

УДК 534.015.1, 534.83

©2008. А.Е. Позднякович, В.Е. Пузырев

О СКОРОСТИ ЗАТУХАНИЯ КОЛЕБАНИЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Рассмотрена линейная неконсервативная механическая система с двумя степенями свободы, возмущенные движения которой представляют собой затухающие колебания. Траектории такой системы имеют некоторые свойства, отсутствующие у одностепенной системы, в частности, временные интервалы затухания решения могут чередоваться с интервалами его эволюции. Исследован вопрос об оценке величины этого “проблемного” промежутка времени и пределах возможного возрастания решения.

1. Постановка задачи. Некоторые вспомогательные предложения. Рассмотрим систему двух связанных осцилляторов, уравнения движения которой определяются линейным действительным дифференциальным оператором

$$\mathbf{d} = \mathbf{A} \frac{d^2}{dt^2} + \mathbf{B} \frac{d}{dt} + \mathbf{C}, \quad (1)$$

где $\mathbf{A} = \|a_{jn}\|$, $\mathbf{B} = \|b_{jn}\|$, $\mathbf{C} = \|c_{jn}\|$ ($j, k = 1, 2$), причем матрицы \mathbf{A} , \mathbf{C} – положительны, а \mathbf{B} – неотрицательна. Подобная система является

простейшей моделью колебательной системы с демпферами пассивного типа [1 – 8].

Приведем некоторые сведения и термины из теории линейных колебаний [10]. С этой целью запишем скалярное уравнение

$$a_0 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + b_0 \frac{dx_1}{dt} + c_0 x_1 = 0, \quad (2)$$

коэффициенты которого постоянны и положительны. Положим

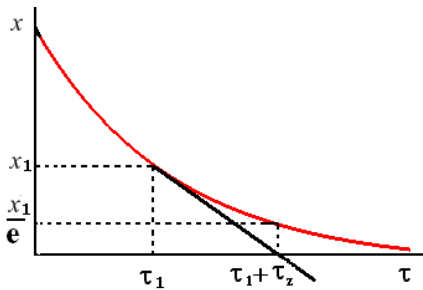
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_0}{a_0}}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad D = \frac{b_0}{2\sqrt{a_0 c_0}}.$$

Рис. 1. Затухающее колебание осциллятора.

Если $D < 1$, то характеристические показатели уравнения (2) комплексно-сопряженные, а возмущенное движение представляет собой затухающие гармонические колебания (рис. 1). Величины ω_0 , τ и D называют, соответственно, *круговой частотой* недемпфированного колебания, *собственным временем* и *безразмерным коэффициентом демпфирования* осциллятора (или уравнения (2)). Частота демпфированного колебания равна модулю мнимой части собственных значений уравнения (2) и меньше круговой частоты, их отношение равно $\sqrt{1 - D^2}$. Наряду с безразмерным коэффициентом демпфирования рассматривают величину, обратную ему – постоянную времени τ_z ,

которая имеет простой геометрический смысл: если провести касательную к произвольной точке огибающей семейства возмущенных решений, то абсцисса точки пересечения касательной с осью $O\tau$ равняется сумме абсциссы точки касания и постоянной τ_z (рис. 2). Численное значение амплитуды колебаний за это время уменьшается в e раз.

Таким образом, закон изменения обобщенной координаты x полностью определяется знанием двух величин: параметра D (или постоянной времени τ_z) и частоты (или периода) колебания. Иногда вместо постоянной времени рассматривают другую меру уменьшения амплитуды. Если брать ее последовательные значения в точках максимума (минимума), то отношение x_{n+1}/x_n есть величина постоянная. Логарифм этого отношения, взятый с обратным знаком, называют логарифмическим декрементом затухания θ . Он связан с безразмерным коэффициентом демпфирования формулой



$$\theta = \frac{2\pi D}{\sqrt{1 - D^2}}. \quad (3)$$

Последнюю можно использовать для нахождения D по известным результатам измерений амплитуд. Величина θ представляет собой тангенс угла наклона логарифмической кривой амплитуды к оси абсцисс.

Рис. 2. Геометрический смысл постоянной времени.

