НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

И.В. СКРЫПНИК

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

СЕРИЯ
«ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ: МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА, КИБЕРНЕТИКА»
Т. 1

КИЕВ
НАУКОВА ДУМКА
2008

УДК 517.9

Первый том серии «Задачи и методы: математика, механика, кибернетика» составляют избранные работы И.В Скрыпника, в которых изложены его основные результаты в изучении следующих вопросов: A-гармонические формы на римановом пространстве, регулярность решений квазилинейных эллиптических уравнений высшего порядка, топологические методы исследования разрешимости нелинейных уравнений, квазилинейные уравнения высшего порядка с усиленной эллиптичностью, регулярность граничной точки для квазилинейных уравнений, поточечные оценки решений модельных нелинейных задач и усреднение нелинейных задач Дирихле в областях сложной структуры.

Для научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в области теории дифференциальных уравнений в частных производных и нелинейного анализа.

Перший том серії “Задачі і методи: математика, механіка, кібернетика” складають вибрані твори І.В. Скрипника, в яких викладено його основні результати у вивченні слідуючих питань: A-гармонічні форми на рімановому просторі, регулярність розв’язків квазілінійних еліптичних рівнянь вищого порядку, топологічні методи дослідження розв’язності нелінійних рівнянь, квазілінійні рівняння вищого порядку з підсиленою еліптичністю, регулярність межевої точки для квазілінійних рівнянь, поточкові оцінки розв’язків модельних нелінійних задач і усереднення нелінійних задач Діріхле в областях складної структури.

Для наукових працівників, аспірантів і студентів, що спеціалізуються у галузі теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними і нелінійного аналізу.

Ответственный редактор 1-го тома – А.А. Ковалевский

Утверждено к печати ученым советом
Института прикладной математики и механики НАН Украины

Этим томом открывается серия монографий «Задачи и методы: математика, механика, кибернетика», которые готовятся к изданию учеными Института прикладной математики и механики НАН Украины. Инициатором серии обобщающих монографий, охватывающих основные достижения ведущих специалистов Института в ряде важных направлений математики, механики и кибернетики, был выдающийся ученый, академик НАН Украины, в 1977–2005 гг. директор Института, И.В. Скрыпник. Внезапная кончина Игоря Владимировича 2 февраля 2005 г. не позволила ему начать реализацию этого проекта. Но идея издания серии не забылась, была поддержана в Институте и уже начинает воплощаться в жизнь.

Монографии серии, относящиеся к области математики, будут посвящены исследованию сингулярных решений нелинейных эллиптических и параболических уравнений, задачам со свободной границей, вопросам гармонического анализа, теории аппроксимации, геометрической и топологической теории отображений, а также предельным теоремам для решений стохастических уравнений.

В монографиях по механике будут рассмотрены классические задачи динамики твердого тела, изучены движения гиростата и динамика систем связанных твердых тел, исследованы устойчивость и стабилизация динамических систем, прямые и обратные задачи управления и пространственные задачи механики горных пород.

Наконец, в монографиях, относящихся к области кибернетики, будут представлены исследования, связанные с математическим моделированием, идентификацией и управлением технологическими процессами, рассмотрены дискретные и эволюционные методы в теории конечных систем, а также динамические системы и их приложения в обработке информации.

Начинается серия томом избранных трудов И.В. Скрыпника. Осуществление этого издания и открытие им данной серии – это не просто дань памяти автора идеи серии, ученого и руководителя, возглавлявшего Институт в течение долгого времени. Игорь Владимирович был ученым с большой буквы, обогатившим математику многими фундаментальными результатами. Несмотря на отнимавшую много сил и времени административную и организаторскую деятельность, он очень плодотворно и на высоком уровне работал сам и своим примером и поддержкой стимулировал работу коллег и учеников. Он возглавлял свою, хорошо известную в мире, школу по нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных и заботился о развитии других научных школ в Институте. Выдающиеся научные достижения И.В. Скрыпника приходятся на годы его работы в Институте прикладной математики и механики и составляют гордость Института. Многие из основных результатов ученого содержатся в работах, включенных в том его избранных трудов, который предлагается Вашему вниманию.

Игорь Владимирович Скрыпник

И.В. Скрыпник родился 13 ноября 1940 г. в г. Жмеринке Винницкой области. Там же прошло его детство. После окончания средней школы он поступил во Львовский государственный университет им. И. Франко. В 1957–1962 гг. он – студент, а в 1962–1965 гг. – аспирант механико-математического факультета этого университета. Его учителем и научным руководителем был выдающийся математик Я.Б. Лопатинский. Общение с Лопатинским сыграло важную роль в формировании математических интересов И.В. Скрыпника и его становлении как ученого. В 1965 г. Игорь Владимирович защитил кандидатскую диссертацию «A-гармонические формы на римановых пространствах». В 1965–1967 гг. он работал ассистентом, старшим преподавателем и доцентом во Львовском университете.

