2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2, \quad F_3 = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$$

являются функциями Казимира для таких скобок. Векторное поле (5), ограниченное на шестимерное многообразии

$$M^6 = \{(\omega, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^9 : F_1 = a^2, F_2 = b^2, F_3 = 0\} \cong TSO(3),$$

порождает гамильтонову систему с тремя степенями свободы. Отметим, что поскольку система определена на касательном расслоении, то скобки Пуассона на \mathbb{R}^9 содержат параметр λ , а гамильтониан – нет.

Система (5) на M^6 в действительности имеет лишь один существенный параметр, который выражает отношение числовых характеристик силовых полей

$$m = \frac{b}{a}$$

и, согласно (6), лежит в пределах $0 \leq m \leq 1$. Кроме того, в силу произвола в выборе единицы измерения длин α, β , можно полагать $a = 1$. При $m = 0$ система описывает движение гиростата в поле силы тяжести при условиях С.В. Ковалевской на распределение масс, а при $m = 1$ – случай Х.М. Яхьи [10] (см. также [11]). Эти предельные значения обладают группой симметрий и сводятся к семейству интегрируемых систем с двумя степенями свободы. Далее предполагается, что $0 < m < 1$.

Для интегрируемости по Лиувиллю, кроме функций Казимира F_1, F_2, F_3 и гамильтониана H , необходимо наличие двух дополнительных интегралов. Функции

$$\begin{aligned} K &= (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \alpha_1 - \beta_2)^2 + (2\omega_1\omega_2 + \alpha_2 + \beta_1)^2 + \\ &\quad + 2\lambda[(\omega_1^2 + \omega_2^2)(\omega_3 - \lambda) + 2\omega_1\alpha_3 + 2\omega_2\beta_3], \\ G &= \left[\omega_1\alpha_1 + \omega_2\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3(\omega_3 + \lambda) \right]^2 + \left[\omega_1\beta_1 + \omega_2\beta_2 + \frac{1}{2}\beta_3(\omega_3 + \lambda) \right]^2 + \\ &\quad + (\omega_3 - \lambda) \left[(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\omega_1 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\omega_2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(\omega_3 + \lambda) \right] - \alpha_1 m^2 - \beta_2 \end{aligned}$$

вместе с H образуют на $M^6 = \{(\omega, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^9 : F_1 = 1, F_2 = m^2, F_3 = 0\}$ полный инволютивный набор интегралов относительно скобки Пуассона (7). Функции K и G указаны в [11].

Напомним некоторые определения [12]. Пусть M^{2n} – симплектическое многообразие с интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системой $v =$

= sgrad H , и f_1, \dots, f_n – ее независимые (почти всюду) интегралы, находящиеся в инволюции. Определим гладкое отображение

$$\mathcal{F} : M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

полагая $\mathcal{F}(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Отображение \mathcal{F} называется *отображением момента*. Точка x из M^{2n} называется *критической (или особой) точкой отображения момента \mathcal{F}* , если ранг $d\mathcal{F}(x)$ меньше n . Ее образ в \mathbb{R}^n называется *критическим значением*. Пусть \mathcal{K} – совокупность всех критических точек отображения момента. Образ \mathcal{K} при отображении момента, т.е. множество $\Sigma = \mathcal{F}(\mathcal{K}) \subset \mathbb{R}^n$, называется *бифуркационной диаграммой*. В данной статье приводятся бифуркационные множества обеих задач и их *атласы* в пространстве параметров. Атлас (разделяющее множество) позволяет классифицировать все бифуркационные диаграммы.

2. Бифуркационное множество интегрируемого случая Соколова. В интегрируемом случае Соколова отображение момента \mathcal{F} сопоставляет точке на многообразии M^4 пару значений функций F и H в этой точке: $x \mapsto (f = F(x), h = H(x))$. В свою очередь H и F являются коэффициентами алгебраической кривой \mathcal{C} , ассоциированной с системой (1). Алгебраическая кривая \mathcal{C} указана в работе [6] и с учетом (4) задается в виде

$$\mathcal{C} : a_2 w^4 + a_1 w^2 + a_0 = 0,$$

где

$$a_0 = z^6 - 2hz^4 + \left[\frac{1}{4}(2h+1)^2 - g^2 - f + b^2 \right] z^2 - b^2 g^2,$$

$$a_1 = -2z^4 + (2h + \lambda^2 - 1)z^2 + g^2 - b^2, \quad a_2 = z^2 + 1.$$

Кривую \mathcal{C} можно рассматривать как нулевой уровень отображения $\mathcal{C} : \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. Особым точкам кривой \mathcal{C} , или точкам, в которых она теряет гладкость, отвечает алгебраическая поверхность $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$ в пространстве констант интегралов $\mathbb{R}^3(f, h, g)$. Составляющие части этой поверхности можно представить в параметрическом виде

$$\Delta_i : \begin{cases} f = f_i(g, t), \\ h = h_i(g, t), \end{cases} \quad i = 1, 2, 3,$$

