УДК 517.5

©2010. **Е.А.Севостьянов**

# О МНОЖЕСТВАХ ТОЧЕК ВЕТВЛЕНИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ С КОНЕЧНЫМ ИСКАЖЕНИЕМ ДЛИНЫ В $\mathbb{R}^3$

Для открытых дискретных отображений $f : D \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^3$ области $D \subset \mathbb{R}^3$, удовлетворяющих относительно общим геометрическим соотношениям в $D \setminus \{b\}$, имеющих существенную особую точку $b \in D$, доказано следующее утверждение. Пусть $y_0 \in \overline{\mathbb{R}^3} \setminus f\,(D \setminus \{b\})$, внутренняя дилатация $K_I(x, f)$ и внешняя дилатация $K_O(x, f)$ отображения $f$ в точке $x$ удовлетворяют определённым условиям. Обозначим символом $B_f$ множество точек ветвления отображения $f$. Тогда для произвольной окрестности $V$ точки $y_0$, $V \cap f(B_f)$ не может содержаться во множестве $A$ таком, что $g(A) = I$, где $I = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$ и $g : U \to \mathbb{R}^n$ – квазиконформное отображение области $U \subset \mathbb{R}^n$ такой, что $A \subset U$.

***Ключевые слова:*** *модули семейств кривых, отображения, точки ветвления отображений, квазиконформные отображения и их обобщения.*

**1. Предварительные сведения.** Всюду далее $D$ – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $m$ – мера Лебега $\mathbb{R}^n$, в запись $f : D \to \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение $f$, заданное в области $D$, непрерывно. Изолированная точка $x_0$ границы $\partial D$ области $D \subset \mathbb{R}^n$ называется *существенной особой точкой* отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$, если при $x \to x_0$ отображение $f$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела. Напомним, что $y_0 \in D$ – *точка ветвления* отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$, если ни в одной окрестности $U$ точки $y_0$, $f|_U$ не является гомеоморфизмом. Совокупность всех точек ветвления $f$ принято обозначать $B_f$. *Окрестностью* множества $A \subset \mathbb{R}^n$ называется произвольное множество $B$ такое, что $A \subset \operatorname{Int} B$, где $\operatorname{Int} B$ обозначает совокупность всех внутренних точек множества $B$. Множество $A \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ называется квазиконформным *$p$–шаром,* если существует окрестность $U$ множества $A$ и квазиконформное отображение $g$ множества $U$ такое, что $g(A) = B^p$, где $B^p = \{x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p : |x| < 1\}$. Если $p = 1$, множество $A$ называется *квазиконформной дугой,* см. 3.21 в [4]. Иначе говоря, квазиконформная дуга есть множество, которое является квазиконформно эквивалентным открытому интервалу на вещественной прямой.

Обозначим: $\overline{\mathbb{R}^n} := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, $\|f'(x)\| = \sup\limits_{h\in\mathbb{R}^n:|h|=1} |f'(x)h|$, $l\,(f'(x)) = \inf\limits_{h\in\mathbb{R}^n:|h|=1} |f'(x)h|$, $J(x, f)$ – якобиан отображения $f$ в точке $x \in D$. *Внешняя дилатация* отображения $f$ в точке $x$ есть величина $K_O(x, f) = \frac{\|f'(x)\|^n}{|J(x,f)|}$, если $J(x, f) \neq 0$, $K_O(x, f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_O(x, f) = \infty$ в остальных точках. *Внутренняя дилатация* $K_I(x, f) = \frac{|J(x,f)|}{l(f'(x))^n}$, если $J(x, f) \neq 0$, $K_I(x, f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_I(x, f) = \infty$ в остальных точках. Для отображения $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ введём в рассмотрение следующую функцию:

$$Q(y, f) := \sup_{x\in f^{-1}(y)\cap\mathbb{R}^n} K_O(x, f)\,. \tag{1}$$

Если $f^{-1}(y) = \varnothing$, в (1) полагаем $Q(y,f) := 0$. Для функций $K_I(x,f)$ и $Q(y,f)$ положим

$$k_{I,x_0}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}} \int\limits_{|x-x_0|=r} K_I(x,f)\,dS\,,$$

$$q_{y_0}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}} \int\limits_{|y-y_0|=r} Q(y,f)\,dS\,, \qquad (2)$$

где $dS$ – элемент площади поверхности $S$, а $\omega_{n-1}$ означает площадь сферы $\mathbb{S}^{n-1} = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| = 1\}$ в $\mathbb{R}^n$. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек, и *открытым*, если образ любого открытого множества $U \subset D$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$.

Далее $B(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x-x_0| < r\}$, $B(r) = B(0,r)$, $S(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-x_0| = r\}$, $S(r) = S(0,r)$, $\mathbb{S}^{n-1} = S(0,1)$, $\mathbb{B}^n = B(0,1)$, $m$ – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, $m(A)$ и $d(A)$ обозначают, соответственно, меру Лебега и евклидов диаметр множества $A \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega_n$ – объём единичного шара $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{mes}_1\,(A)$ означает линейную меру Лебега множества $A \subset \mathbb{R}$. Запись $g = \mathrm{id}$ для отображения $g : D \to \mathbb{R}^n$ означает, что $g$ – тождественное отображение. Далее предполагается, что отображение $f$ *сохраняет ориентацию,* т.е. топологический индекс $\mu(y,f,G) > 0$ для произвольной области $G \subset D$ такой, что $\overline{G} \subset D$, и произвольного $y \in f(G) \setminus f\,(\partial G)$. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *нульмерным*, если каждая компонента связности $\{f^{-1}(y)\}$ вырождается в точку.