Дальнейшая научная и педагогическая деятельность И.В. Скрыпника была тесно связана с учреждениями Донецка, куда он переехал вслед за своим учителем в 1967 г. С того же времени и до конца своей жизни Игорь Владимирович работал в Институте прикладной математики и механики НАН Украины. В 1967–1974 гг. он – старший научный сотрудник института. В 1972 г. защитил докторскую диссертацию «Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка». В 1975–1977 гг. он работал заместителем директора института по научной работе. С сентября 1977 г. и до своей внезапной кончины 2 февраля 2005 г. И.В. Скрыпник – директор института. В 1979 г. избран член-корреспондентом, а в 1985 г. – действительным членом Национальной академии наук Украины. В 1993–2005 гг. он – академик-секретарь Отделения математики НАН Украины.

И.В. Скрыпник обогатил математику многими фундаментальными результатами, и его научные достижения получили высокую оценку. Он – лауреат Государственной премии Украины в области науки и техники (1989), премий имени Н. Островского (1972), Н.М. Крылова (1992) и Н.Н. Боголюбова (2000) НАН Украины. В 1998 г. ему было присвоено почетное звание «Заслуженный деятель науки и техники Украины». Он был награжден орденом Дружбы народов (1986) и орденом Ярослава Мудрого V степени (2003).

Первые научные работы ученого (1963–1966 гг.) были посвящены изучению -гармонических форм на римановых пространствах. В этих работах построена обобщенная теория де Рама–Ходжа для дифференциальных форм, удовлетворяющих эллиптическому уравнению высшего порядка. Затем И.В. Скрыпник переключился на исследование проблем теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Именно в этой теории ученый получил выдающиеся результаты, принесшие ему мировое признание.

Значительное внимание И.В. Скрыпник уделил исследованию регулярности обобщенных решений квазилинейных эллиптических уравнений высшего порядка. Проблема регулярности решений нелинейных эллиптических уравнений была одной из ключевых проблем в теории дифференциальных уравнений на протяжении XX столетия. В частичной форме она была поставлена Д. Гильбертом в его девятнадцатой проблеме. К началу 70-х годов прошлого века в работах Э. Де Джорджи, Ю. Мозера, Дж. Серрина, О.А. Ладыженской, Н.Н. Уральцевой и других авторов была полностью исследована регулярность решений квазилинейных дивергентных эллиптических решений второго порядка. Вместе с тем для уравнений высшего порядка эта проблема оставалась открытой. Более того, были построены контрпримеры (Э. Де Джорджи, Э. Джусти–М. Миранда, В.Г. Мазья), показавшие, что эллиптические уравнения высшего порядка существенно отличаются по свойствам решений от уравнений второго порядка. В работах И.В. Скрыпника впервые был дан ответ на следующий вопрос: какой минимальной дополнительной гладкостью должно обладать обобщенное решение уравнения высшего порядка для того, чтобы оно было классическим? Ответом является условие регулярности: , где – половина порядка уравнения, а – число независимых переменных. Из этого результата и -оценки производных -го порядка просто получается классическая гладкость любого решения квазилинейного эллиптического уравнения произвольного порядка на плоскости.

Другое направление исследований И.В. Скрыпника было связано с развитием топологических методов в теории нелинейных уравнений. В начале 60-х годов прошлого века в работах М.И. Вишика, Г. Минти, Ф. Браудера, Ж.-Л. Лионса и других математиков были созданы методы исследования разрешимости граничных задач для квазилинейных дивергентных эллиптических уравнений произвольного порядка. Основой этих методов стала теория монотонных операторов. Дальнейшее их развитие и прогресс в исследовании нелинейных граничных задач были связаны с созданием теории степени операторов монотонного типа. В конце 60-х годов двадцатого столетия одновременно и независимо создаются теория степени -собственных операторов Браудера–Петришина, значениями которой являются последовательности целых чисел, и теория И.В. Скрыпника степени операторов класса $\alpha)$ (класса в современной терминологии), значениями которой являются целые числа.