где

$$f_1 = \left(\frac{b^2 g^2}{2t^2} + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{(t+b^2)(t-g^2)}{t}, \quad h_1 = \frac{b^2 g^2}{2t^2} + t,$$

$$f_{2,3} = \frac{1}{4} (g^2 + b^2 + \lambda^2)^2 - \lambda^2 (1 + g^2) + 2\lambda^2 (t+1) \mp$$

$$\mp \frac{1}{2t} \lambda^2 (t+1) \sqrt{(b^2 + g^2)^2 + 4t^2 \lambda^2} + \frac{1}{4t^2} (b^2 + g^2)^2 (1 - t^2),$$

$$h_{2,3} = \frac{1}{2} (g^2 - b^2 - \lambda^2 - 1) \pm \frac{1}{2t} (t+1) \sqrt{(b^2 + g^2)^2 + 4\lambda^2 t^2}.$$

Объединение $\Delta_2 \cup \Delta_3$ определяет в $\mathbb{R}^3(f, h, g)$ дискриминантную поверхность с ребром самопересечения. Параметрические уравнения этого ребра имеют вид

$$f_0 = \frac{1}{4}(g^2 + b^2 + \lambda^2)^2 - \lambda^2(1 + g^2), \quad h_0 = \frac{1}{2}(g^2 - b^2 - \lambda^2 - 1). \quad (8)$$

Выделим действительную часть алгебраической поверхности Δ , что и даст бифуркационное множество Σ .

Множеством особенностей отображения момента \mathcal{F} является множество точек M^4 , в которых функции F и H зависимы: $\mathcal{K} = \{x \in M^4 : \text{rank } d\mathcal{F}(x) < 2\}$. Замкнутое множество \mathcal{K} всех критических точек можно стратифицировать рангом отображения момента, т.е. представить его в виде объединения $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_1$, где $\mathcal{K}_0 = \{x \in M^4 | \text{rank } d\mathcal{F} = 0\}$, $\mathcal{K}_1 = \{x \in M^4 | \text{rank } d\mathcal{F} = 1\}$.

Можно показать, что точки $(\mathbf{s}, \mathbf{r}) \in M^4$, такие, что

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= (-gb, \pm\sqrt{(1+g^2)(1-b^2)-\lambda^2}, -\lambda), \\ \mathbf{r} &= \left(-b, \frac{-\lambda \pm g\sqrt{(1+g^2)(1-b^2)-\lambda^2}}{1+g^2}, \frac{-g\lambda \mp \sqrt{(1+g^2)(1-b^2)-\lambda^2}}{1+g^2}\right), \end{aligned}$$

являются неподвижными для системы (1), т.е. содержатся в \mathcal{K}_0 . Значения первых интегралов в них совпадают с (8). Следовательно, при определенных значениях параметров точка $H = (f_0, h_0)$ является узловой для бифуркационной диаграммы. Заметим, что при этих значениях алгебраическая кривая приводима. Остальные особенности отображения момента \mathcal{F} удобно определять из условия

$$\text{rank}(H \times F \times F_2 \times F_1) < 4,$$

проверяя обращение в нуль миноров четвертого порядка. В частности, критическими являются точки в M^4 , лежащие в сечении $s_2 = 0$ и удовлетворяющие одной из систем

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-b\lambda s_1 s_3 - b s_1 s_3^2 + gb^2 + g s_1^2}{s_1(b^2 + s_1^2 + s_3^2)}, \\ r_2 &= \frac{\lambda s_1^3 + s_1^3 s_3 + s_1 s_3^2 \lambda + s_1 s_3^3 - s_3 gb}{s_1(b^2 + s_1^2 + s_3^2)}, \quad r_3 = \frac{s_3 g + \lambda b s_1 + s_1 b s_3}{b^2 + s_1^2 + s_3^2} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \lambda^2 r_2 + \lambda(2s_3 r_2 - r_2^2 - 1) + r_2(1 - 2s_3 r_2 + 2b r_1 - s_1^2) &= 0, \\ b r_2 + r_1 s_3 - s_1 r_3 &= 0 \end{aligned}$$

(все миноры четвертого порядка матрицы Якоби отображения момента обращаются в нуль). В первом случае значения первых интегралов принадлежат

поверхности Δ_1 при $t = bg/s_1$. Этим определяется действительная часть алгебраической поверхности Δ_1 . Во втором случае значения первых интегралов могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{4} (g^2 + b^2 + \lambda^2)^2 - \lambda^2(1 + g^2) + \frac{1}{4r_2^2(1 - r_2^2)} u_1 \cdot v_1, \\ h &= \frac{1}{2} (g^2 - b^2 - \lambda^2 - 1) + \frac{1 + r_2^2}{2r_2(1 - r_2^2)} u_1, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} u_1 &= r_2(b^2 + g^2) + \lambda(1 - r_2^2), \\ v_1 &= \lambda(r_2^4 + 6r_2^2 + 1) - r_2(1 - r_2^2)(b^2 + g^2) - 2\lambda^2 r_2(1 + r_2^2). \end{aligned}$$