Для $f : D \to \mathbb{R}^n$, множества $E \subset D$ и $y \in \mathbb{R}^n$ определим *функцию кратности* $N(y,f,E)$ как $N(y,f,E) = \mathrm{card}\,\{x \in E : f(x) = y\}$, $N(f,E) = \sup\limits_{y \in \mathbb{R}^n} N(y,f,E)$. Область $G \subset D$ такая, что $\overline{G} \subset D$, называется *нормальной областью отображения* $f$, если $\partial f(G) = f(\partial G)$. Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ – произвольное отображение и пусть существует область $G \subset D$ такая, что $\overline{G} \subset D$ и $\overline{G} \cap f^{-1}\,(f(x)) = \{x\}$. Тогда величина $\mu\,(f(x),\, f,\, G)$, называемая *локальным топологическим индексом*, не зависит от выбора области $G$ и обозначается символом $i(x,f)$. Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ – открытое дискретное отображение и $C$ – множество в $D$ такое, что $\overline{C} \subset D$. Для $y \in \overline{\mathbb{R}^n}$ определим величину $M\,(y,f,C) = \sum\limits_{x\, \in\, f^{-1}(y) \cap C} i(x,f)$. Величина $M^*(f,C) = \sup\limits_{y\, \in\, \overline{\mathbb{R}^n}} M\,(y,f,C)$ называется *максимальной кратностью* отображения $f$ в $C$. Следующие определения могут быть найдены, напр., в разд. 1 – 6 гл. I в [7]. Борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства $\Gamma$ кривых $\gamma$ в $\mathbb{R}^n$, если $\int\limits_{\gamma} \rho(x) \quad |dx| \geq 1$ для всех кривых $\gamma \in \Gamma$. В этом случае мы пишем: $\rho \in \mathrm{adm}\,\Gamma$. *Модулем* семейства кривых $\Gamma$ называется величина $M(\Gamma) = \inf_{\rho \in\, \mathrm{adm}\,\Gamma} \int\limits_{D} \rho^n(x) \quad dm(x)$.

Пусть $x \in E \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi : E \to \mathbb{R}^n$. Положим

$$L\,(x,\varphi) = \limsup\limits_{y \to x,\, y\, \in\, E} \frac{|\varphi\,(x) - \varphi\,(y)\,|}{|y-x|}, \qquad l\,(x,\varphi) = \liminf\limits_{y \to x,\, y\, \in\, E} \frac{|\varphi\,(x) - \varphi\,(y)\,|}{|y-x|}\,.$$

Непрерывное отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется отображением с *конечным метрическим искажением,* пишут $f \in FMD$, если $f$ обладает $(N)-$свойством Лузина и для п.в. $x \in D,\ \ 0 < l\,(x, f) \le L\,(x, f) < \infty$. Говорят, что отображение $f : X \to Y$ между пространствами с мерой $(X, \Sigma, \mu)$ и $(X', \Sigma', \mu')$ обладает *(N) – свойством,* если $\mu'\,(f\,(S)) = 0$ как только $\mu\,(S) = 0$. Аналогично, $f$ обладает *$(N^{-1})$ – свойством,* если $\mu\,(S) = 0$ как только $\mu'\,(f\,(S)) = 0$. Кривая $\gamma \in D$ называется *поднятием кривой* $\widetilde{\gamma} \in \mathbb{R}^n$ *при отображении* $f : D \to \mathbb{R}^n$, если $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$. Говорят, что некоторое свойство выполнено для *почти всех (п.в.) кривых* области $D$, если оно имеет место для всех кривых, лежащих в $D$, кроме некоторого их семейства, модуль которого равен нулю. Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}$ – открытый интервал числовой прямой, $\gamma : \Delta \to \mathbb{R}^n-$ локально спрямляемая кривая. Тогда существует единственная неубывающая функция длины $l_\gamma : \Delta \to \Delta_\gamma \subset \mathbb{R}$ с условием $l_\gamma(t_0) = 0$, $t_0 \in \Delta$ такая, что $l_\gamma(t)$ равно длине подкривой $\gamma\ |_{[t_0,\, t]}$ кривой $\gamma$, если $t > t_0$, и $-l\left(\gamma\ |_{[t,\, t_0]}\right)$, если $t < t_0$, $t \in \Delta$. Пусть $g : |\gamma| \to \mathbb{R}^n$ – непрерывное отображение, где $|\gamma| = \gamma(\Delta) \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что кривая $\widetilde{\gamma} = g \circ \gamma$ также локально спрямляема. Тогда существует единственная неубывающая функция $L_{\gamma,\, g} : \Delta_\gamma \to \Delta_{\widetilde{\gamma}}$ такая, что $L_{\gamma,\, g}\,(l_\gamma\,(t)) = l_{\widetilde{\gamma}}\,(t), \quad \forall \quad t \quad \in \Delta$. Говорят, что отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ обладает $(L)$ *– свойством,* если выполнены следующие условия: $(L_1)$ для п.в. кривых $\gamma \in D$ кривая $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$ локально спрямляема и функция $L_{\gamma,\, f}$ обладает $(N)$ –свойством; $(L_2)$ для п.в. кривых $\widetilde{\gamma} \in f\,(D)$ каждое поднятие $\gamma$ кривой $\widetilde{\gamma}$ локально спрямляемо и функция $L_{\gamma,\, f}$ обладает $\left(N^{-1}\right)$ – свойством. Говорят, что отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, является *отображением с конечным искажением длины*, пишут $f \in FLD$, если $f \in FMD$ и обладает $(L)$ – свойством.