Введение И.В. Скрыпником условия $\alpha)$ и, независимо, Ф. Браудером условия имело определяющее значение для развития топологических методов в теории нелинейных граничных задач. Теория степени операторов класса $\alpha)$ существенно расширила применение этих методов, берущих свое начало в классических работах Лерэ–Шаудера по степени операторов вида «тождественный плюс вполне непрерывный». И.В. Скрыпник дал определение степени операторов класса α) для сепарабельных и несепарабельных пространств, исследовал основные свойства степени и доказал аналог теоремы Хопфа, утверждающей, что степень отображений является единственным топологическим инвариантом. Игорь Владимирович установил формулу для индекса критической точки и дал применение теории степени к разрешимости нелинейных операторных уравнений и нелинейных эллиптических граничных задач. Теория степени позволила решить задачи о существовании собственных чисел и точек бифуркации.

Созданная И.В. Скрыпником в начале 70-х годов прошлого века теория степени операторов класса нашли важные применения в изучении общих нелинейных эллиптических уравнений с нелинейными граничными операторами, удовлетворяющими условию Лопатинского. И.В. Скрыпник предложил метод сведения общих нелинейных эллиптических граничных задач к операторным уравнениям с операторами класса . Такое сведение реализуется в пространствах Соболева, вложенных в пространства достаточно гладких функций, и основывается на априорных оценках решений линейных эллиптических задач. Теория степени операторов класса дала возможность развить топологические методы исследования существенно нелинейных параболических начально-краевых задач.

В конце 90-х годов прошлого столетия теория степени операторов монотонного типа получила дальнейшее развитие. Это было связано с изучением нелинейных задач с сильно растущими коэффициентами. В совместных работах И.В. Скрыпника и А. Картсатоса была введена степень для двух классов плотно заданных отображений. Первый класс является обобщением операторов класса , и теория степени отображений этого класса была применена для изучения нелинейных эллиптических задач с сильно растущими коэффициентами. Второй класс отображений – это сумма максимально монотонного оператора и оператора класса , и теория степени отображений этого класса была применена для изучения нелинейных параболических задач с сильно растущими коэффициентами. Было продолжено исследование индекса критической точки для плотно заданных операторов. Так, для операторов класса было введено понятие линеаризации и в терминах собственных чисел определенного линейного оператора получена формула индекса критической точки. Эти результаты нашли применение к нелинейным задачам с сильно растущими коэффициентами и задаче о точках бифуркации.

И.В. Скрыпник ввел классы нелинейных эллиптических и параболических уравнений высокого порядка, у которых произвольные обобщенные решения непрерывны по Гельдеру.

Им также установлено необходимое условие регулярности граничной точки для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений второго порядка. Это условие совпадает с установленным Р. Гарипи и В. Цимером достаточным условием регулярности граничной точки и, таким образом, результат И.В. Скрыпника приводит к критерию регулярности граничной точки. Позже результат Гарипи и Цимера был распространен ученым на введенный им класс квазилинейных уравнений высшего порядка с усиленной эллиптичностью.

И.В. Скрыпник был одним из ведущих специалистов в мире по вопросам усреднения нелинейных граничных задач в областях сложной структуры. Исследование граничных задач в сильно неоднородных областях стало, начиная с 70-х годов прошлого века, одной из центральных проблем теории дифференциальных уравнений в частных производных. Важность изучения таких задач связана с моделированием многочисленных задач механики и физики в сильно неоднородных средах. В случае линейных уравнений эти задачи изучали Э. Де Джорджи, Э. Санчес-Паленсия, О.А. Олейник и другие для областей с периодической структурой и В.А. Марченко и Е.Я. Хруслов для областей, вообще говоря, непериодической структуры. И.В. Скрыпник создал метод исследования задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений второго порядка в областях с мелкозернистой границей. Метод был основан на новых поточечных априорных оценках решений задач в модельных областях. Эти оценки дали возможность ученому исследовать построенное им асимптотическое разложение решений рассматриваемых задач в последовательности перфорированных областей, установить сильную сходимость остаточного члена и построить соответствующую усредненную граничную задачу. Важно, что при этом была доказана сходимость по лебеговой мере градиентов решений. Указанные результаты были получены для областей как с объемным, так и с поверхностным распределением перфорации. Дальнейшее развитие предложенного метода дала возможность И.В. Скрыпнику перейти к исследованию усреднения задач Дирихле в областях с каналами и тонкими пустотами, а затем и областях с общей перфорацией. Метод асимптотического разложения, разработанный И.В. Скрыпником, развивался им и в работах по усреднению нелинейных параболических задач Коши–Дирихле.