Значения (9) удовлетворяют уравнениям поверхности $\Delta_2 \cup \Delta_3$, выделяя на ней вещественную часть. Переменная t в этом случае выражается по формуле

$$t = \frac{(b^2 + g^2)r_2}{\lambda(1 - r_2^2)}.$$

Таким образом, бифуркационное множество Σ в случае общего положения ($\lambda b g \neq 0$) состоит из двух поверхностей γ_1 и γ_2 , параметрические уравнения которых имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \gamma_1 : \begin{cases} f = \frac{1}{4} (t^2 + 1)^2 + \frac{(b - tg)(g + tb)}{t}, \\ h = \frac{1}{2} t^2 + \frac{gb}{t}, \end{cases} & t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \gamma_2 : \begin{cases} f = \frac{1}{4} (g^2 + b^2 + \lambda^2)^2 - \lambda^2(1 + g^2) + \frac{1}{4s^2(1 - s^2)} uv, \\ h = \frac{1}{2} (g^2 - b^2 - \lambda^2 - 1) + \frac{1 + s^2}{2s(1 - s^2)} u, \end{cases} & s \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} u &= s(b^2 + g^2) + \lambda(1 - s^2), \\ v &= \lambda(s^4 + 6s^2 + 1) - s(1 - s^2)(b^2 + g^2) - 2\lambda^2 s(1 + s^2). \end{aligned}$$

Выкладки существенно упрощаются при обращении в нуль одного из параметров λ, b , а также при нулевой постоянной площадей g . Покажем на примере, как связано критическое множество с алгебраической кривой. Пусть $b = 0, \lambda \neq 0$. Уравнение

$$\begin{aligned} & r_2^2 s_2^2 s_3 + 2\lambda s_3^3 r_2 + 3\lambda^2 r_2 s_3^2 - 2s_3^2 r_3^2 r_2 + 2s_3 r_3^3 s_2 - r_3^2 \lambda s_3^2 + \lambda^3 r_2 s_3 - \lambda r_2^3 s_3 + \\ & + \lambda s_2^3 r_3 - s_2^2 r_2 s_3^2 + s_2 \lambda r_3^3 + s_2^3 s_3 r_3 + s_2 s_3 r_3 - s_2 \lambda^3 r_3 + r_2^2 \lambda s_2^2 - 3s_2 s_3 \lambda^2 r_3 + \\ & + s_3 - r_2 s_3^2 - \lambda s_2^2 r_2 s_3 + 2r_2^2 s_3^3 - 2r_2^3 s_3^2 - \lambda^2 s_3 + 2s_2^2 \lambda r_3^2 + 3s_3 r_3^2 s_2^2 - 2s_2 \lambda s_3^2 r_3 - \\ & - 2r_3 r_2 \lambda s_2 s_3 + 2r_2^2 s_3 r_3 s_2 - 4s_2 r_3 r_2 s_3^2 + s_2 \lambda r_2^2 r_3 - \lambda r_2 s_3 r_3^2 = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

определяет критическое множество при $s_1 = r_1 = 0$. Введем подстановку

$$r_2 = \frac{s_2 y - s_3 x}{s_2^2 + s_3^2}, \quad r_3 = \frac{s_2 x + s_3 y}{s_2^2 + s_3^2}.$$

С учетом того, что $x^2 + y^2 = s_2^2 + s_3^2$, из уравнения (11) получим

$$\lambda x^3 + s_3 x^3 + 2\lambda x^2 + 3s_3 x^2 + \lambda y^2 x - 3\lambda x s_3^2 - s_3^3 x - \lambda^3 x + s_3 y^2 x - \\ - 3s_3 \lambda^2 x + \lambda x + 3s_3 x + s_3 + \lambda y^2 - 2\lambda s_3^2 - s_3 \lambda^2 - s_3^3 + s_3 y^2 = 0.$$

Наконец, полагая $q = x + 1$, $p = s_3 + \lambda$, получаем алгебраическую кривую

$$\Gamma : \lambda(p^2 - q^2) - pq(p^2 - q^2 - g^2) = 0. \quad (12)$$

Таким образом, уравнение (11) равносильно (12). Кривая Γ допускает параметризацию в виде уравнений

$$p = \sqrt{\frac{\lambda s^2 - g^2 s - \lambda}{s(s^2 - 1)}}, \quad q = \sqrt{\frac{(\lambda s^2 - g^2 s - \lambda)s}{s^2 - 1}}.$$

Соответствующие бифуркационные кривые совпадают с γ_2 , если положить $b = 0$ в уравнении (10).

Для построения $\Sigma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ необходимо найти условия, при которых действительные куски поверхностей γ_1 и γ_2 имеют общие точки: точки касания, точки возврата, точки пересечения. Совокупность всех таких поверхностей в $\mathbb{R}^3(g, b, \lambda)$ даст разделяющее множество (атлас) для классификации всех бифуркационных диаграмм.

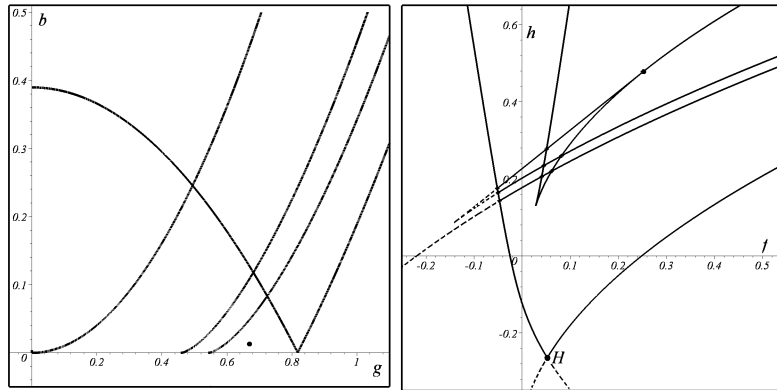


Рис. 1. Фрагмент разделяющего множества в сечении $\lambda = 0,06$ и бифуркационная диаграмма для $g = 0,69$; $b = 0,02$.