Если же речь идет о поведении конкретной возмущенной траектории, то следует также принимать во внимание постоянный множитель – константу интегрирования, который зависит

от начальных значений и определяется следующим образом

$$c = \sqrt{x_0^2 + \frac{(x'_0 + Dx_0)^2}{1 - D^2}}, \quad (4)$$

штрихом обозначено дифференцирование по собственному времени τ .

Отметим также, что в случае, когда двухстепенная система совершает незатухающее колебание, которое можно рассматривать как наложение двух колебаний с амплитудами A_1, A_2 и частотами ω_1, ω_2 , то амплитуду движения A^* можно записать так

$$A^* = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos 2\omega_d t}, \quad \omega_d = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2). \quad (5)$$

Если частоты ω_1, ω_2 есть величины одного порядка, т. е. отношение их разности к их сумме мало, то колебательный процесс удобно рассматривать как гармоническое колебание со "средней" частотой $\omega_m = (\omega_1 + \omega_2)/2$, амплитуда которого медленно меняется во времени с частотой $2\omega_d$ (рис. 3).

Величина амплитуды меняется периодическим образом в пределах

$$|A_1 - A_2| \leq A^* \leq A_1 + A_2. \quad (6)$$

Колебания, показанные пунктиром на рис. 3, называют *биениями* [1]. Движение системы при этом можно рассматривать как *амплитудно-модулированные* колебания с несущей частотой ω_m , поскольку основные колебания модулируются по амплитуде с частотой модуляции $2\omega_d$.

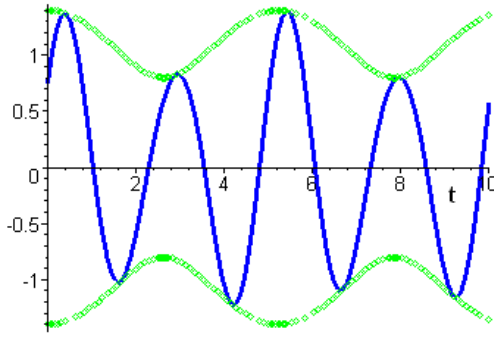


Рис. 3. Свободное двухчастотное колебание.

2. Случай двухчастотного затухающего движения. Псевдозатухание колебаний.

Поскольку в приложениях более распространенной является ситуация, при которой спектр оператора \mathbf{d} находится в левой половине комплексной плоскости, то в настоящей работе ограничимся рассмотрением случая, когда собственные значения \mathbf{d} суть $-\sigma_1 \pm i\omega_1$, $-\sigma_2 \pm i\omega_2$. Не ограничивая общности, можно считать, что

$$\sigma_1 \leq \sigma_2. \quad (7)$$

В этом случае движение системы, определяемой уравнением (1), представляет собой наложение двух простых (затухающих) колебаний с частотами ω_1 и ω_2 соответственно. Характеристическое уравнение можно записать как

$$\lambda^4 + 2(\sigma_1 + \sigma_2)\lambda^3 + [(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + \omega_1^2 + \omega_2^2]\lambda^2 + 2[(\sigma_1\sigma_2(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\omega_2^2 + \sigma_2\omega_1^2)]\lambda + (\sigma_1^2 + \omega_1^2)(\sigma_2^2 + \omega_2^2) = 0, \quad (8)$$

а общее решение – в виде

$$x(t) = e^{-\sigma_1 t}(c_1 \cos \omega_1 t + c_2 \sin \omega_1 t) + e^{-\sigma_2 t}(c_3 \cos \omega_2 t + c_4 \sin \omega_2 t), \quad (9)$$

где c_j ($j = \overline{1,4}$) представляют собой постоянные интегрирования, линейно зависящие от начальных значений обобщенных координат и их скоростей.

Если неравенство (7) выполняется строго, то характеристическое число Ляпунова для общего решения совпадает с безразмерным коэффициентом демпфирования первого колебания. Движение, которое соответствует решению (9), будем рассматривать как амплитудно-модулированное (затухающее) колебание с несущей частотой ω_1 и амплитудой

$$\text{Amp}(t) = e^{-\sigma_1 t} \{c_1^2 + c_2^2 + 2[(c_1 c_3 + c_2 c_4) \cos \omega_d t + (c_1 c_4 - c_2 c_3) \sin \omega_d t] e^{-\sigma_d t} + (c_3^2 + c_4^2) e^{-2\sigma_d t}\}^{1/2}, \quad \omega_d = \omega_1 - \omega_2, \quad \sigma_d = \sigma_2 - \sigma_1. \quad (10)$$

