УДК 531.36

©2006. **А.С. Андреев, И.А. Перцева**

О СТАБИЛИЗАЦИИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО И ПОСТУПАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Решается задача об одно- и трехосной ориентации, о стабилизации поступательно-вращательного движения летательного аппарата. Предполагается, что управление аппаратом создается как внешними силами, например, реактивными, так и его внутренними устройствами, например, гиросиловыми стабилизаторами.

1. Задача об одноосной ориентации. Пусть $O_1\xi\eta\zeta$ есть абсолютная система координат, $Oxyz$ – система координат, неизменно связанная со космическим аппаратом T_0. Точка O совпадает с центром масс космического аппарата, $O\alpha\beta\gamma$ – система координат, совершающая поступательное движение относительно $O_1\xi\eta\zeta$. Пусть далее заданы два орта $\boldsymbol{s_0}$ и $\boldsymbol{r_0}$, причем орт $\boldsymbol{s}_0$ занимает неизменное положение в системе $O\alpha\beta\gamma$, а орт $\boldsymbol{r}_0$ – в системе $Oxyz$.

Рассмотрим задачу об ориентации космического аппарата, при которой ось $\boldsymbol{r}_0$ направлена по оси $\boldsymbol{s}_0$. При решении задачи будем учитывать передвижение масс в космическом аппарате, вызванное либо изменением режима работы гиросиловых стабилизаторов, либо иными перемещениями масс в аппарате, т.е. примем $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}(t)$. В принятой постановке уравнения вращательного движения в системе координат $Oxyz$ могут быть записаны в виде [1, 2]

$$\boldsymbol{I}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \dot{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{M}_{\textit{упр}}, \qquad \dot{\boldsymbol{I}}(t) = \frac{d\boldsymbol{I}(t)}{dt}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость космического аппарата, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}$ – кинетический момент относительно центра масс – точки O, $\boldsymbol{I}$ – тензор инерции, $\boldsymbol{M}_{\textit{г}} = -d\boldsymbol{H}/dt$ – управляющий момент гиросилового стабилизатора, $\boldsymbol{H}$ – кинетический момент подвижных масс, $\boldsymbol{M}$ – главный момент внешних сил, действующих на космический аппарат. Управляющим моментом будем считать весь момент $\boldsymbol{M}_{\textit{упр}} = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}_{\textit{г}}$.

Обозначим через s_i, r_i $(i = 1,2,3)$ проекции векторов $\boldsymbol{s}_0$, $\boldsymbol{r}_0$ на оси системы $Oxyz$. Тогда вектор $\boldsymbol{s}_0$ вращается по отношению к системе $Oxyz$ с угловой скоростью $-\boldsymbol{\omega}$. Следовательно,

$$\dot{\boldsymbol{s}}_0 = -\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{s}_0. \tag{2}$$

Уравнения движения (1), (2) при управлении $\boldsymbol{M}_{\textit{упр}} = -\boldsymbol{B}\boldsymbol{\omega} + \alpha(\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{s}_0)$ имеют вид

$$\boldsymbol{I}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \dot{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{H} = -\boldsymbol{B}\boldsymbol{\omega} + \alpha(\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{s}_0) \qquad \dot{\boldsymbol{s}}_0 = -\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{s}_0, \tag{3}$$

где $-\boldsymbol{B}\boldsymbol{\omega}$ – составляющая момента, линейная относительно $\boldsymbol{\omega}$, соответственно $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(t)$ есть матрица 3×3.

Система (3) имеет два положения равновесия:

$$1)\ \ \boldsymbol{\omega} = 0, \quad \boldsymbol{s}_0 = \boldsymbol{r}_0 \qquad \text{и} \qquad 2)\ \ \boldsymbol{\omega} = 0, \quad \boldsymbol{s}_0 = -\boldsymbol{r}_0.$$

Других решений система (3) на множестве $\{\boldsymbol{\omega} = 0\}$ не имеет.