В последние десять лет своей жизни Игорь Владимирович был активно вовлечен в международное научное сотрудничество и вместе с известными зарубежными математиками получил целый ряд существенных результатов в интересовавших его направлениях исследований. Вместе с Дж. Даль Мазо он построил теорию усреднения задач Дирихле в общих перфорированных областях для нелинейных уравнений высокого порядка с усиленной эллиптичностью. Для положительных решений таких же уравнений

И.В. Скрыпник совместно с Ф. Николози доказал неравенства Гарнака. Вместе с В.А. Лискевичем он получил новые результаты о существовании и несуществовании положительных решений во внешних областях для нелинейных эллиптических уравнений с коэффициентами из класса Като. Совместно с Г. Гаевским И.В. Скрыпник исследовал эллиптико-параболические задачи диффузионных процессов в электрически заряженных средах при условиях сильного вырождения диффузионного коэффициента и, как уже отмечалось выше, вместе с А. Картсатосом занимался развитием теории степени операторов монотонного типа и соответствующими приложениями.

И.В. Скрыпник – автор более чем 200 научных публикаций. Среди них 5 монографий, одна из которых была опубликована на английском языке в Германии, а три переизданы на английском языке.

Плодотворную научную работу Игорь Владимирович удачно соединял с активной педагогической деятельностью. На протяжении многих лет он читал основные и специальные курсы по теории дифференциальных уравнений в частных производных для студентов математического факультета Донецкого национального университета, отбирал способную молодежь и уделял значительное внимание ее научной подготовке через аспирантуру. Среди его учеников 4 доктора и 20 кандидатов физико-математических наук. В 1999–2004 гг. И.В. Скрыпник возглавлял кафедру дифференциальных уравнений ДонНУ.

В личности Игоря Владимировича гармонично сочетались крупный математический талант, высокие качества учителя и большие организаторские способности. В 1979 г. по его инициативе в Институте прикладной математики и механики был создан отдел нелинейного анализа. Как руководитель отдела И.В. Скрыпник приложил много усилий для формирования Донецкой математической школы по теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Эта школа и сегодня, после ухода из жизни ее несомненного лидера, сохраняет передовые позиции в Украине. Она имеет существенные научные достижения, известные во всем мире.

Благодаря своим высоким профессиональным качествам, принципиальности и вместе с тем демократичности и человечности Игорь Владимирович заслуженно пользовался авторитетом и уважением широкой научной общественности. Под его руководством в Институте прикладной математики и механики НАН Украины приобрели развитие новые направления фундаментальных и прикладных исследований, была создана опытно-конструкторская база и существенно укреплен кадровый состав. На посту академика-секретаря Отделения математики НАН Украины И.В. Скрыпник уделял постоянное внимание развитию творческих связей математических коллективов академических учреждений и вузов, повышению международного авторитета украинской математической науки. Возглавляя экспертный совет ВАК Украины по математике, он постоянно заботился о высоком уровне научных кадров.

Длительное время И.В. Скрыпник возглавлял Украинское математическое общество. Он был ответственным редактором сборника «Нелинейные граничные задачи», членом редакционных коллегий журналов «Вісник Національної академії наук України”, “Доповіді Національної академії наук України”, “Український математичний журнал”, “Mathematical Physics, Analysis and Geometry”, “Abstract and Applied Analysis”, (USA) “Glasgow Mathematical Journal” (Great Britain) и членом редакционного совета журнала “У світі математики”. В 2004 г. по его инициативе был создан новый журнал – “Український математичний вісник” – с авторитетным международным редакционным советом. Издание этого журнала продолжается, его англоязычная версия распространяется Американским математическим обществом.

И.В. Скрыпник был вдохновителем и организатором одних из наиболее авторитетных в странах СНГ традиционных конференций по нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных, которые регулярно, раз в два года, проводились Институтом прикладной математики и механики, начиная с 1979 г. Последние 15 лет эти конференции имеют международный статус, они проводятся с той же регулярностью, в них принимают участие многие известные зарубежные ученые-математики. Недавняя, пятнадцатая по счету, конференция из этой серии – международная конференция «Нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных» (Ялта, Крым, Украина, 10–15 сентября 2007 г.) – была посвящена памяти Игоря Владимировича. В конференции приняли участие представители Украины, России, Беларуси, Казахстана, Грузии, Польши, Чехии, Словакии, Венгрии, Великобритании, Германии, Израиля, Италии, Франции, Швеции, Канады и США. Среди них было много крупных специалистов по теории дифференциальных уравнений, лично знавших И.В. Скрыпника и приехавших отдать дань памяти этого выдающегося ученого и замечательного человека.

On scientific contribution of I.V.Skrypnik

Igor Vladimirovich Skrypnik, an extremely prolific mathematician, made many important contributions in the field of nonlinear partial differential equations. He treated a wide variety of problems for elliptic and parabolic equations.