Введем безразмерное время и параметры по формулам

$$\tau = \omega_1 t, \quad s_j = \frac{\sigma_j}{\omega_1} \quad (j = 1; 2), \quad \delta = \frac{2\omega_d}{\omega_1}, \quad s_d = \frac{\sigma_d}{\omega_1} \quad (11)$$

и обозначим функцию $\text{Amp}^2(\tau/\omega_1)$ через $F(\tau)$. Последняя экспоненциально убывает при $\tau \rightarrow \infty$, и скорость этого убывания определяется величиной s_1 – в случае одной степени свободы ей соответствует безразмерный коэффициент демпфирования. Вместе с тем, функция $F(\tau)$ зависит от произвольных постоянных c_j ($j = \overline{1,4}$) и, при определенных соотношениях между ними, может принимать сколь угодно близкие к нулю значения в моменты времени, существенно меньшие постоянной τ_z . Если график зависимости получен эмпирическим путем – в результате визуального наблюдения или с помощью регистрирующей аппаратуры, а собственные значения системы неизвестны, то

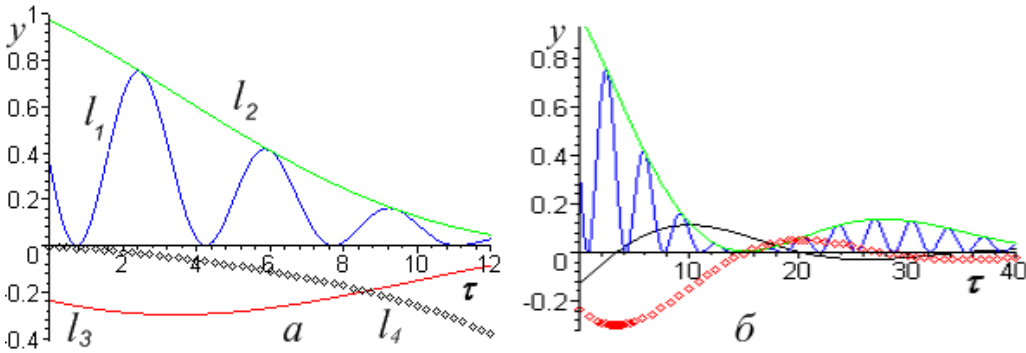


Рис. 4. Ложное затухание колебаний в случае различных собственных значений.

можно прийти к ошибочному выводу в оценке скорости затухания колебаний. Так, на рис. 4, а изображена часть интегральной кривой $l_1 : y = x^2(\tau)$ и ее огибающая – график функции $l_2 : y = F(\tau)$. На первый взгляд, имеет место “вполне правдоподобное” экспоненциальное затухание возмущенного колебания в десять раз за ≈ 12 безразмерных τ -секунд. Однако, если внимательно изучить поведение кривой (или построить график на большем промежутке времени, см. рис. 4, б), то придем к выводу, что это затухание является ложным. С этой целью достаточно: а) попытаться вычислить логарифмический декремент затухания для $x^2(\tau)$ и убедиться, что такового не существует; б) численно построить кривую $y = dF/d\tau$ или $y = \ln F(\tau)$ (кривые l_3 и l_4 , соответственно, на рис. 4, а). В любом из этих случаев станет ясно, что функция, соответствующая кривой l_2 , не является экспонентой. Для того, чтобы прояснить вопрос о “лжезатухании”, перепишем выражение для $F(\tau)$ следующим образом:

$$F(\tau) = e^{-2s_1\tau} [r_1^2 + 2r_1r_2 \sin(\delta\tau + \delta_0)e^{-s_d\tau} + r_2^2e^{-2s_d\tau}], \quad (12)$$

где

$$r_1 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad r_2 = \sqrt{c_3^2 + c_4^2}, \quad \delta_0 = \arcsin \frac{c_1c_3 + c_2c_4}{r_1r_2}.$$

Нетрудно заметить, что для $\text{Amp}(t)$ справедливо двойное неравенство типа (б), где A_1, A_2 представляют собой амплитуды главных колебаний системы

(1). Кроме того, записывая выражение в квадратных скобках в правой части (12) как

$$[r_1 \sin(\delta\tau + \delta_0) + r_2 e^{-s_d\tau}]^2 + r_1^2 \cos^2(\delta\tau + \delta_0),$$