Предложение 1. *Пусть* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *– отображение с конечным искажением длины, тогда* $M(f(\Gamma)) \le \int\limits_D K_I(x, f) \cdot \rho^n(x)\, dm(x)$ *для произвольного семейства кривых* $\Gamma$ *в* $D$ *и* $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$; $M(\Gamma) \le \int\limits_{f(E)} K_I\left(y, f^{-1}, E\right) \cdot \rho_*^n(y)\, dm(y)$ *для произвольного семейства кривых* $\Gamma$ *в* $E$ *и* $\rho_* \in \operatorname{adm} f(\Gamma)$, *где* $K_I\left(y, f^{-1}, E\right) = \sum\limits_{x \in E \cap f^{-1}(y)} K_O(x, f)$, *см. теоремы 8.6 и 8.5 в [5].*

Замечание 1. В работе [2] для квазиконформных отображений было установлено неравенство вида $M(f(\Gamma)) \le \int\limits_D K_I(x, f) \cdot \rho^n(x)\, dm(x)$ для произвольного семейства кривых $\Gamma$ в $D$ и $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$.

Пусть кривая $\beta : (a, b] \to \mathbb{R}^n$, $x \in f^{-1}\,(\beta(b))$. Кривая $\alpha : (c, b] \to D$ называется *максимальным поднятием* кривой $\beta$ при отображении $f : D \to \mathbb{R}^n$ с концом в точке $x$, если $(i)\quad \alpha(b) = x$; $(ii)\quad f \circ \alpha = \beta|_{(c,\, b]}$; $(iii)$ если $a \le c' < c$, то не существует такой кривой $\alpha' : (c', b] \to D$, что $\alpha = \alpha'|_{(c,\, b]}$ и $f \circ \alpha' = \beta|_{(c', b]}$. Аналогично определяется максимальное поднятие $\alpha : [a, c) \to D$ кривой $\beta : [a, b) \to \mathbb{R}^n$ с началом в точке $x \in f^{-1}\,(\beta(a))$. Пусть $f$ открытое дискретное отображение и $x \in f^{-1}\,(\beta(b))$ (либо $x \in f^{-1}\,(\beta(a))$), тогда всякая кривая $\beta : (a, b] \to \mathbb{R}^n$ (соответственно, $\beta : [a, b) \to \mathbb{R}^n$) имеет максимальное поднятие при отображении $f$ с концом в точке $x$ (соответственно, с началом в точке $x$), см. следствие 3.3 гл. II в [6]. Более того, имеет место следующее утверждение, см. лемму 3.12 в [4].

Предложение 2. *Пусть* $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *– открытое нульмерное отображение,* $x_0 \in D$, $\beta : (a, b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *– кривая такая, что* $\beta(b) = f(x_0)$, *и что либо существует предел* $\lim\limits_{t\to a} \beta(t)$, *либо* $\beta(t) \to \partial f(D)$ *при* $t \to a$. *Тогда* $\beta$ *имеет максимальное поднятие* $\alpha : (c, b] \to D$. *При этом, если* $\alpha(t) \to x_1 \in D$ *при* $t \to c$, *то* $c = a$ *и* $f(x_1) = \lim\limits_{t\to a} \beta(t)$. *Если* $f$ *дискретно и* $i(\alpha(t), f) = const$ *при* $t \in (c, b]$, *то упомянутая выше кривая* $\alpha$ *единственна.*

Пусть $(r, \varphi, z)$ – цилиндрические координаты в $\mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{R}^1 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi)$, $r \geq 0$, $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$, $(x_3, \ldots, x_n) = z$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ определим отображение $g_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, называемое *закручиванием:*

$$g_k(r, \varphi, z) = (r, k\varphi, z)\,, \tag{3}$$

см. разд. 3 в [4]. При $k > 0$, $g_k$ является отображением с ограниченным искажением, причём $K_I(g_k) = \operatorname{ess}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} K_I(x, g_k) = k$ и $K_O(g_k) = \operatorname{ess}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} K_O(x, g_k) = k^{n-1}$, см. там же.

Предложение 3. *Предположим, что отображение* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *открыто и дискретно,* $x_0 \in B_f$, $f(x_0) = 0$, *точка* $x_0$ *имеет окрестность* $V$ *такую, что множество* $f\left(B_f \cap U\right)$ *содержится в* $(n-2)$ *– мерном подпространстве* $Z = \left\{y \in \mathbb{R}^n : y_1 = y_2 = 0\right\}$. *Тогда найдётся окрестность* $U = U\left(x_0, f, r\right)$ *точки* $x_0$ *и гомеоморфизм* $h$ *окрестности* $U$ *на шар* $B(r)$ *такие, что* $f|_U = g_k \circ h$, *где* $k = i(x_0, f)$, *см. лемму 3.20 в [4].*

Непрерывное отображение $s : f(D) \to \mathbb{R}^n$ называется *сечением* для $f : D \to \mathbb{R}^n$, если $f \circ s = \mathrm{id}$. Говорят, что множество $E \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ *относительно локально связно*, если каждая точка множества $\overline{E}$ имеет сколь угодно малые окрестности $U$ такие, что множества $U \cap E$ связны.