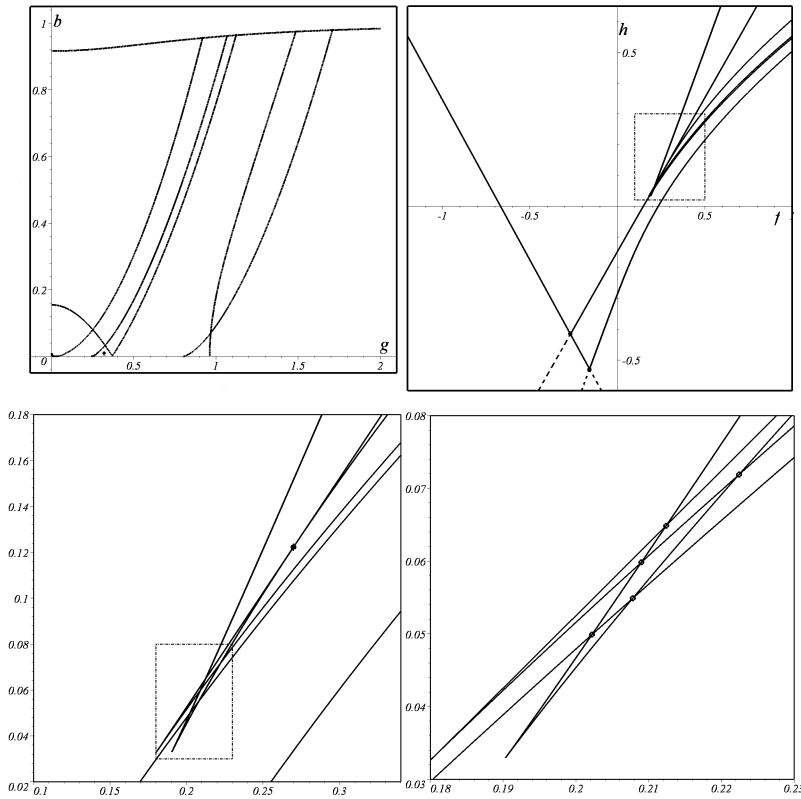


Рис. 2. Разделяющее множество в сечении $\lambda = 0,4$ и бифуркационная диаграмма для $g = 0,32; b = 0,01$.

Наиболее сложным является построение дискриминанта многочлена 14-ой степени $P(s)$, который отвечает за бифуркации точек пересечения алгебраических поверхностей γ_1 и γ_2 . Кроме того, как оказалось, многочлен $P(s)$ отвечает и за изменения топологического типа изоэнергетического многообразия $Q^3 = \{x \in M^4 : H(x) = h\}$. На этом этапе был использован пакет аналитических вычислений Maple. В результате исключения переменной s из системы $P(s) = 0, P'(s) = 0$ получено выражение вида $WV^3 = 0$, что позволяет численно построить вместе с другими разделяющими поверхностями атлас в сечениях $\lambda = \text{const}$. На рис. 1 и рис. 2 приведены примеры разделяющего множества. Для выбранного сечения $\lambda = \lambda_0$ разделяющие кривые делят плоскость параметров (g, b) на области. Внутри каждой области бифуркационная диаграмма устойчива по отношению к изменениям параметров. Для построения бифуркационной диаграммы достаточно взять по одной пробной точке (g_0, b_0) в каждой из этих областей.

3. Разделяющее множество и бифуркационные диаграммы гиростата Ковалевской в двойном поле сил. Для интегрируемого случая гиростата Ковалевской в двойном поле сил соответствующее отображение

момента \mathcal{F} сопоставляет точке на M^6 тройку значений функций H , F и G в этой точке: $x \mapsto (f = F(x), h = H(x), g = G(x))$. Как и в случае Соколова, функции H , F и G являются коэффициентами алгебраической кривой \mathcal{C} , ассоциированной с системой (5). Алгебраическая кривая \mathcal{C} имеет вид [11]

$$\mathcal{C} : w^4 - 2d_1(z^2)w^2 + d_2(z^2) = 0, \quad (13)$$

где
$$d_1 = \frac{p^2}{z^2} - 2(2h + \lambda^2) + 8z^2,$$

$$d_2 = \frac{r^4}{z^4} - \frac{4[p^2(2h + \lambda^2) - 4g]}{z^2} + 16(k + 2h\lambda^2) - 64\lambda^2 z^2.$$

Здесь введены обозначения $p^2 = a^2 + b^2$, $r^2 = a^2 - b^2$.

Особые точки кривой \mathcal{C} лежат на алгебраической поверхности $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ в пространстве констант интегралов $\mathbb{R}^3(g, k, h)$. Эту поверхность после замены $s = 2z^2$ можно представить в параметрическом виде

$$\begin{aligned} \Delta_1 : \begin{cases} k = \frac{r^4}{4s^2} - 2\lambda^2 h + 4\lambda^2 s, \\ g = -\frac{r^4}{4s} + \frac{p^2}{2}(h + \frac{\lambda^2}{2}) - \lambda^2 s^2, \end{cases} \\ \Delta_2 : \begin{cases} k = -\frac{p^4 - r^4}{4s^2} + p^2 + (h - \frac{\lambda^2}{2})^2 - 4(h - \frac{\lambda^2}{2})s + 3s^2, \\ g = \frac{p^4 - r^4}{4s} + (h - \frac{\lambda^2}{2})s^2 - s^3, \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