Возьмем функцию Ляпунова в виде

$$\boldsymbol{V} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega} + \alpha(\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{s}_0)^2\right).$$

Производная этой функции в силу системы (3) будет иметь следующий вид:

$$\dot{\boldsymbol{V}} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^T)\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \dot{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{\omega}.$$

Допустим, что управляющий момент создается таким образом, что имеет место оценка

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^T + \dot{\boldsymbol{I}})\boldsymbol{\omega} \geq b_0\|\boldsymbol{\omega}\|^2, \qquad b_0 > 0. \tag{4}$$

Соответственно предполагается, что либо при произвольном изменении тензора инерции $\boldsymbol{I}(t)$ может быть определена составляющая $-\boldsymbol{B(t)\omega}$ управляющего момента $\boldsymbol{M}_{ynp}$ так, что выполнено условие (4), либо, что при ограниченном управляющем моменте $\boldsymbol{M}_{ynp}$ производная тензора инерции должна быть ограничена в соответствии с этим условием. Тогда для производной $\dot{\boldsymbol{V}}$ имеем оценку

$$\dot{\boldsymbol{V}} \leq -b_0\|\boldsymbol{\omega}\|^2 \leq 0.$$

Уравнения, предельные к (3), имеют аналогичный вид [3]

$$\boldsymbol{I}^* \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \dot{\boldsymbol{I}}^* \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{I}^* \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{H}^* = -\boldsymbol{B}^* \boldsymbol{\omega} + \alpha(\boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{s}_0), \tag{5}$$

где $\boldsymbol{I}^*$, $\boldsymbol{B}^*$, $\dot{\boldsymbol{I}}^*$ – матрицы, предельные к $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{B}$, $\dot{\boldsymbol{I}}$, например

$$\boldsymbol{B}^* = \frac{d}{dt} \lim_{t_n \to +\infty} \int_0^\tau \boldsymbol{B}(t_n + \tau) d\tau.$$

Множество, на котором оценка производной равна нулю, есть множество $\{\boldsymbol{\omega} = 0\}$, система (5) на множестве $\{\boldsymbol{\omega} = 0\}$ не имеет других решений, кроме $\boldsymbol{\omega} = 0$, $\boldsymbol{s}_0 = \boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{\omega} = 0$, $\boldsymbol{s}_0 = -\boldsymbol{r}_0$, поэтому на основании теоремы из работы [3], получим, что положение равновесия $\boldsymbol{\omega} = 0$, $\boldsymbol{s}_0 = \boldsymbol{r}_0$ устойчиво, и притом асимптотически, а положение равновесия $\boldsymbol{\omega} = 0$, $\boldsymbol{s}_0 = -\boldsymbol{r}_0$ неустойчиво в смысле Ляпунова.

Исходя из этого, приходим к результату, развивающему соответствующий вывод из [4] для модели (1).

РЕЗУЛЬТАТ 1. *Управляющий момент $\boldsymbol{M}_{ynp}$ (1) можно выбрать так, чтобы космического аппарата T_0 был ориентирован в заданном направлении $\boldsymbol{s}_0$. При этом любое движение космический аппарата асимптотически приближается к состоянию покоя $\boldsymbol{\omega} = 0$, $(\boldsymbol{s}_0 \times \boldsymbol{r}_0) = 0$. Состояние покоя $\boldsymbol{\omega} = 0$, $\boldsymbol{s}_0 = \boldsymbol{r}_0$ равномерно асимптотически устойчиво по Ляпунову, а состояние покоя $\boldsymbol{\omega} = 0$, $\boldsymbol{s}_0 = -\boldsymbol{r}_0$ неустойчиво по Ляпунову.*

2. Задача о трехосной ориентации космического аппарата. Пусть заданы два ортогональных орта $\boldsymbol{s}_{01}$, $\boldsymbol{s}_{02}$, занимающих неизменное положение в системе координат $O\alpha\beta\gamma$, и пусть заданы два ортогональных орта $\boldsymbol{r}_{01}$, $\boldsymbol{r}_{02}$, неизменно связанных с системой координат $Oxyz$.