Предложение 4. *Пусть отображение* $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *– нульмерное,* $A \subset f(D)$ *и пусть существует сечение* $s : A \to D$ *отображения* $f$, $f \circ s = \mathrm{id}$. *Если* $A$ *– относительно локально связно в точке* $y \in \overline{A}$, *то множество* $C(s, y)$ *есть либо континуум в* $\partial D$, *либо – единственная точка в* $D$, *см. [1], 3.A, см. также лемму 3.10 в [4].*

Предложение 5. *Пусть* $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *– локальный гомеоморфизм, множество* $Q \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ *односвязно и локально линейно связно,* $P$ *– компонента связности множества* $f^{-1}(Q)$ *такая, что* $\overline{P} \subset D$. *Тогда* $f$ *отображает* $P$ *на* $Q$ *гомеоморфно. Если, кроме того, множество* $Q$ *относительно локально связно, то* $f$ *гомеоморфно отображает* $\overline{P}$ *на* $\overline{Q}$, *см. лемму 2.2 разд. 2 в [4].*

Предложение 6. *Пусть* $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *– локальный гомеоморфизм,* $F$ *– компакт в* $D$ *и* $f|_F$ *инъективно. Тогда* $f$ *также инъективно в некоторой окрестности множества* $F$, *см. [9], с. 422, см. также следствие 3.8 в [4].*

Предложение 7. *Пусть* $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *– открытое дискретное отображение,* $F$ *– компакт в* $D$. *Тогда найдётся окрестность* $U$ *множества* $F$, *такая что* $\overline{U} \subset D$ *и* $M^*(f, U) = M^*(f, F)$, *см. лемму 3.7 в [4].*

Предложение 8. *Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное отображение, $U$ – нормальная область $f$ такая, что множество $f(U)$ – относительно локально связно, $y \in f(\partial U \setminus B_f)$. Тогда $N(y, f, \partial U \setminus B_f) = N(f, \partial U \setminus B_f) = N(f, \partial U) = N(f, U)$, см. лемму 3.9 в [4].*

**2. Основные леммы и результат статьи.**

**Лемма 1.** *Пусть $b \in D$, $f : D \setminus \{b\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 3$, – открытое дискретное отображение с конечным искажением длины. Предположим, что $b$ есть существенно особая точка отображения $f$ и что при некоторых $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(b, \partial D)$, борелевской функции $\psi(t) : (0, \infty) \to (0, \infty)$, удовлетворяющей условию*

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt < \infty \qquad \forall \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \tag{4}$$

*и $\varepsilon \to 0$ выполнено соотношение:*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-b|<\varepsilon_0} K_I(x, f) \cdot \psi^n(|x-b|)\, dm(x) \,=\, o\left(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)\right) . \tag{5}$$

*Тогда имеет место включение: $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D \setminus \{b\}) \subset \overline{f(B_f)}$.*

*Доказательство.* По предложению 1, $M(f(\Gamma)) \leq \int\limits_D K_I(x, f) \cdot \rho^n(x)\, dm(x)$ для произвольного семейства кривых $\Gamma$ в $D \setminus \{b\}$ и $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$. В таком случае, желанное заключение является утверждением леммы 4 в [10]. $\Box$

**Лемма 2.** *Пусть $\Gamma_0$ – семейство кривых $\gamma(t) : (0, 1) \to D \setminus \{b\}$ таких, что $\gamma(t) \to b$ при $t \to 0$. Предположим, что $f$ удовлетворяет условиям леммы 1. Тогда $M(f(\Gamma_0)) = 0$.*

*Доказательство.* Имеем $M(f(\Gamma)) \leq \int\limits_D K_I(x, f) \cdot \rho^n(x)\, dm(x)$ для любого семейства $\Gamma$ в $D \setminus \{b\}$ и $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$ по предложению 1. Нужное заключение есть утверждение леммы 1 в [10], см. также лемму 5.1 в [11]. $\Box$

**Лемма 3.** *Пусть $f : D \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^3$ открытое дискретное отображение с конечным искажением длины, $b$ есть существенно особая точка $f$, $y_0 \in \overline{\mathbb{R}^3} \setminus f(D \setminus \{b\})$. Предположим, что при некоторых $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(b, \partial D)$, борелевской функции $\psi_0(t) : (0, \infty) \to (0, \infty)$, удовлетворяющей условию вида (4) при $\psi := \psi_0(t)$, и $\varepsilon \to 0$ выполнено соотношение вида (5). Предположим также, что найдётся $r(y_0) > 0$ такое, что для любого $z_0 \in B(y_0, r(y_0)) \setminus \{y_0\}$ и некоторых $\varepsilon_1 < \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$, борелевской функции $\psi_1(t) : (0, \infty) \to (0, \infty)$, удовлетворяющей условию вида (4) при $\psi = \psi_1(t)$, и $\varepsilon \to 0$ выполнено соотношение вида*

$$\int\limits_{\varepsilon<|y-z_0|<\varepsilon_1} Q(y, f) \cdot \psi_1^3(|y-z_0|)\, dm(y) \,=\, o\left(I_1^3(\varepsilon, \varepsilon_1)\right) , \tag{6}$$