His work involved finding new estimates for solutions, proving existence and uniqueness results, and developing regularity theory for generalized solutions. He also studied solutions in domains with non-smooth boundaries and found sufficient conditions for "regular" boundary points extending the Wiener condition to nonlinear elliptic and parabolic equations.

The books he wrote on nonlinear problems are extremely useful. They contain a wealth of information, and include many of his results up to 1990, in particular, his results on nonlinear higher order equations. They also treat domains with fine-grained boundary, and study homogenization in domains with holes.

As a very useful tool in studying nonlinear problems, Professor Skrypnik introduced several extensions of topological degree theory to densely defined perturbations of maximal monotone operators, especially in order to treat nonlinear boundary conditions. He also presented possible applications to nonlinear functional analysis. One degree theory was used to define the index of isolated critical points, with applications to bifurcation theory.

He obtained new results on removable singularities for nonlinear elliptic equations, and others on nonexistence of solutions of some elliptic inequalities.

Another subject was the extension of Sobolev embedding theorems to Sobolev spaces with weights (the conditions on the weights are very sharp) and derivation of interpolation inequalities in such spaces.

Professor Skrypnik's untimely death is a great loss to all who knew him as well as to nonlinear analysis.

Louis Nirenberg

A-ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ НА РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

УЗАГАЛЬНЕНА ТЕОРЕМА ДЕ РАМА

(Доповіді АН УРСР. – 1965. – № 1)

Нехай $\mathbf{M}$ – n-вимірний дійсний аналітичний компактний рімановий простір (без краю) і нехай на ньому задано аналітичні тензори $a_j^{i_1 \dots i_q}$ $(q = 0, \dots, m)$, контраваріантні по верхніх індексах і коваріантні по нижньому. Розглядаємо оператори $\mathbf{A}^p$ $(p = 0, \dots, n-1)$, які переводять форми степеня p в форми степеня $p+1$ і задаються за формулою

$$(\mathbf{A}^p \alpha)_{k_1 \dots k_{p+1}} = \sum_{\nu=1}^{p+1} (-1)^{\nu-1} A_{k_\nu} \alpha_{k_1 \dots \hat{k}_\nu \dots k_{p+1}}, \quad A_j = \sum_{q=0}^{m} a_j^{i_1 \dots i_q} \nabla_{i_1} \cdots \nabla_{i_q}.$$

Тут ∇_i – символ коваріантної похідної; індекси $k_1, \dots, k_{p+1}$ при $\mathbf{A}^p_\alpha$ вказують, що мова йде про коефіцієнти форми $\mathbf{A}^p_\alpha$ при $dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_{p+1}}$ (аналогічно для α), а $k_1, \dots, \hat{k}_\nu, \dots, k_{p+1}$ одержуються із $k_1, \dots, k_{p+1}$ викресленням k_ν. У виразі A_j, як звичайно, мається на увазі сумування по індексах, які повторюються.

Визначаємо ще оператори $A^p = (\mathbf{A}^p)' \mathbf{A}^p + \mathbf{A}^{p-1} (\mathbf{A}^{p-1})'$, де $(\mathbf{A}^p)'$ метрично спряжений до $\mathbf{A}^p$ [1].

Припускаємо, що A° – еліптичний оператор і A_j – комутують.

Форму α називаємо $\mathbf{A}$-замкненою, якщо $\mathbf{A}_\alpha = 0$, β називаємо $\mathbf{A}$-гомологічною нулю, якщо існує форма γ така, що на $\mathbf{M}$ виконується $\mathbf{A}_\gamma = \beta$.

Нехай B^p – пучок ростків форм класу C^∞ степеня p і C^p – пучок ростків $\mathbf{A}$-замкнених форм класу C^∞ і степеня p [2]. Має місце така лема.

$\mathbf{A}$–лема Пуанкаре. Послідовність $0 \to C^p \to B^p \to C^{p+1} \to 0$ точна.

При доведенні використовуються ідеї [3].

За допомогою вказаної леми одержується така теорема.

Узагальнена теорема де Рама. Фактор-група групи $\mathbf{A}$-замкнених форм степеня p по підгрупі $\mathbf{A}$-гомологічних нулю форм степеня p ізоморфна $[H^p(\mathbf{M}, R)]^M$, де $H^p(\mathbf{M}, R)$ – p-вимірна група когомологій простору $\mathbf{M}$ з дійсними коефіцієнтами. M – число $\mathbf{A}$-замкнених форм нульового степеня.

Двоїсте твердження має місце для оператора $\mathbf{A}'$.