Рассмотрим задачу об ориентации космического аппарата, при которой орт $\boldsymbol{r}_{01}$ будет стабилизирован в направлении $\boldsymbol{s}_{01}$, а орт $\boldsymbol{r}_{02}$ в направлении $\boldsymbol{s}_{02}$. Положим $\boldsymbol{s}_{03} = \boldsymbol{s}_{01} \times \boldsymbol{s}_{02}$, $\boldsymbol{r}_{03} = \boldsymbol{r}_{01} \times \boldsymbol{r}_{02}$. Для составляющих векторов $\boldsymbol{s}_{0i}$ в системе координат $Oxyz$ имеем уравнения

$$\dot{\boldsymbol{s}}_{0i} = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{s}_{0i} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Покажем, что решения задачи можно достичь выбором управляющего момента в виде

$$\boldsymbol{M}_{упр} = -\boldsymbol{B}\boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i (\boldsymbol{r}_{0i} \times \boldsymbol{s}_{0i}), \quad \alpha_i > 0, \tag{6}$$

где $-\boldsymbol{B}\boldsymbol{\omega}$ – составляющая момента, линейная относительно $\boldsymbol{\omega}$, соответственно $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(t)$ – матрица 3×3.

Уравнения движения космического аппарата принимают вид

$$\boldsymbol{I}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \dot{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{H} = -\boldsymbol{B}\boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i (\boldsymbol{r}_{0i} \times \boldsymbol{s}_{0i}). \tag{7}$$

Система (7) имеет положения равновесия

$$\boldsymbol{\omega} = 0,\ \boldsymbol{s}_{01} = \pm\boldsymbol{r}_{01},\ \boldsymbol{s}_{02} = \pm\boldsymbol{r}_{02},\ \boldsymbol{s}_{03} = \boldsymbol{s}_{01} \times \boldsymbol{s}_{02},$$

и при этом других положений равновесия на множестве $\{\boldsymbol{\omega} = 0\}$ в системе (7) не будет. Возьмем функцию Ляпунова в виде

$$\boldsymbol{V} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i (\boldsymbol{r}_{0i} - \boldsymbol{s}_{0i})\right)^2.$$

Производная этой функции в силу системы (7) будет иметь следующий вид:

$$\dot{\boldsymbol{V}} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^T + \dot{\boldsymbol{I}})\boldsymbol{\omega}. \tag{8}$$

Вновь допустим, что управляющий момент создается таким образом, что имеет место оценка

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^T + \dot{\boldsymbol{I}})\boldsymbol{\omega} \geq b_0 \|\boldsymbol{\omega}\|^2, \qquad b_0 > 0,$$

тогда для (8) имеем

$$\dot{\boldsymbol{V}} \leq -b_0 \|\boldsymbol{\omega}\|^2 \leq 0.$$

Аналогично предыдущей задаче, получаем следующий результат.

РЕЗУЛЬТАТ 2. *При управлении* (6) *любое движение космического аппарата либо является состоянием покоя, либо стремится к такому состоянию, причем положение равновесия* $\boldsymbol{\omega} = 0$, $\boldsymbol{s}_{0i} = \boldsymbol{r}_{0i}$ $(i = 1, 2, 3)$ *равномерно асимптотически устойчиво по Ляпунову, а любое другое положение равновесия, отличное от этого, будет неустойчивым.*

3. Задача ориентации космического аппарата относительно вращающейся системы координат. Пусть система координат $O\alpha\beta\gamma$ вращается с угловой скоростью

$\boldsymbol{\omega}_0(t)$, относительно абсолютной системы координат $O_1\xi\eta\zeta$. Пусть заданы два орта $\boldsymbol{s}_0$ и $\boldsymbol{r}_0$, причем орт $\boldsymbol{s}_0$ занимает неизменное положение в системе $O\alpha\beta\gamma$, а орт $\boldsymbol{r}_0$ – в системе $Oxyz$.

Рассмотрим задачу об ориентации космического аппарата, при которой орт $\boldsymbol{r}_0$ направлен по оси $\boldsymbol{s}_0$. Уравнение вращательного движения космического аппарата под действием управляющего момента $\boldsymbol{M}_{ynp}$ можно записать также в виде:

$$\boldsymbol{I}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \dot{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{A}_1(t,\boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{M}_{ynp}, \tag{9}$$