*где $I_1(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_1} \psi_1(t)dt$, а функция $Q(y, f)$ определена в соотношении (1). Тогда для произвольной окрестности $V$ точки $y_0$, множество $W := V \cap f(B_f)$ не может* *содержаться в квазиконформной дуге. Т.е., $W = V \cap f(B_f)$ не может содержаться в некотором множестве, являющемся квазиконформно эквивалентным открытому интервалу на прямой.*

*Доказательство.* При доказательстве используем подход из [4], см. теорему 3.22, см. также [1] и [9]. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $b = 0 = y_0$. Предположим, что множество $W = V \cap f(B_f)$ содержится в квазиконформной дуге для некоторой окрестности $V$ точки 0. Можно считать, что $V \subset B(y_0, r(y_0)) = B(0, r(0))$ и $W = V \cap f(B_f) \subset Z = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 0\}$. Зафиксируем $r_0 > 0$, $r_0 < \varepsilon_0$ такое, что $\overline{B(r_0)} \subset D$ и $U_0 = B(r_0) \setminus \{0\}$, $g = f|_{U_0}$. Применяя к отображению $f$ лемму 1, учитывая, что $0 \notin f\left(\overline{D \setminus \{0\}}\right)$, заключаем, что найдётся $r' \neq 0$ такое, что $r'e_3 \in g(B_g)$, где $e_3 = (0,0,1)$, $\overline{B(|r'|)} \subset V$ и, в виду дискретности отображения $f$,

$$\overline{B\left(|r'|\right)} \cap f\left(S(r_0)\right) = \varnothing\,. \tag{7}$$

Можно считать, что $r' > 0$. Выберем $x_0 \in g^{-1}\left(r'e_3\right) \cap B_g$. По предложению 3, для некоторых окрестности точки $x_0$ и гомеоморфизма $h$ выполнено: $f = g_k \circ h$, где $k = i(x_0, f)$, см. (3). Пусть $\beta : (0, r'] \to \mathbb{R}^3$ есть кривая $\beta(t) = te_3$. По предложению 2 существует максимальное поднятие $\alpha : (\delta, r'] \to D$ с концом в точке $x_0$. В силу предложения 2 и в виду (7), имеем $\alpha(t) \to 0$ при $t \to \delta$. При $0 < r < r' - \delta$ и $0 < \varphi \leq \pi$ рассмотрим

$$G(r,\varphi) = \{y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : |y - \delta e_3| = r, \quad y_3 > \delta + r\cos\varphi\}\,. \tag{8}$$

Множества $G(r,\varphi)$ в (8) представляют собой некоторую часть на сфере $S(\delta e_3, r)$, симметричную относительно отрезка $\{r \in \mathbb{R}^n : r = r(s) = (0,0,s+\delta e_3), \quad s \in (0,r)\}$. Пусть $G^*(r,\varphi)$ есть $\alpha(\delta + r)$ – компонента связности множества $g^{-1}\left(G(r,\varphi)\right)$. Заметим, что в виду представления $f = g_k \circ h$, $k = i(x_0, f)$, множество $G(r,\varphi)$ является $h$ – эквивалентным к $G^*(r,\varphi)$ при малых $\varphi$ и $f\left(G^*(r,\varphi)\right) = (g_k \circ h)\left(G^*(r,\varphi)\right) = G(r,\varphi)$. Пусть $\varphi_r$ есть точная верхняя грань указанных выше чисел $\varphi \in (0,\pi]$. Обозначим $E = \{r \in (0, r' - \delta) : 0 \in \overline{G^*(r,\varphi_r)}\}$.

Покажем, что $\mathrm{mes}_1\,(E) = 0$. Предположим, что $0 \in \overline{G^*(r,\varphi_r)}$ при некотором $r$, тогда найдётся последовательность $x_k \in G^*(r,\varphi_r)$, $x_k \to 0$ при $k \to \infty$. Обозначим $g_r = g|_{G^*(r,\varphi_r)}$. Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность $h(x_k) \to y_r \in \overline{G(r,\varphi_r)}$ при $k \to \infty$. Заметим, что отображение $h_r^{-1}$ является сечением отображения $h$ на множестве $G(r,\varphi)$ и по предложению 4 множество $C\left(h_r^{-1}, y_r\right)$ есть континуум, содержащий точку $x_0 = 0$ и, возможно, точки границы $U_0$. Однако, в виду (7), $C\left(h_r^{-1}, y_r\right) = \{0\}$, т.е. $h_r^{-1}(y) \to 0$ при $y \to y_r$. Пусть $\Gamma(r)$ – семейство открытых кривых $\gamma_r(s) : (0,1) \to \mathbb{R}^3$, соединяющих $\beta(r+\delta)$ и $y_r$ в $G(r,\varphi)$, т.е. $\gamma_r(0) = y_r$, $\gamma_r(1) = \beta(r+\delta)$ и $\gamma_r(s) \in G(r,\varphi)$ при $s \in (0,1)$. Положим $\Gamma^*(r) = h_r^{-1}\left(\Gamma(r)\right)$. Тогда, согласно сказанному выше, каждая кривая $\gamma_r^*(s) : (0,1) \to U_0$ семейства $\Gamma^*(r)$ такова, что $\gamma_r^*(s) \to 0$ при $s \to 0$. Обозначим