Теорема. *Фактор-група групи* $\mathbf{A}'$*-замкнених форм степеня* p *по підгрупі* $\mathbf{A}'$*-гомологічних нулю форм степеня* p *ізоморфна* $[H_p(\mathbf{M},R)]^M$*, де* $H_p(\mathbf{M},R)$ *–* p*-вимірна група гомологій* $\mathbf{M}$ *з дійсними коефіцієнтами.*

1. *Ж. де Рам,* Дифференцируемые многообразия, ИЛ, 1956, стор. 166.
2. *Чжэнь Шэн-шень,* Комплексные многообразия, ИЛ, 1961, стор. 56.
3. *Я. Б. Лопатинский,* УМЖ, **2**, 56 (1950).

A-ГАРМОНІЧНІ ФОРМИ НА КОМПАКТНОМУ РІМАНОВОМУ ПРОСТОРІ

(Доповіді АН УРСР. – 1965. – № 2)

Зробимо ті ж припущення відносно простору $\boldsymbol{M}$, що і в [1]. Там же визначені оператори $\mathbf{A}^p, (\mathbf{A}^p)', A^p$, які ми будемо розглядати далі. Верхні індекси при цих операторах часто опускаються. Спочатку будуємо параметрикс для рівняння $A\varphi = 0$, після чого будуть застосовані методи інтегральних рівнянь. Виберемо деяке скінченне відкрите покриття $\{U_i\}$ простору $\boldsymbol{M}$ (таке, щоб U_i було гомеоморфне відкритій n-вимірній сфері R_i). Образ $x \in U_i$ в R_i при відповідному гомеоморфізмі позначаємо через x_i. Нехай $r_i(x)$ – віддаль x_i до границі R_i. Очевидно, що $\max r_i(x) \geq 2\rho > 0$. Позначаємо $g^i(y_i) = \det\,(g_{k,l}(y_i))$ і відповідну їй функцію в U_i через $g^i(y)$ ($g_{k,l}$ – компоненти метричного тензора).

Параметриксом називаємо таку подвійну форму:

$$\omega(x,y) = \frac{\sum\limits_i \varphi_i(x_i,y_i)\cdot\varphi(r_i(y))}{\sum\limits_i \varphi(r_i(y))\cdot\sqrt{g^i(y)}}\cdot\sigma(x,y)\cdot\alpha(x,y).$$

Тут $\varphi_i(x_i,y_i)$ – фундаментальний розв'язок рівняння $A^0u = 0$, яке розглядається в R_i, побудований Я.Б. Лопатинським в [2]. $\varphi(x)$ – безмежно диференційовна функція на дійсній прямій, що дорівнює нулю при $x \leq \rho$ і одиниці при $x \geq 2\rho$. $\sigma(x,y), \alpha(x,y)$ мають той самий зміст, що і в [3]. При цьому $\omega(x,y)$ має порядок $O(r^{2m-n}lgr)$ при $2m \geq n$ і $O(r^{2m-n})$ при $2m < n$, а форма $q(x,y) = -A_x\omega(x,y)$ має порядок $O(r^{1-n})$ (r – геодезична віддаль між x і y).

Лема. *Має місце рівність*

$$A\int\limits_y \omega(x,y) < *\varphi(y) = \varphi(x) - \int\limits_y \varphi(x,y)\wedge *\,\varphi(y).$$

Форму h називаємо A-гармонічною, якщо $Ah = 0$.

Теорема 1. *Для того, щоб рівняння $A\varphi = \psi$ (φ, ψ – форми степеня p) мало на $\boldsymbol{M}$ розв'язок, необхідно і достатньо, щоб ψ була ортогональна всім A-гармонічним формам степеня p.*

Теорема 2. *В просторі форм на $\boldsymbol{M}$ існують лінійні оператори H, G, які задовольняють співвідношення:*

$$\mathbf{A}H = H\mathbf{A} = 0,\quad \mathbf{A}'H = H\mathbf{A}' = 0,\quad H^2 = H,$$

$$\mathbf{A}G = G\mathbf{A},\quad \mathbf{A}'G = G\mathbf{A}',\quad GH = HG = 0,\quad AG = GA = 1 - H.$$

H і G метрично самоспряжені. Метричне ядро [3] $h(x,y)$ оператора H належить класу C^{∞}, метричне ядро $g(x,y)$ оператора G – класу C^{∞} при $x \neq y$ і має при $x = y$ ту саму особливість, що і $\omega(x,y)$.

Наслідок 1. Будь-який потік на $\boldsymbol{M}$ можна представити і притому єдиним чином у вигляді суми потока, $\mathbf{A}$-гомологічного нулю, потока $\mathbf{A}'$-гомологічного нулю і A-гармонічної форми.

Визначення потока див. в [3, гл. 3]. Оператори на потоках визначаються природно.