или

$$\begin{aligned} \Delta'_1 : \begin{cases} k = \frac{r^4}{4s^2} - \frac{\lambda^2 r^4}{p^2 s} + \lambda^4 - \frac{4\lambda^2 g}{p^2} + 4\lambda^2 s - \frac{4\lambda^4}{p^2} s^2, \\ h = \frac{r^4}{2p^2 s} - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{2g}{p^2} + \frac{2\lambda^2}{p^2} s^2, \end{cases} \\ \Delta'_2 : \begin{cases} k = \frac{(p^4 - r^4)^2}{16s^6} - \frac{(p^4 - r^4)g}{2s^5} + \frac{g^2}{s^4} + \frac{p^4 - r^4}{4s^2} - \frac{2g}{s} + p^2, \\ h = -\frac{p^4 - r^4}{4s^3} + \frac{g}{s^2} + \frac{\lambda^2}{2} + s. \end{cases} \end{aligned}$$

Первое представление удобно тем, что оно нумеруется значениями h , а соответствующие многообразия $Q_h^5 = \{x \in M^6 : H = h\}$ компактны. Кроме того, легко проследить аналогии с волчком Ковалевской в двойном поле [8, 13]. Второе представление удобно для сравнения со случаем Ковалевской–Яхьи–Комарова и классическим волчком Ковалевской. Интересно отметить, что при сдвиге $h \rightarrow \tilde{h} + \lambda^2/2$, уравнения поверхности Δ'_2 совпадают с уравнениями бифуркационной поверхности Γ_3 работы [8] (см. также [14], где такой сдвиг принят изначально).

Множество \mathcal{K} всех критических точек отображения момента \mathcal{F} можно представить в виде объединения

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2,$$

где $\mathcal{K}_n = \{x \in M^6 \mid \text{rank } d\mathcal{F} = n\}$, $n = 0, 1, 2$. Множество \mathcal{K}_0 исчерпывается четырьмя неподвижными точками системы (5)

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad \beta_1 = \beta_3 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \quad \alpha_1 = \pm a, \quad \beta_2 = \pm b.$$

Соответствующие значения первых интегралов при фиксированных постоянных a, b образуют нульмерный остов бифуркационной диаграммы. Как несложно проверить, в этих четырех точках алгебраическая кривая \mathcal{C} является приводимой, т.е. левая часть ее уравнения раскладывается в произведение двух многочленов. Координаты соответствующих точек в $\mathbb{R}^3(g, k, h)$ следующие

$$\begin{aligned} H_1 : \quad g_1 &= -\frac{ab(\lambda^2 + 2a + 2b)}{2}, \quad k_1 = (a - b)^2, \quad h_1 = -a - b; \\ H_2 : \quad g_2 &= \frac{ab(\lambda^2 + 2a - 2b)}{2}, \quad k_2 = (a + b)^2, \quad h_2 = -a + b; \\ H_3 : \quad g_3 &= -\frac{ab(2a - 2b - \lambda^2)}{2}, \quad k_3 = (a + b)^2, \quad h_3 = a - b; \\ H_4 : \quad g_4 &:= \frac{ab(2a + 2b - \lambda^2)}{2}, \quad k_4 = (a - b)^2, \quad h_4 = a + b. \end{aligned} \quad (15)$$

Напомним, что $a = 1$, $b = m$, $0 < m < 1$. В пространстве существенных параметров $\mathbb{R}^3(h, m, \lambda)$ образы H_k порождают четыре полосы: $h = -1 - m$, $h = -1 + m$, $h = 1 - m$ и $h = 1 + m$ ($0 < m < 1$), которые являются разделяющими, поскольку при переходе через них меняется топологический тип изоэнергетического многообразия Q_h^5 [15]. Точки H_1 и H_4 принадлежат прямой δ_1 , заданной параметрически системой

$$\begin{cases} k = p^2 - 2m, \\ g = \frac{m(2h - \lambda^2)}{2}, \end{cases} \quad h \in \mathbb{R}, \quad (16)$$

а точки H_2 и H_4 – прямой δ_2 :

$$\begin{cases} k = p^2 + 2m, \\ g = -\frac{m(2h - \lambda^2)}{2}, \end{cases} \quad h \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

На этих прямых алгебраическая кривая \mathcal{C} также приводима. Условия приводимости в виде соотношений (16), (17) можно получить, выделяя полный квадрат в дискриминанте уравнения (13). Прообразами этих прямых соответствуют маятниковые движения с определенными ограничениями на h [14].

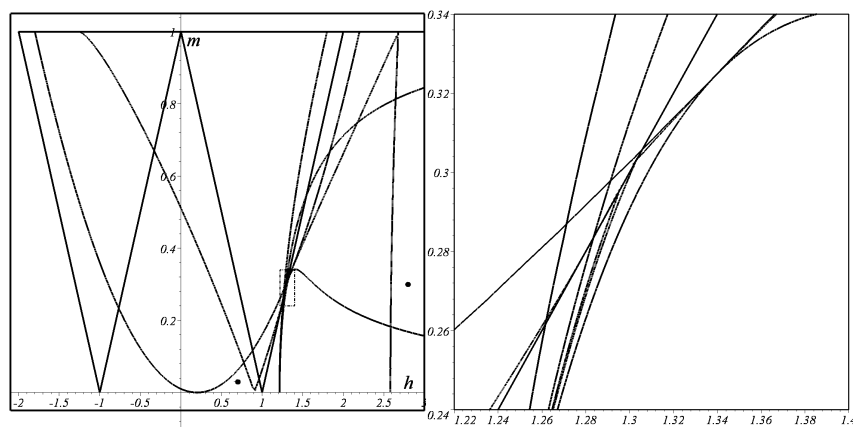


Рис. 3. Разделяющее множество для сечения $\lambda = 0,04$ и его увеличенный фрагмент.