видим, что оно может обратиться в нуль тогда и только тогда, когда одновременно выполняются два равенства

$$\sin(\delta\tau + \delta_0) = -1, \quad e^{-s_d\tau} = \frac{r_1}{r_2}, \quad r_2 \neq 0. \quad (13)$$

Очевидно, что при $r_2 = 0$ возмущенные траектории определяются первым главным колебанием и ведут себя, как в случае уравнения (1), т. е. ситуация псевдозатухания исключается. Легко также видеть, что поскольку $s_d > 0$, то для того, чтобы второе из равенств (13) имело место необходимо выполнение условия $r_1 < r_2$. Тогда $\tau_* = (\ln r_2 - \ln r_1)/s_d$. Последнее выражение не ограничено и принимает как угодно большие значения, если величина s_d или r_1/r_2 близка к нулю.

Запишем решение задачи Коши для системы (1). Обозначим начальное значение фазового вектора через $\mathbf{u}^* = (u_1, u_2, u_3, u_4) = (x_1^0, \dot{x}_1^0, x_2^0, \dot{x}_2^0)$ (здесь и далее верхний индекс "*" означает транспонирование), а через $\mathbf{f}(t) = (f_1, f_2, f_3, f_4)^*$ и $\mathbf{D}(t)$ соответственно – вектор независимых частных решений и матрицу линейного преобразования, соответствующего операции дифференцирования по времени, т. е. $d\mathbf{f}/dt = \mathbf{D}\mathbf{f}$. В случае, когда корни уравнения (8) различны, имеем

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} e^{-\sigma_1 t} \cos \omega_1 t \\ e^{-\sigma_1 t} \sin \omega_1 t \\ e^{-\sigma_2 t} \cos \omega_2 t \\ e^{-\sigma_2 t} \sin \omega_2 t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -\sigma_1 & -\omega_1 & 0 & 0 \\ \omega_1 & -\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_2 & -\omega_2 \\ 0 & 0 & \omega_2 & -\sigma_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда решение для вектора обобщенных координат запишется $\mathbf{x} = (\mathbf{c}, \tilde{\mathbf{c}})^* \mathbf{f}(t)$, причем $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{c}$, $\mathbf{\Lambda} = -(a_{12}\mathbf{D}^2 + b_{12}\mathbf{D} + c_{12}\mathbf{E})^{-1}(a_{11}\mathbf{D}^2 + b_{11}\mathbf{D} + c_{11}\mathbf{E})\mathbf{c}$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4)^*$, \mathbf{E} – единичная матрица. Подставляя начальные значения времени и фазового вектора, имеем систему $\mathbf{P}\mathbf{c} = \mathbf{u}$, где \mathbf{P} – квадратная матрица, строки которой соответственно равны: \mathbf{f}_0^* , $\mathbf{f}_0^*\mathbf{D}$, $\mathbf{f}_0^*\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{f}_0^*\mathbf{D}\mathbf{\Lambda}$. Окончательно получаем

$$\mathbf{c} = \mathbf{M}^*\mathbf{u}, \quad \mathbf{M}^* = \mathbf{P}^{-1}, \quad x_1 = \mathbf{f}^*(t)\mathbf{M}^*\mathbf{u} = \mathbf{u}^*\mathbf{M}\mathbf{f}(t). \quad (14)$$

Остановимся теперь на случае кратных собственных значений оператора \mathbf{d} ($\sigma_2 = \sigma_1 = \sigma$, $\omega_2 = \omega_1 = \omega$). Тогда

$$\mathbf{f}(t) = e^{-\sigma t} \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ t \cos \omega t \\ t \sin \omega t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -\sigma & -\omega & 0 & 0 \\ \omega & -\sigma & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\sigma & -\omega \\ 0 & 1 & \omega & -\sigma \end{pmatrix}.$$

Пусть $x(t)$ – одна из возмущенных траекторий, квадрат амплитуды которой запишем как

$$F(t) = [(c_3^2 + c_4^2)t^2 + 2(c_1c_3 + c_2c_4)t + c_1^2 + c_2^2]e^{-2\sigma t}, \quad (15)$$