Назвемо періодом $\mathbf{A}$-замкненої форми α відносно будь-якого $\mathbf{A}'$-замкненого потока T значення $(T,\alpha) = T[*\alpha]$.

Наслідок 2. (типу теореми Ходжа). На $\boldsymbol{M}$ існує A-гармонічна форма, яка має довільні наперед задані періоди відносно заданих $\mathbf{A}'$-замкнених потоків, ніяка лінійна комбінація яких не $\mathbf{A}'$-гомологічна нулю.

Теорема 3. *Векторний простір A-гармонічних форм степеня p ізоморфний* $[H^p(\boldsymbol{M}, R)]^M$.

1. *І.В. Скрипник,* ДАН УРСР, 18 (1965).
2. *Я. Б. Лопатинский,* ДАН СССР, **71**, 433 (1950).
3. *Ж. де Рам,* Дифференцируемые многообразия, ИЛ, 1956, стор. 189.

A-ГАРМОНИЧЕСКИЕ ПОЛЯ С ОСОБЕННОСТЯМИ

*(Украинский математический журнал. – 1965. – **17**, № 4)*

В работе строятся A-гармонические поля второго и третьего рода. Изучается поведение A-гармонического поля в окрестности изолированной особой точки. Дается обобщение теоремы Римана–Роха.

Изложение ведется для операторов $\mathbf{A}$ первого порядка. Однако при надлежащем видоизменении результаты пунктов 1–5 справедливы и для операторов $\mathbf{A}$ высшего порядка.

Соответствующие результаты для гармонических полей получил Кодаира [1].

1. Пусть $\boldsymbol{M}$ – действительное аналитическое ориентируемое риманово пространство размерности n (без границы), на котором заданы аналитические тензоры: a_i – ковариантный и a_i^j – смешанный. Рассматриваются операторы $\mathbf{A}^p$ $(p = 0, \dots, n-1)$, переводящие формы степени p в формы степени $p+1$ и задаваемые формулой:

$$(\mathbf{A}^p\alpha)_{k_1, \dots, k_{p+1}} = \sum_{\nu=1}^{p+1} (-1)^{\nu-1} A_{k_\nu} \alpha_{k_1, \dots, \hat{k}_\nu, \dots, k_{p+1}}, \quad A_i = a_i^j \nabla_j + a_i, \tag{1}$$

∇_j – символ ковариантной производной; индексы $k_1, \dots, k_{p+1}$ при $\mathbf{A}^p\alpha$ указывают, что речь идет о коэффициентах формы $\mathbf{A}^p\alpha$ при $dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_{p+1}}$ (аналогично для α), а $k_1, \dots, \hat{k}_\nu, \dots, k_{p+1}$ получается из $k_1, \dots, k_{p+1}$ вычеркиванием k_ν. Как обычно, предполагается суммирование по повторяющимся индексам. Определим еще $A^p = (\mathbf{A}^p)'\mathbf{A}^p + \mathbf{A}^{p-1}(\mathbf{A}^{p-1})'$, где $(\mathbf{A}^p)'$ метрически сопряжен к $\mathbf{A}^p$ (см. [3]).

В дальнейшем предполагается перестановочность A_j и эллиптичность A^0. Индексы при операторах $\mathbf{A}^p, (\mathbf{A}^p)', A^p$ будут часто опускаться.

2. Обозначим через $\mathbf{A}^{*p}$ оператор, получаемый по формуле (1) путем замены A_i на $A_i^* = -\nabla_j \cdot a_i^j + a_i$.

Лемма 1. *На $\boldsymbol{M}$ существует и притом единственная функция $\tilde{v}$, удовлетворяющая $\mathbf{A}^{*0}\tilde{v} = 0$.*

Пусть $\beta_n(u,\tilde{v}) = u \cdot \tilde{v}$, здесь u – форма степени n.

Лемма 2. *Существуют формы $\beta_p(u,\tilde{v})$ степени p $(0 \le p \le n-1)$, удовлетворяющие*

$$\beta_{p+1}(\mathbf{A}^p u,\tilde{v}) = d\beta_p(u,\tilde{v}) \tag{2}$$

и такие, что их коэффициенты являются билинейными формами относительно $\tilde{v}$ и коэффициентов u (u – форма степени p).

Меняя ролями операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^*$ получим формы $\beta_p^*(\tilde{v}, v)$, обладающие аналогичными свойствами. $\tilde{u}$ – решение уравнения $\mathbf{A}^0 u = 0$.