где

$$\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{\omega}) = \begin{pmatrix} 0 & -G_z & G_y \\ G_z & 0 & -G_x \\ -G_y & G_x & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & I_{xz}\omega_x + I_{yz}\omega_y - I_z\omega_z & -I_{xy}\omega_x + I_y\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ -I_{xz}\omega_x - I_{yz}\omega_y + I_z\omega_z & 0 & -I_x\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ I_{xy}\omega_x - I_y\omega_y + I_{yz}\omega_z & I_x\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_1(t,\boldsymbol{\omega}) = \begin{pmatrix} -\omega_y H_z(t) + \omega_z H_y(t) \\ -\omega_z H_x(t) + \omega_x H_z(t) \\ -\omega_x H_y(t) + \omega_y H_x(t) \end{pmatrix}.$$

Если в начальный момент времени $t = 0$ орт $\boldsymbol{r}_0$ совпадает с ортом $\boldsymbol{s}_0$, то под действием момента

$$\boldsymbol{M}_y^0 = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}_0) - \boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{\omega}_0(t))\boldsymbol{\omega}_0(t) - \boldsymbol{A}_1(t,\boldsymbol{\omega}_0(t)) \tag{10}$$

орт $\boldsymbol{r}_0$ будет стабилизирован в направлении $\boldsymbol{s}_0$.

При наличии начальных отклонений или при действии возмущений требуется построить дополнительный управляющий момент $\boldsymbol{M}_{cm}$, который обеспечивал бы ориентацию орта $\boldsymbol{r}_0$ по отношению к $\boldsymbol{s}_0$. Обозначим

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0(t) + \boldsymbol{x}, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{x}$ – возмущение, $\boldsymbol{M}_{ynp} = \boldsymbol{M}_y^0 + \boldsymbol{M}_{cm}$. Подставляя (11) в (9), получим уравнение возмущенного движения :

$$\boldsymbol{I}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}_0(t)+\boldsymbol{x}) + \dot{\boldsymbol{I}}(\boldsymbol{\omega}_0(t)+\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{\omega}_0(t)+\boldsymbol{x})\left[\boldsymbol{\omega}_0(t)+\boldsymbol{x}\right] + \boldsymbol{A}_1(t,\boldsymbol{\omega}_0+\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{M}_y^0(t) + \boldsymbol{M}_{cm},$$

или

$$\boldsymbol{I}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x})\left(\boldsymbol{\omega}_0(t)+\boldsymbol{x}\right) + \boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{\omega}_0(t))\boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}_1(t,\boldsymbol{x}) - \dot{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{M}_{cm}. \tag{12}$$

К этим уравнениям добавим уравнения для $\boldsymbol{s}_0$

$$\dot{\boldsymbol{s}}_0 = -(\boldsymbol{\omega}_0(t) + \boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{s}_0.$$

Покажем, что поставленная задача решается, если стабилизирующий момент определим в виде

$$\boldsymbol{M}_{cm} = -\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{x} + \alpha(\boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{s}_0), \qquad \alpha > 0, \tag{13}$$

где $\boldsymbol{B}(t)$ – матрица, которая выбирается из условия

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega}_0(t)-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\dot{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{x}-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{B}^T(t))\boldsymbol{x}\le -c_0\|\boldsymbol{x}\|^2\le 0,\qquad c_0>0.$$

Возьмем функцию Ляпунова в виде

$$\boldsymbol{V}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}+\alpha(\boldsymbol{r}_0-\boldsymbol{s}_0)^2\right).$$

С учетом уравнения (12) найдем производную функции Ляпунова и ее оценку

$$\dot{\boldsymbol{V}}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega}_0(t)-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\dot{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{x}-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{B}^T(t))\boldsymbol{x}\le -C_0\|\boldsymbol{x}\|^2\le 0.$$

Используя метод предельных уравнений и предельных функций Ляпунова [3], аналогично предыдущим задачам получаем.

РЕЗУЛЬТАТ 3. *Пусть система $O\alpha\beta\gamma$ вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0(t)$ относительно абсолютной системы координат $O_1\xi\eta\zeta$. Тогда управляющий момент $\boldsymbol{M}_{ynp}=\boldsymbol{M}_y^0+\boldsymbol{M}_{cm}$, где $\boldsymbol{M}_y^0$ и $\boldsymbol{M}_{cm}$ определяются, соответственно, из (10) и (13), решает задачу об ориентации оси $\boldsymbol{r}_0$ в направлении орта $\boldsymbol{s}_0$.*

4. Задача об ориентации космического аппарата относительно вращающейся системы координат. Пусть теперь некоторый трехгранник $O\alpha\beta\gamma$ вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0(t)$ относительно абсолютной системы координат $O_1\xi\eta\zeta$. Рассмотрим задачу об ориентации космического аппарата относительно вращающейся системы координат $O\alpha\beta\gamma$.