где c_j ($j = \overline{1,4}$), как и выше, означают произвольные постоянные. Рассмотрим вопрос об эволюции функции $F(t)$, иначе говоря – о ее поведении на интервале $[t_0, t_*$], где t_* – момент времени, начиная с которого амплитуда колебания монотонно убывает. Для этого найдем производную $F(t)$ по времени. Обозначим

$$r_1 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad r_2 = \sqrt{c_3^2 + c_4^2}, \quad q = \frac{c_1c_3 + c_2c_4}{r_1r_2} \quad (|q| \leq 1),$$

тогда выражение в квадратных скобках формулы (15) перепишется как

$$(r_2)^2 t^2 + 2qr_1r_2 t + (r_1)^2,$$

а

$$\frac{dF}{dt} = -2P(t)e^{-2\sigma t}, \quad P(t) = \sigma r_2^2 t^2 - r_2(r_2 - 2\sigma q r_1) t + r_1(\sigma r_1 - q r_2). \quad (16)$$

Как следует из (16), если $r_2 - 2\sigma q r_1 \leq 0$, $\sigma r_1 - q r_2 > 0$, или $\text{dis} = (r_2)^2 - (r_1)^2(1 - q^2) < 0$, то $P(t) > 0$, $dF/dt < 0$, и амплитуда колебания строго убывает с течением времени, т. е. эволюция отсутствует ($t_* = t_0$). В противном случае многочлен $P(t)$ имеет положительные корни – один, если $\sigma r_1 - q r_2 \leq 0$ и два, если $\sigma r_1 - q r_2 > 0$. Конец интервала эволюции амплитуды определяется при этом бóльшим из этих корней

$$t_* = \frac{1}{2\sigma r_2}(r_2 - 2\sigma q r_1 + \sqrt{\text{dis}}). \quad (17)$$

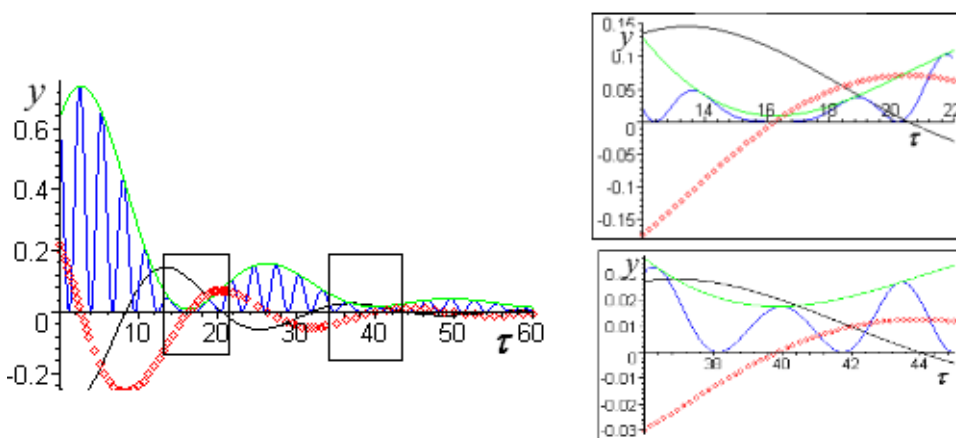


Рис. 5. Биения амплитудной характеристики затухающих колебаний.

Если $\sigma r_1 - qr_2 > 0$, то меньший корень

$$t_{\min} = \frac{1}{2\sigma r_2}(r_2 - 2\sigma q r_1 - \sqrt{\text{dis}}) \quad (18)$$

определяет величину интервала псевдозатухания, который в случае кратных комплексных корней является единственным, в отличие от случая различных корней (рис. 5). Напомним, что константы r_1, r_2 определяются начальным положением фазового вектора \mathbf{u}^0 , которое имеет, вообще говоря, случайный характер. Поэтому каждая из них (констант) может принимать как угодно близкие к нулю значения. Как можно видеть из формул (17) и (18), t_* , t_{\min} могут принимать как угодно большие значения, значит, не только интервал эволюции, но даже интервал псевдозатухания могут оказаться "весьма протяженными".

3. Примеры. Выводы. В качестве иллюстрации к вышесказанному рассмотрим два примера.