$$\Gamma^* = \bigcup_{r:\, 0 \in \overline{G^*(r)}} \Gamma^*(r)\,.$$

По предложению 3 и в силу конструкции отображения $g_k$, заданного в (3), для каждого $t \in (\delta, r']$ в некоторой окрестности каждой точки $\alpha(t)$ имеем: $f = g_k \circ h$, $k = i(x_0, f)$. По лемме 2 получаем, что $M\left(f(\Gamma^*)\right) = 0$. Однако, $M\left(f(\Gamma^*)\right) = M\left(\left(g_k \circ h\right)(\Gamma^*)\right) \geq (1/k^n) \cdot M\left(h\left(\Gamma^*\right)\right)$ в виду того, что $K_O(g_k) = k^{n-1}$, см. предложение 1 и комментарий после (3). Отсюда получаем $M\left(h(\Gamma^*)\right) = 0$. С другой стороны, согласно п. 10.2 в [7],

$$0 = M\left(h\left(\Gamma^*\right)\right) \geq b_n \cdot \int\limits_E \frac{dr}{r}\,, \tag{9}$$

где постоянная $b_n$ зависит только от размерности $n$. Из (9) вытекает, что $\mathrm{mes}_1\left(E\right) = 0$, что и требовалось доказать. Пусть $r \in (0, r' - \delta) \setminus E$, тогда по предложению 5, отображение $h$ отображает $\overline{G^*(r, \varphi_r)}$ гомеоморфно на $\overline{G(r, \varphi_r)}$. Кроме того, по предложению 6, отображение $h$ инъективно в некоторой окрестности $\overline{G^*(r, \varphi_r)}$. По определению угла $\varphi_r$, это возможно только в случае $\varphi_r = \pi$. Следовательно, при каждом $r \in (0, r' - \delta) \setminus E$, множество $\overline{G^*(r, \varphi_r)} = \overline{G^*(r, \pi)}$ есть поверхность в $U_0$, топологически эквивалентная сфере $S(\delta e_3, r)$, и $f$ топологически эквивалентно отображению $g_k$ на $S(\delta e_3, r)$.

Исходя из сказанного выше, выберем последовательность $r_1 > r_2 > \ldots$ такую, что $r_1 < \delta$ при $\delta > 0$, $r_1 < \varepsilon_1$, $r_i \in (0, r' - \delta) \setminus E$ и $r_i \to 0$ при $i \to \infty$. Пусть $D_i$ – ограниченная компонента связности множества $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{G^*\left(r_i, \varphi_{r_i}\right)}$, тогда, по определению, $\overline{D_i} \subset B(r_0)$ и каждая кривая, соединяющая элементы 0 и $x_0$, пересекает $\partial D_i$ хотя бы в одной точке. Переходя далее к подпоследовательности, мы можем свести все дальнейшие рассуждения к одному из двух возможных случаев:

1) $0 \in D_{i+1} \subset D_i$ для всех $i \in \mathbb{N}$, 2) $x_0 \in D_{i+1} \subset D_i$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим случай 1). Покажем сначала, что множество $A_i = D_i \setminus \overline{D_{i+1}}$ является нормальной областью. В виду открытости отображения $f$, $\partial f(A_i) \subset f(\partial A_i)$, см., напр., разд. 4 гл. I в [6]. Предположим, что $A_i$ не является нормальной областью, тогда в виду сказанного выше, $A_i \cap f^{-1}\left(f\left(\partial A_i\right)\right) \neq \varnothing$. Пусть $Q$ – произвольная компонента связности множества $A_i \cap f^{-1}\left(f\left(\partial A_i\right)\right)$. По предложению 7, существует окрестность $U$ границы $\partial A_i$ такая, что $M^*(f, U) = k$. Отсюда следует, что $U \cap Q = \varnothing$, иначе было бы $M^*(f, U) > k$. Следовательно, $Q$ лежит в некотором компакте внутри $A_i$ и потому является компактом. Согласно п. 7.5, с. 148 в [8], получаем, что $f\left(Q\right) = S_j = S(\delta e_3, r_j)$, где либо $j = i$, либо $j = i + 1$. Предположим сначала, что $\delta = 0$. Пусть $\beta_j : (0, r_j] \to \mathbb{R}^3$ есть кривая $\beta_j(t) = te_3$. По предложению 2 кривая $\beta_j(t)$ имеет максимальное поднятие $\alpha_j : (c_j, r_j] \to D$ с концом в некоторой точке $x_1 \in Q$, причём $\alpha_j(t) \to 0$ при $t \to c_j$. Следовательно, найдётся $t_0 \in (c_j, r_j)$ такое, что $\alpha_j(t_0) \in \partial D_{i+1}$. Пусть $j = i + 1$, тогда $\beta_{i+1}(t_0) = t_0 e_3$, однако, в то же время, $\beta_{i+1}(t_0) = r_{i+1}e_3$, откуда следует, что $t_0 = r_{i+1}$, что невозможно, ибо $t_0 < r_{i+1}$. Пусть $j = i$, тогда, рассуждая аналогично, получим $t_0 = r_{i+1}$. В виду представления $f = g_k \circ h$, $\alpha_i(t_0)$ является единственной точкой множества $\partial D_{i+1} \cap f^{-1}\left(r_{i+1}e_3\right)$. Тогда кривые $\alpha_i|_{[r_{i+1}, r_i]}$ и $\alpha|_{[r_{i+1}, r_i]}$ одновременно являются поднятиями кривой $\beta|_{[r_{i+1}, r_i]}$ с началом в точке $\alpha(r_{i+1})$ и, кроме того,

$i\,(\alpha(t),f)=k=const$. Применяя предложение 2, получаем, что $\alpha_i(t)=\alpha(t)$ на $[r_{i+1},r_i]$, что невозможно, т.к. $\alpha_i(r_i)=x_1\in Q\in A_i$, а $\alpha(r_i)\in\partial A_i$.