Так же, как и в предыдущем случае, находим, что если в начальный момент времени $t=0$ трехгранник $Oxyz$ совпадает с $O\alpha\beta\gamma$, то под действием момента (10) космический аппарат будет ориентирован по отношению к вращающейся системе координат $O\alpha\beta\gamma$ ($Ox\parallel O\alpha$, $Oy\parallel O\beta$, $Oz\parallel O\gamma$).

При наличии начальных отклонений или при действии возмущений требуется построить дополнительный управляющий момент $\boldsymbol{M}_{cm}$, который обеспечивал бы ориентацию космического аппарата по отношению к $O\alpha\beta\gamma$.

Покажем, что поставленная задача решается, если стабилизирующий момент определим в виде

$$\boldsymbol{M}_{cm}=-\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{x}+\sum_{i=1}^{3}\alpha_i(\boldsymbol{r}_{0i}\times\boldsymbol{s}_{0i}),\qquad \alpha_i>0,\tag{14}$$

где $\boldsymbol{B}(t)$ – матрица, которая выбирается из условия:

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega}_0(t)-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\dot{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{x}-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{B}^T(t))\boldsymbol{x}\le -c_0\|\boldsymbol{x}\|^2\le 0,\qquad c_0>0.$$

Возьмем функцию Ляпунова в виде

$$\boldsymbol{V}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}+\sum_{i=1}^{3}\alpha_i(\boldsymbol{r}_{0i}-\boldsymbol{s}_{0i})^2\right)$$

Используя уравнение (12), найдем производную функции Ляпунова и ее оценку:

$$\dot{\boldsymbol{V}}=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega}_0(t)-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\dot{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{x}-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{B}^T(t))\boldsymbol{x}\le -C_0\|\boldsymbol{x}\|^2\le 0.$$

Используя метод предельных уравнений и предельных функций Ляпунова [3], аналогично предыдущим задачам получаем.

РЕЗУЛЬТАТ 4. *Пусть трехгранник $O\alpha\beta\gamma$ вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0(t)$ относительно абсолютной системы координат $O_1\xi\eta\zeta$. Тогда управляющий момент $\boldsymbol{M}_{\mathit{упр}} = \boldsymbol{M}_y^0 + \boldsymbol{M}_{\mathit{cm}}$, где $\boldsymbol{M}_y^0$ и $\boldsymbol{M}_{\mathit{cm}}$ определяются, соответственно, из (10) и (14), решает задачу об ориентации космического аппарата относительно $O\alpha\beta\gamma$.*

5. Задача о стабилизации заданного программного движения космического аппарата. Пусть $O_1\xi\eta\zeta$ – инерциальная система координат, $Oxyz$ – система координат, неизменно связанная с телом, точка O совпадает с центром масс тела, $O\alpha\beta\gamma$ – система координат, совершающая заданное движение относительно $O_1\xi\eta\zeta$. Пусть заданы два ортогональных орта $\boldsymbol{s}_{01}$ и $\boldsymbol{s}_{02}$, неизменных в системе координат $O\alpha\beta\gamma$, и два ортогональных орта $\boldsymbol{r}_{01}$ и $\boldsymbol{r}_{02}$, неизменных в системе $Oxyz$. Положим

$$\boldsymbol{s}_{03} = \boldsymbol{s}_{01} \times \boldsymbol{s}_{02}, \qquad \boldsymbol{r}_{03} = \boldsymbol{r}_{01} \times \boldsymbol{r}_{02}.$$

Уравнения движения твердого тела запишем в системе координат $Oxyz$:

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{F},$$

$$\boldsymbol{I}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}, \tag{15}$$

$$\frac{d\boldsymbol{s}_{0i}}{dt} = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{s}_{0i}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Здесь m – масса тела, $\boldsymbol{v}$ – вектор абсолютной скорости центра масс тела в проекциях на оси системы координат $Oxyz$, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор абсолютной угловой скорости тела в проекциях на те же оси, $\boldsymbol{I}$ – тензор инерции тела, $\boldsymbol{F}$ – суммарный вектор внешних сил, действующих на тело, $\boldsymbol{M}$ – момент внешних сил. Пусть

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_p(t), \qquad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_p(t), \qquad \boldsymbol{s}_{0i} \parallel \boldsymbol{r}_{0i}$$

– программное движение, которое обеспечивается управляющими силой $\boldsymbol{F_p}$ и моментом $\boldsymbol{M_p}$.