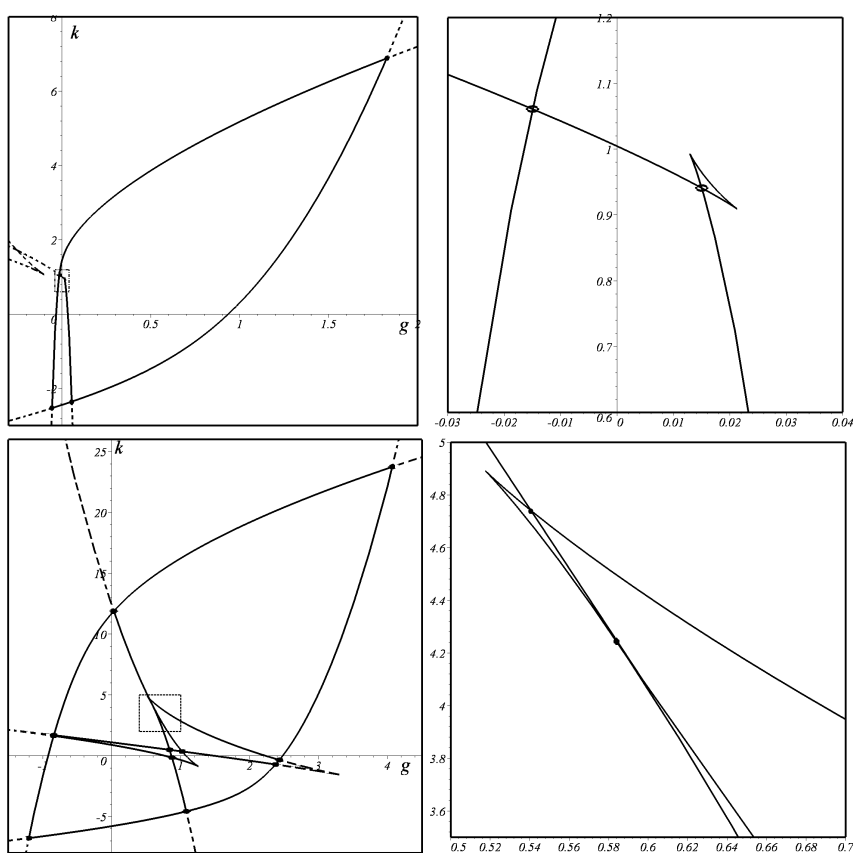


Рис. 4. Бифуркационные диаграммы на изоэнергетических уровнях $h = 0,7$ и $h = 2,8$ соответственно.

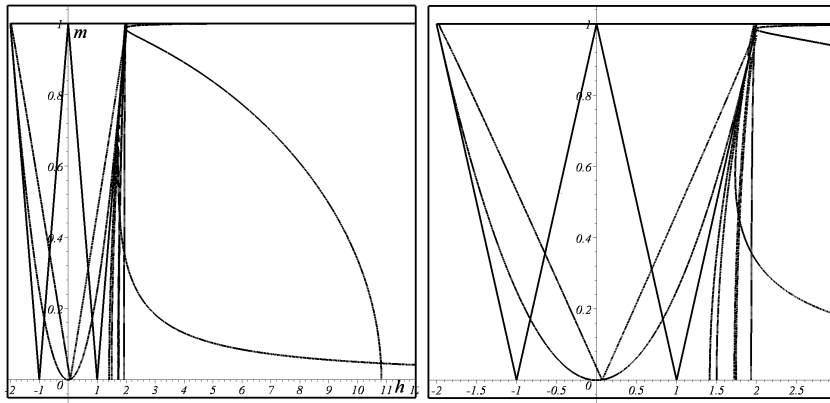


Рис. 5. Разделяющее множество для сечения $\lambda = 0,000001$ и его увеличенный фрагмент.