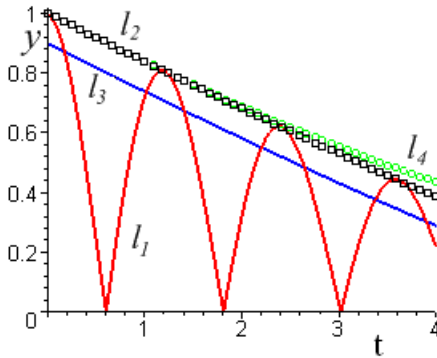


Рис. 6. Часть траектории, полученная эмпирически.

Пример 1. Пусть имеется полученный опытным путем фрагмент интегральной кривой $y = x(t)$ (рис. 6). По техническим соображениям на рис. 6 представлена кривая $l_1 : y = |x(t)|$; l_2 — ее огибающая. Известно, что собственные значения — кратные, но неизвестны их конкретные значения. Требуется найти эти значения и составить прогноз дальнейшего поведения амплитуды траектории l_2 , в частности, выявить возможность ее псевдозатухания и оценить величину промежутка эволюции.

Воспользуемся представлением (15). Не нарушая общности, можно считать, что в начальный момент времени траектория находится в точке максимума, а масштаб выбрать так чтобы $r_1 = 1$. Применяя численные методы, например, метод наименьших квадратов, найдем коэффициенты q, r_2, σ . Получается система трех уравнений, которая сводится к уравнению

$$\sigma^3 - 0,495 \sigma^2 + 0,049 \sigma - 0,000645 = 0$$

с корнями $\sigma_1 \approx 0,0155$; $\sigma_2 \approx 0,114$; $\sigma_3 \approx 0,366$. Значение σ_2 не подходит, поскольку соответствующая кривая имеет интервал отрицательных значений, начиная с $t \approx 6$. Две другие кривые

$$l_3 : y = \sqrt{0,023t^2 - 0,30t + 1} e^{-0,0155t}, \quad l_4 : y = \sqrt{0,059t^2 + 0,40t + 1} e^{-0,366t}$$

изображены на рис. 6, причем l_3 для удобства смещена на 0,1 вниз по оси ординат. Кривая l_4 не имеет промежутка эволюции и достаточно быстро

затухает; l_3 – напротив, имеет, и, согласно формулам (17), (18), вычисляем $t_{\min} \approx 6,54$; $t_* \approx 71,0$. На рис. 7, а представлены полученные результаты. Таким образом, если при $t \in [6, 5; 7]$ амплитуда истинной кривой $x(t)$ начнет возрастать, то в качестве прогноза нужно брать l_3 (см. рис. 6), в противном случае – l_4 .

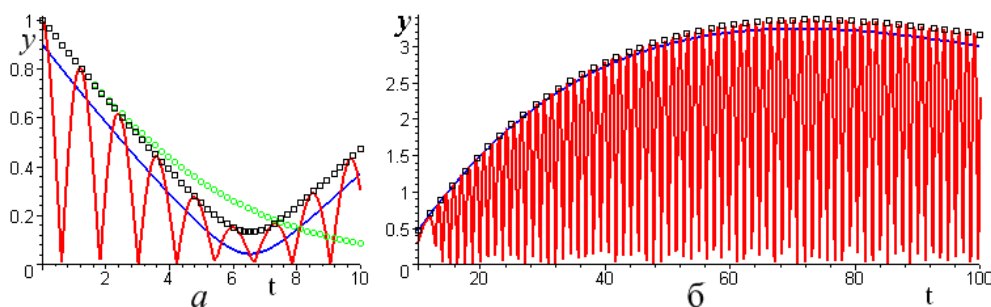


Рис. 7. Прогноз поведения решения по известной части траектории.

Если же параметры системы частично или полностью известны, то для оценки возможности эволюции интегральных кривых уравнения (1) можно воспользоваться равномерной по начальным значениям фазовых переменных оценкой функции $F(t)$. В качестве такой оценки можно взять норму матрицы $Mf(t)$.