Рассмотрим задачу об определени стабилизирующих силы $\boldsymbol{F}_{\mathit{cm}} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}_p$ и момента $\boldsymbol{M}_{\mathit{cm}} = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{M}_p$, обеспечивающих асимптотическую устойчивость заданного програмного движения. Введем возмущения

$$\triangle\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_p(t), \qquad \triangle\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_p(t). \tag{16}$$

Подставляя (16) в (15), получим уравнения возмущенного движения

$$m\frac{d\triangle\boldsymbol{v}}{dt} + \triangle\boldsymbol{\omega} \times \triangle\boldsymbol{v} + \triangle\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_p(t) + \boldsymbol{\omega}_p(t) \times \triangle\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}_{\mathit{cm}},$$

$$\boldsymbol{I}\frac{d\triangle\boldsymbol{\omega}}{dt} + \triangle\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{I}\triangle\boldsymbol{\omega} + \triangle\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega}_p(t) + \boldsymbol{\omega}_p(t) \times \boldsymbol{I}\triangle\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}_{\mathit{cm}},$$

$$\dot{\boldsymbol{s}}_{0i} = -(\triangle\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_p(t)) \times \boldsymbol{s}_{0i}.$$

Покажем, что поставленная задача решается, если $\boldsymbol{F}_{cm}$ и $\boldsymbol{M}_{cm}$ заданы в виде

$$\boldsymbol{F}_{cm} = -\boldsymbol{D}\triangle\boldsymbol{v},$$

$$\boldsymbol{M}_{cm} = -\boldsymbol{B}\triangle\boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^{3}\alpha_i(\boldsymbol{r}_{0i}\times\boldsymbol{s}_{0i}), \qquad \alpha_i = \text{const} > 0, \qquad (i = 1,2,3), \tag{17}$$

где $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{D}$ – матрицы 3×3. Для функции Ляпунова

$$\boldsymbol{V} = \frac{1}{2}[\triangle\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{I}\triangle\boldsymbol{\omega} + m\triangle\boldsymbol{v}\triangle\boldsymbol{v} + \sum_{i=1}^{3}\alpha_i(\boldsymbol{r_{0i}} - \boldsymbol{s_{0i}})^2]$$

найдем производную

$$\dot{\boldsymbol{V}} = -\triangle\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{B}\triangle\boldsymbol{\omega} - \triangle\boldsymbol{v}\boldsymbol{D}\triangle\boldsymbol{v} - \triangle\boldsymbol{v}(\triangle\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v_p}).$$

Допустим, что управляющие матрицы $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{D}$ выбраны таким образом, что

$$\dot{\boldsymbol{V}} \le -c_0[(\triangle\boldsymbol{\omega})^2 + (\triangle\boldsymbol{V})^2] \le 0, \qquad c_0 = \text{const} > 0.$$

Аналогично предыдущим выводам, получаем следующий результат.

РЕЗУЛЬТАТ 5. *Пусть задано програмное движение тела: система $O\alpha\beta\gamma$ движется относительно $O_1\xi\eta\zeta$ по закону $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_p(t)$, $\quad\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_p(t)$, $\quad\boldsymbol{s}_{0i} \parallel \boldsymbol{r}_{0i}$. Тогда управление (17) обеспечивает решение задачи.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 05-01-00765) и в рамках программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (НШ-6667.2006.1)

1. *Раушенбах В.В., Токарь В.И.* Управление ориентацией космических аппаратов. – М.: Наука, 1974. – 598 с.
2. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990. – 414 с.
3. *Андреев А.С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // Прикл. математика и механика. – 1984. – **48**, вып. 2. – С. 225–232.
4. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 495 с.

Ульяновский гос. ун-т, Россия
mtu@sv.ulsu.ru

Получено 22.09.06