Пусть теперь $\delta>0$, $\beta^{\,\prime}_j:(0,\delta-r_j]\rightarrow\mathbb{R}^3$ есть кривая $\beta^{\,\prime}_j(t)=te_3$. Выберем максимальное поднятие $\alpha^{\,\prime}_j:\left(c^{\,\prime}_j,\delta-r_j\right]\rightarrow D$ кривой $\beta^{\,\prime}_j$ с концом в некоторой точке множества $Q$. Заметим, что в этом случае $\alpha^{\,\prime}_j(t)\rightarrow 0$ при $t\rightarrow c^{\,\prime}_j$ и, значит, найдётся точка $t^{\,\prime}_0\in\left(c^{\,\prime}_j,\,\delta-r_j\right)$ такая, что $\alpha^{\,\prime}_j(t^{\,\prime}_0)\in\partial D_{i+1}$. Легко видеть, что последнее невозможно, как при $i=j$, так и при $i=j+1$. Значит, $A_i=D_i\setminus\overline{D_{i+1}}$ – нормальная область. Тогда, также и $B_i=D_1\setminus\overline{D_i}$ – нормальная область. Пусть $\Gamma_i$ – семейство кривых, соединяющих граничные компоненты множества $B_i$ внутри $B_i$. По предложению 8 имеем $N\,(f,B_i)=N\,(f,\partial B_i)=k$. Заметим, что точка $\delta e_3\in B(0,r(0))$, т.к. по выбору $r^{\,\prime}$, $\overline{B(r^{\,\prime})}\subset V\subset B(0,r(0))$, причём $M(\Gamma_i)\geq\left(b_3\cdot\frac{(d(D_i))^3}{m(D_1)}\right)^{1/2}$, см. лемму 5.9 в [3]. Применяя предложение 1, получим

$$\left(b_3\cdot\frac{(d(D_i))^3}{m(D_1)}\right)^{1/2}\leq M(\Gamma_i)\leq k\cdot\int\limits_{r_i<|y-z_0|<\varepsilon_1}Q(y,f)\cdot\rho_*^3(y)\,dm(y)\qquad(10)$$

для произвольной функции $\rho_*\in{\rm adm}\,f(\Gamma_i)$. Рассмотрим функцию

$$\widetilde{\rho}_*(y)=\begin{cases}\psi_1\left(|y-\delta e_3|\right)/I_1\left(r_i,r_1\right), & y\in\{r_i<|y-\delta e_3|<r_1\},\\ 0, & y\in\overline{\mathbb{R}^3}\setminus\{r_i<|y-\delta e_3|<r_1\}\end{cases},$$

где $I_1(a,b):=\int\limits_a^b\psi_1(t)\,dt$. Заметим, что $\widetilde{\rho}_*\in{\rm adm}\,f(\Gamma_i)$, поскольку, согласно теореме 5.7 в [7], $\int\limits_{\gamma}\widetilde{\rho}_*(y)\,|dx|\geq\frac{1}{I(r_i,r_1)}\int\limits_{r_i}^{r_1}\psi_1(t)\,dt=1$. Тогда из (6) и (10), $\left(b_3\cdot\frac{(d(D_i))^3}{m(D_1)}\right)^{1/2}\leq\mathfrak{F}(r_i)\rightarrow 0$ при $i\rightarrow\infty$, откуда $f\left(D_1\setminus\{0\}\right)\subset B\left(\delta e_3,r_1\right)$. С другой стороны, по условию $b=0$ – существенно особая точка $f$, поэтому $C(f,0)=\overline{\mathbb{R}^3}$, см. лемму 3.1 и теорему 6.4 в [11]. Полученное противоречие завершает рассмотрение случая 1).

Рассмотрим случай 2). Аналогично доказанному выше, $B_i=D_i\setminus\overline{D_1}$ – нормальная область. Для семейства кривых $\Gamma_i$, соединяющих граничные компоненты $B_i$ в $B_i$, имеем

$$\left(b_3\cdot\frac{(d(D_1))^3}{m(U_0)}\right)^{1/2}\leq M(\Gamma_i)\leq k\cdot\int\limits_{r_i<|y-z_0|<r_1}Q(y,f)\cdot\rho_*^3(y)\,dm(y):=\mathfrak{G}(r_i)$$

для произвольной функции $\rho_*\in{\rm adm}\,f(\Gamma_i)$. По доказанному выше $\mathfrak{G}(r_i)\rightarrow 0$ при $i\rightarrow\infty$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает лемму 3. $\Box$

**Теорема 1.** *Пусть $f:D\setminus\{b\}\rightarrow\mathbb{R}^3$ открытое дискретное отображение с конечным искажением длины, $b$ есть существенно особая точка $f$, $y_0\in\overline{\mathbb{R}^3}\setminus f\left(D\setminus\{b\}\right)$.*