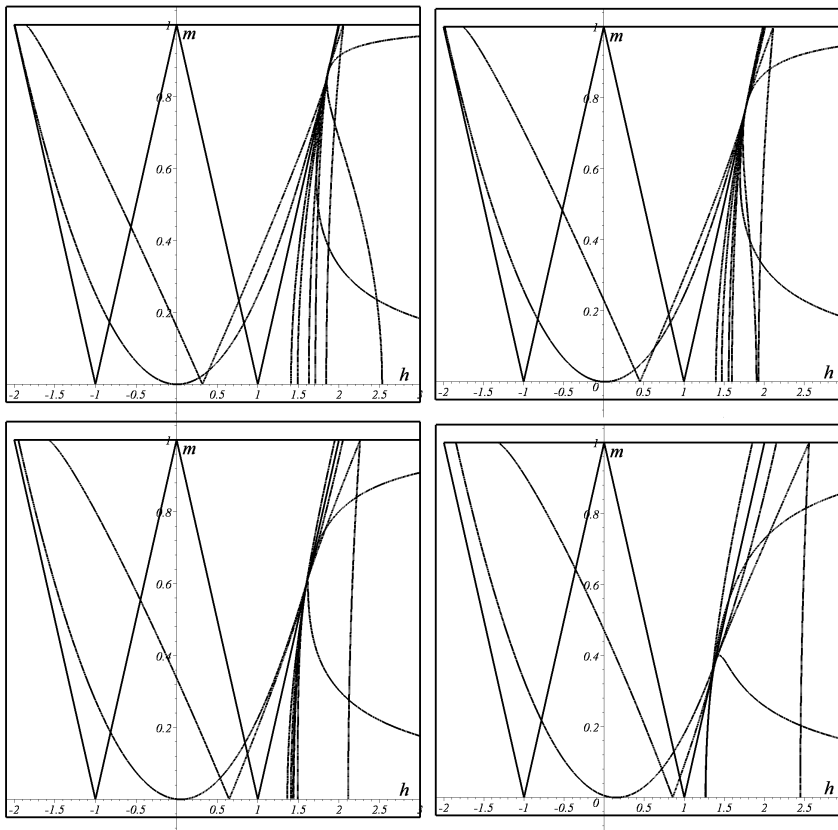


Рис. 6. Атлас разделяющего множества при увеличении параметра гиросtatического момента λ .

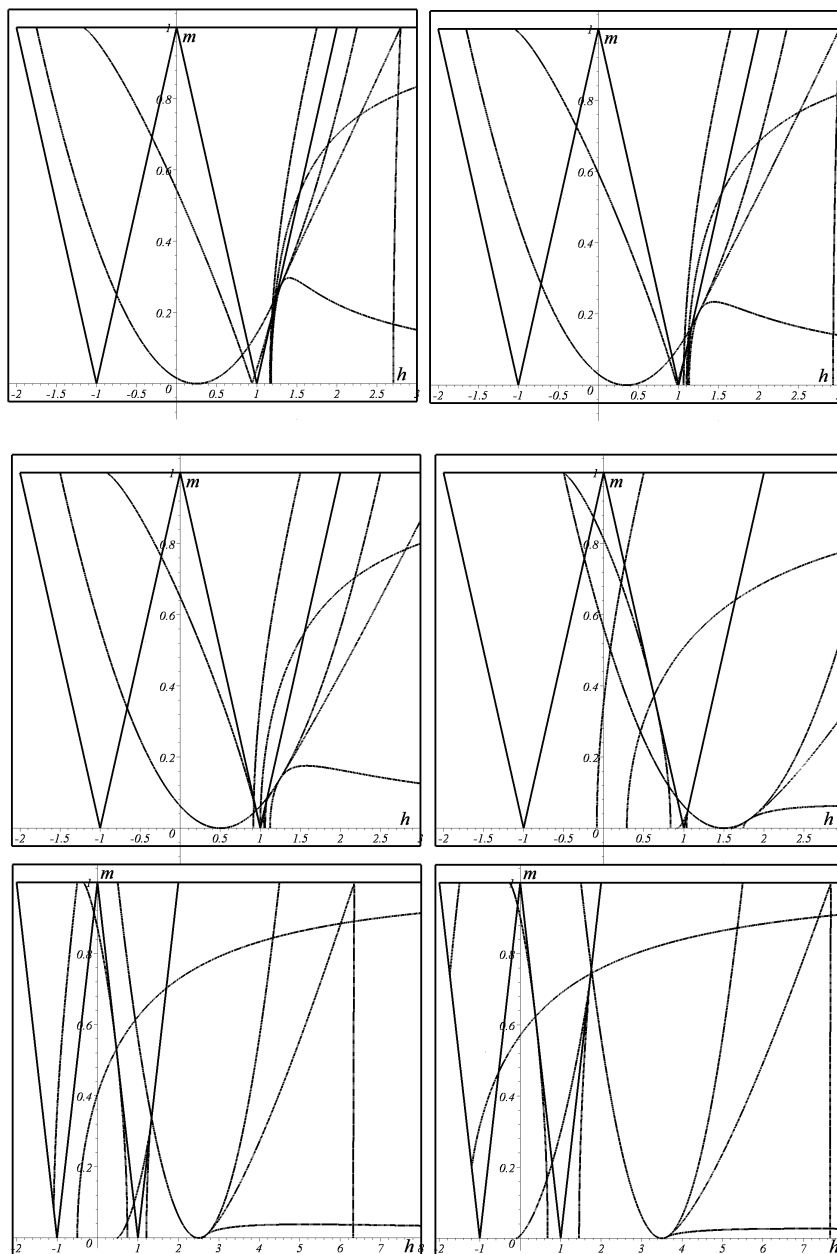


Рис. 7. Атлас разделяющего множества (продолжение).