Пример 2. В работе [7] рассматривался вопрос об оптимизации скорости затухания возмущенных колебаний пассивно стабилизированного маятника. Было показано, что максимальное значение характеристического числа возмущенных решений будет достигаться в случае кратных собственных значений, что соответствует определенным (оптимальным) значениям стабилизирующего устройства – жесткости и коэффициенту демпфирования. Соответствующая λ -матрица для уравнения (1) такова

$$D(\lambda) = \begin{pmatrix} (1 + \alpha^2)(\lambda^2 + \beta^2) & \alpha(\lambda^2 - 1) \\ \alpha(\lambda^2 - 1) & \lambda^2 + h\lambda + \kappa \end{pmatrix}, \quad \kappa = \frac{\alpha^2 + \beta^4}{\beta^2(1 + \alpha^2)}, \quad h = \frac{2\alpha(1 + \beta^2)}{\beta(1 + \alpha^2)}.$$

Матрица M имеет при этом вид

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix},$$

где

$$m_{21} = \alpha^3 (\beta^2 - 1)(\beta^2 + 1)^2 \mu^{-3/2}, \quad m_{22} = 4\beta^3 [2\beta^2 - \alpha^2(\beta^2 + 1)] \mu^{-1/2}, \\ m_{23} = -\frac{2\alpha^2}{1 + \alpha^2} (\beta^2 + 1) [\beta^2(\beta^2 - 3) + \alpha^2(\beta^2 + 1)] \mu^{-3/2},$$

$$m_{24} = -\frac{4\alpha(1-\alpha^2)}{1+\alpha^2} \beta^3 (\beta^2+1)\mu^{-3/2}, \quad m_{31} = \alpha\beta(\beta^2+1)[2\beta^2 - \alpha^2(\beta^2-1)]\mu^{-1},$$

$$m_{32} = \alpha^2(\beta^4-1)\mu^{-1}, \quad m_{33} = \frac{\alpha^2(\beta^2+1)}{\beta(1+\alpha^2)} [\beta^2(\beta^2-3) + \alpha^2(\beta^2+1)]\mu^{-1},$$

$$m_{34} = -\frac{2(1-\alpha^2)}{1+\alpha^2} \alpha\beta^2(\beta^2+1)\mu^{-1}, \quad m_{41} = -\alpha^2\beta(\beta^2+1)\mu^{-1}, \quad m_{42} = -\alpha(\beta^2+1)\mu^{-1},$$

$$m_{43} = \frac{\alpha\beta(\beta^2+1)}{(1+\alpha^2)\mu}, \quad m_{44} = \frac{2\alpha^2(\beta^2+1)}{(1+\alpha^2)\mu}, \quad \mu = 4\beta^4 - \alpha^2(\beta^2+1)^2.$$

Аналитический анализ полного выражения для нормы матрицы \mathbf{Mf} достаточно трудоемкий (даже с использованием системы аналитических вычислений), однако, принимая естественное предположение о малости присоединенной массы по сравнению с основной, можно считать α малым параметром и воспользоваться соответствующим асимптотическим представлением.

$$F = [k_1(t_2) + \sqrt{k_1^2(t_2) - k_0(t_2)}]e^{-2t_2}, \quad k_1 = \frac{1}{2\beta^4}[(\beta^4 + \beta^2 + 1)t_2^2 - 2\beta t_2 + \beta^2],$$

$$k_0 = \frac{1}{\beta^4}(\beta^2 + 1)t_2^4 - 2\beta t_2^3 + (2\beta^2 + 1)t_2^2 - 2\beta t_2 + \beta^2, \quad t_2 = \frac{\alpha(\beta^2 + 1)}{2\beta} t. \quad (19)$$

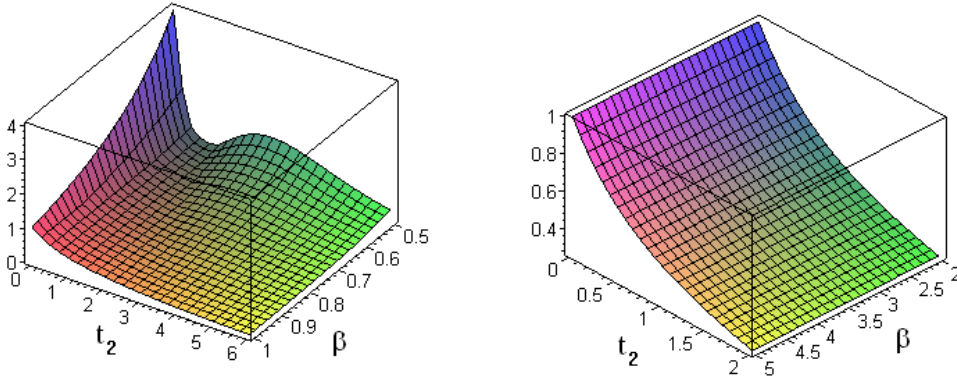


Рис. 8. Зависимость равномерной амплитудной характеристики от натуральной частоты основной системы.