*Предположим, что относительно* $K_I(x, f)$ *выполнено одно из следующих условий: 1)* $K_I(x, f) \in FMO(b)$, *2)* $k_{I,b}(r) = O\left(\left[\log \frac{1}{r}\right]^2\right)$ *при* $r \to 0$, *3) при некотором* $\delta(b) > 0$, $\delta(b) < \mathrm{dist}\,(b, \partial D)$, $\int\limits_0^{\delta(b)} \frac{dt}{tk_{I,b}^{1/2}(t)} = \infty$, *где* $k_{I,b}(t)$ *определено в (2). Предположим, существует* $r(y_0) > 0$ *такое, что для всех* $z_0 \in B\,(y_0, r(y_0)) \setminus \{y_0\}$, *для* $Q(y, f)$, *определенной в (1), выполнено одно из условий: 1*)* $Q(y, f) \in FMO(z_0)$, *2*)* $q_{z_0}(r) = O\left(\left[\log \frac{1}{r}\right]^2\right)$ *при* $r \to 0$, *3*) при некотором* $\Delta(z_0) > 0$, $\Delta(z_0) < \mathrm{dist}\,(z_0, \partial D)$, $\int\limits_0^{\Delta(z_0)} \frac{dt}{tq_{z_0}^{1/2}(t)} = \infty$, *где* $q_{z_0}(t)$ *определено в (2). Тогда для произвольной окрестности* $V$ *точки* $y_0$, *множество* $W := V \cap f(B_f)$ *не содержится ни в каком множестве, являющемся квазиконформно эквивалентным открытому интервалу на прямой.*

*Доказательство* теоремы 1 легко следует из леммы 3 посредством специального выбора функций $\psi_0$ и $\psi_1$. $\Box$


1. *Agard S., Marden A.* A removable singularity theorem for local homeomorphisms // Indiana Math. J. – 1970. – **20**. – P. 455–461.
2. *Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Intern. Journ. Math. and Math. Scie. – 2003. – **22**. – P. 1397–1420.
3. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. Math. – 1969. – **448**. – P. 1–40.
4. *Martio O., Rickman S. and Väisälä J.* Topological and metric properties of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1971. – **488**. – P. 1–31.
5. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory, New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.
6. *Rickman S.* Quasiregular mappings, Results in Mathematic and Related Areas (3), 26. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
7. *Väisälä J.* Lectures on $n$–Dimensional Quasiconformal Mappings, Lecture Notes in Math. 229. – Berlin etc.: Springer–Verlag, 1971.
8. *Whyburn G.T.* Analytic topology, American Mathematical Society, Rhode Island. – 1942.
9. *Зорич В.А.* Теорема М.А. Лаврентьева о квазиконформных отображениях пространства // Матем. сб. – 1967. – **116**, № 3. – С. 415–433.
10. *Севостьянов Е.А.* О множествах точек ветвления отображений, более общих, чем квазирегулярные // Укр. матем. ж. – 2010. – **62**, № 2. – С. 215–230.
11. *Севостьянов Е.А.* К теории устранения особенностей отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности // Изв. РАН, сер. мат. – 2010. – **74**, № 1. – С. 159–174.


**E.A. Sevost'yanov**

**About branch sets of mappings with finite length distortion in $\mathbb{R}^3$.**

For open discrete mappings $f : D \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^3$ of the domain $D \subset \mathbb{R}^3$ satisfying some general geometrical conditions in $D$ and having an essential singularity $b \in \mathbb{R}^3$, we have proved the following statement. Let $y_0 \in \overline{\mathbb{R}^3} \setminus f\,(D \setminus \{b\})$, the inner dilatation $K_I(x, f)$ and outher dilatation $K_O(x, f)$ of the mapping $f$ at a point $x$ satisfy certain conditions. Denote by $B_f$ the branch set of $f$. Then for every neighborhood $V$ of the point $y_0$, $V \cap f(B_f)$ can not to be contained in some set $A$ such that $g(A) = I$, where $I = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$ and $g : U \to \mathbb{R}^n$ be quasiconformal mapping of domain $U \subset \mathbb{R}^n$ with $A \subset U$.

***Keywords:*** *moduli of path's families, mappings, branch points of mappings, quasiconformal mappings and it's generalizations.*

**Є.О. Севостьянов**

**Про множини точок розгалуження відображень зі скінченним спотворенням довжини в $\mathbb{R}^3$.**

Для відкритих дискретних відображень $f : D \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^3$ області $D \subset \mathbb{R}^3$, які задовольняють відносно загальним геометричним умовам в $D \setminus \{b\}$ та мають істотну особливу точку $b \in \mathbb{R}^3$, доведено наступне твердження. Нехай $y_0 \in \overline{\mathbb{R}^3} \setminus f\left(D \setminus \{b\}\right)$, внутрішня дилатація $K_I(x, f)$ та зовнішня дилатація $K_O(x, f)$ відображення $f$ у точці $x$ задовольняють певним умовам. Позначимо символом $B_f$ множину точок розгалуження відображення $f$. Тоді для довільного околу $V$ точки $y_0$, $V \cap f(B_f)$ не може міститися в множині $A$ такої, що $g(A) = I$, де $I = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$ і $g : U \to \mathbb{R}^n$ – квазіконформне відображення області $U \subset \mathbb{R}^n$ такої, що $A \subset U$.

***Ключові слова:*** *модулі сімей кривих, відображення, точки розгалуження відображень, квазіконформні відображення та їх узагальнення.*

*Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк*
`brusin2006@rambler.ru`

Получено 26.03.2010