Ранг отображения момента на этих отрезках равен 1, следовательно, эти отрезки входят в одномерный остов бифуркационной диаграммы. Кроме того, в работе [14] указана параметризация для *всех* остальных особых периодических движений, на которых $\text{rank } \mathcal{F} = 1$, что позволяет построить бифуркационную диаграмму Σ как двумерный клеточный комплекс. Можно выдви-

нута предположение, что условиям *приводимости* алгебраической кривой \mathcal{C} и условиям *наличия особой точки* соответствует поверхность в пространстве постоянных первых интегралов, несущая бифуркационную диаграмму. Выделяя на ней нульмерный и одномерный остовы, вырезаем собственно бифуркационную диаграмму – ту часть найденной поверхности, которая соответствует условиям существования вещественных решений уравнений движения. Для волчка в двойном поле такая программа реализована в [16, 13]. В случае гири Ковалевской условия приводимости исчерпываются уравнениями (15)–(17). Остальная часть одномерного остова порождается решениями, указанными в [14]. Как стало известно автору, М.П. Харламовым [17] получены уравнения всех критических подмногообразий в M^6 , образ которых является фактической частью бифуркационной диаграммы Σ в составе поверхностей (14).

Для построения Σ необходимо найти условия, при которых действительные куски алгебраических поверхностей Δ_1 и Δ_2 имеют общие точки: точки касания, точки возврата, точки пересечения. Совокупность всех таких поверхностей в $\mathbb{R}^3(h, m, \lambda)$ даст разделяющее множество в дополнение к уже имеющимся четырем плоскостям. Наиболее трудным, как и в случае Соколова, оказалось построение дискриминанта многочлена 12-й степени $P(s)$, который отвечает за бифуркации точек пересечения. Исключение переменной s из системы $P(s) = 0, P'(s) = 0$ привело к выражению $WV^3 = 0$, что окончательно позволяет численно построить разделяющее множество в сечениях $\lambda = \text{const}$ и соответствующие бифуркационные диаграммы. Примеры разделяющего множества и бифуркационных диаграмм для выбранных значений параметров приведены на рис. 3, 4. На рис. 5, 6, 7 изображено разделяющее множество с увеличением параметра гири статического момента λ . Видно, как пучок кривых начинает изменяться, появляются новые кривые, которые перестраиваются, образуя новые области, а, следовательно, новый тип бифуркационной диаграммы, в конечном итоге определяя новые слоения Лиувилля на изоэнергетических многообразиях.

Таким образом, для гири Ковалевской в двойном поле сил построен атлас (разделяющее множество), который позволяет классифицировать все бифуркационные диаграммы.

Автор благодарит М.П. Харламова, чьи критические замечания и советы помогли осознать новую задачу (гиростат Ковалевской в двойном поле).

1. Харламов П.В., Мозалевская Г.В., Лесина М.Е. О различных представлениях уравнений Кирхгофа // *Механика твердого тела*. – 2001. – Вып. 31. – С. 3–17.
2. Ламб Г. *Гидродинамика*. – М.;Л.: Гостехтеориздат, 1947. – 928 с.
3. Харламов П.В. О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // *Прикл. мех. и техн. физ.* – 1963. – Вып. 4. – С. 17–29.
4. Соколов В.В. Новый интегрируемый случай для уравнений Кирхгофа // *Теор. и мат. физ.* – 2001. – 129, вып. 1 – С. 31–36.
5. Соколов В.В. A generalized Kowalevski Hamiltonian and new integrable cases on $e(3)$ and $so(4)$ // In “Kowalevski property”/ Ed. V.B. Kuznetsov. – CRM Proc. and Lect. Notes, AMS. – 2002. – P. 307–315.

6. *Соколов В.В., Цыганов А.В.* Пары Лакса для деформированных волчков Ковалевской и Горячева–Чаплыгина // Теор. и мат. физ. – 2002. – **131**, вып. 1 – С. 118–125.
7. *Komarov I.V., Sokolov V.V., Tsiganov A.V.* Poisson maps and integrable deformations of the Kowalevski top // J. Phys. A: Math. Gen. – 2003. – **36**. – P. 8035–8048.
8. *Харламов М.П.* Критическое множество и бифуркационная диаграмма задачи о движении волчка Ковалевской в двойном поле // Механика твердого тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 47–58.
9. *Богоявленский О.И.* Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики // Изв. АН СССР. Сер. математика. – 1984. – **48**, № 5. – С. 883–938.
10. *Yehia H.* New integrable cases in the dynamics of rigid bodies // Mech. Res. Commun. – 1986. – **13**, № 3. – P. 169–172.
11. *Bobenko A.I., Reyman A.G., Semenov-Tian-Shansky M. A.* The Kowalevski top 99 years later: a Lax pair, generalizations and explicit solutions // Commun. Math. Phys. – 1989. – **122**, № 2. – P. 321–354.
12. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. В 2-х т. – Ижевск: Изд-во РХД, 1999. – Т. 1. – 444 с.; Т. 2. – 448 с.
13. *Харламов М.П.* Области существования критических движений обобщенного волчка Ковалевской и бифуркационные диаграммы // Механика твердого тела. – 2006. – Вып. 36. – С. 13–22.
14. *Харламов М.П.* Особые периодические движения гиростата Ковалевской в двойном поле // См. статью в наст. сб. – С. 85–96.
15. *Kharlamov M.P., Zotev D.B.* Non-degenerate energy surfaces of rigid body in two constant fields // Regular and Chaotic Dynamics. – 2005. – **10**, № 1. – P. 15–19.
16. *Kharlamov M.P.* Bifurcation diagrams of the Kowalevski top in two constant fields // Ibid. – 2005. – **10**, № 4. – P. 381–398.
17. *Харламов М.П.* Критические подсистемы гиростата Ковалевской в двух постоянных полях // Нелинейная динамика. – 2007. – **3**, № 3. – С. 331–348.