Выражение для функции F , допускает относительно несложное аналитическое исследование. Нулями ее производной являются корни уравнения восьмой степени относительно t_2 . Можно показать, что оно имеет не более двух положительных корней, а при $\beta \gg 1$ — не имеет вещественных положительных корней. Поверхность (19) представлена на рис. 8.

Следует обратить внимание на следующее обстоятельство. Хотя эта поверхность в широком диапазоне частот (от 1 Гц и выше) ведет себя вполне гладко, но она является огибающей семейства интегральных кривых и характеризует точную верхнюю грань отношения амплитуды колебания одной из фазовых переменных – $x_1^2(t, \mathbf{u}^0)$ в примере 2 – к норме начального возмущения движения (значению полной энергии системы). Это не означает, что отсутствуют траектории с эволюционным поведением. Так, на рис. 9 указаны

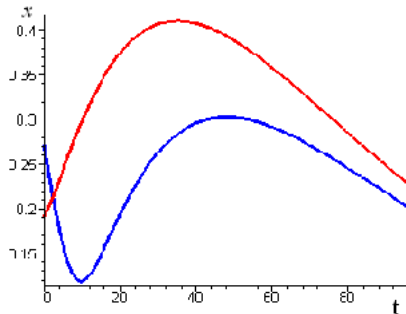


Рис. 9. Эволюция амплитуды колебаний в случае кратных собственных значений.

две амплитуды переменной $x_1(t, \mathbf{u}^0)$: унимодальная кривая $Amp_1(t)$, $\mathbf{u}_1^0 = (0, 1; -0, 3; 0, 1; 1)^*$ и бимодальная – $Amp_2(t)$, $\mathbf{u}_2^0 = (-0, 2; 0, 4; 0, 2; 1)^*$. Из сказанного следует, что при исследовании вопросов оптимизации демпфирования, в частности, в задачах пассивной стабилизации, следует учитывать возможность временного "раскачивания" системы, причем не обязательно сразу после получения возмущения.

1. Сарычев В.А., Сазонов В.В. Оптимальные параметры пассивных систем ориентации спутников // Космич. исслед. – 1976. – 14, №2. – С.198-208.
2. Sesak J.R., Gronet M.J., Marinos G.M. Passive Stabilization for Large Space Systems // NASA Contractor Report 4067. – April 1987. – 138 p.
3. Мирер С.А., Сарычев В.А. Оптимальные параметры спутника, стабилизируемого вращением, с демпфером маятникового типа // Космич. исслед. – 1997. – 39, № 6. – С. 651-658.
4. Peiffer K., Savchenko A.Ya. On the some asymptotic behavior of a passively stabilized system with one critical variable // Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli. – 2000 – LXVII. – P. 157-168.
5. Truhar N. An efficient algorithm for damper optimization for linear vibrating systems using Lyapunov equation // J. of Comp. and Appl. Math. – 2004. – 172, № 1. – P. 169-182.
6. Савченко А.Я., Кравченко В.В. О скорости затухания малых колебаний физического маятника в окрестности положения его равновесия в режиме пассивной стабилизации // Механика твердого тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 106-111.
7. Савченко А.Я., Позднякович А.Е., Пузырев В.Е. Пассивная стабилизация положения равновесия двухзвенного маятника с упругими связями // Там же. – 2006. – Вып. 36. – С. 104-113.
8. Мирер С.А., Прилепский И.В. Оптимальные параметры гравитационной системы спутник-стабилизатор.– М., 2008. – 28 с. (Препринт / РАН Ин-т прикл. математики).
9. Aydin E., Boduroglu M.H., Guney D. Optimal damper distribution for seismic rehabilitation of planar building structures // Eng. Struct. – 2007. – 29, № 2. – P. 176-185.
10. Магнус К. Колебания: Введение в исследование колебательных систем. – М.: Мир, 1982. – 304 с.
11. Osinski Z. Damping of Vibrations. – Rotterdam: aa Balkema, 1998. – 562 p.