В дальнейшем будут употребляться обозначения:

$$\{u, C\} = \int_C \beta_p(u, \tilde{v}), \quad [v, C] = \int_C \beta_p^*(\tilde{u}, *v).$$

3. A-гармоническими полями будем называть формы, удовлетворяющие соотношениям $\mathbf{A}u = 0,\ \mathbf{A}'u = 0$.

Под выражением «A-гармоническое поле φ имеет особенность θ» понимается следующее. Пусть заданы нигде не плотное компактное подмножество F многообразия $\boldsymbol{M}$, G – его окрестность, и A-гармоническое регулярное в $G - F$ поле Θ. Тогда φ имеет особенность Θ, если φ – регулярно в $\boldsymbol{M} - F$, и существует A-гармоническое в G поле W такое, что $\varphi = \Theta + W$ в $G - F$.

Для простоты будем рассматривать случай, когда F содержится в достаточно малой геодезической сфере S (с границей Γ), $S \subset G$. Тогда возможность построения поля с заданной особенностью Θ дается следующей теоремой существования.

Теорема 1. *Пусть степень Θ равна p. Тогда в случае $2 \le p \le n-2$ существует A-гармоническое поле φ с особенностью Θ. В случае $p = 1$ или $p = n-1$ для этого достаточно соответственно*

$$[\Theta, \Gamma] = 0, \quad \{\Theta, \Gamma\} = 0. \tag{3}$$

Далее φ можно выбрать так, чтобы

$$\|\varphi\|_{\boldsymbol{M}-G} < +\infty, \tag{4}$$

$$\int_{\boldsymbol{M}} \varphi \wedge *\zeta \equiv (\varphi, \zeta) = 0 \tag{5}$$

для произвольной формы ζ, равной нулю в G и удовлетворяющей $\mathbf{A}\zeta = 0$.

4. В этом пункте определяются A-гармонические поля второго и третьего рода. Используя построенное Я.Б. Лопатинским фундаментальное решение [2], устанавливается существование двойной формы $\omega(x, \xi)$, удовлетворяющей $A_x\omega(x, \xi) = 0$ и такой, что для достаточно малой области $G \subset \boldsymbol{M}$ и для произвольной достаточно гладкой формы η с носителем в G имеет место

$$\eta(\xi) = (\mathbf{A}\eta, \mathbf{A}\omega(\cdot, \xi)) + (\mathbf{A}'\eta, \mathbf{A}'\omega(\cdot, \xi)).$$

Форма $\omega(x, \xi)$ определяется в окрестности диагонали произведения $\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{M}$ и имеет порядок $O(r^{2-n})$ при $n > 2$ и $O(\lg r)$ при $n = 2$; r – геодезическое расстояние.

Пусть $C = C^p$ – цепь, содержащаяся в достаточно малой геодезической сфере S. Определим $u^{p-1}(x) = \{\omega(x), \Delta C\}$. Можно выбрать в $G \supset S$ регулярное поле f так, чтобы поле

$\Theta = f + \mathbf{A}u^{p-1}$ было A-гармоническим. Применением теоремы 1 доказывается существование A-гармонического поля на $\boldsymbol{M}$ с особенностью Θ. При помощи разбиения произвольной конечной цепи C на «малые» части устанавливается

Теорема 2. *Для каждой конечной цепи* $C = C^p$ $(1 \le p \le n-1)$ *в* $\boldsymbol{M}$ *существует одно и только одно поле* $e[C]$ *степени* p*, удовлетворяющее условиям* (3), (4) *и*

$$(e[C], \zeta) = \{\zeta, C\}, \quad \mathbf{A}\zeta = 0 \tag{6}$$

$$(e[C], \mathbf{A}'\varphi) = 0, \tag{7}$$

$$\| e[C] \|_{1,G} < +\infty. \tag{8}$$

Поле $e[C]$ регулярное A-гармоническое в $\boldsymbol{M} - \overline{\Delta C}$ и имеет особенность в каждой точке $\overline{\Delta C}$.

Пусть $\tilde{e}[C]$ – аналогично получаемое поле для $\mathbf{A}^*$. Определим $e^*[C] = *\tilde{e}[C]$. Если $\Delta C \ne 0$, $e[C]$ и $e^*[C]$ будем называть A-гармоническими полями третьего рода.

Пусть $u(x,\xi) = \mathbf{A}_\xi\, \omega(x,\xi)$.

Посредством предельного перехода из только что рассмотренного случая получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Для произвольного* ξ *и произвольных* $k_1, \dots, k_p$ *существует одно и только одно* A*-гармоническое поле* $e_{k_1 \dots k_p}(x,\xi)$*, регулярное в* $\boldsymbol{M} - \xi$*, удовлетворяющее* (3), (4) *и такое, что в* $G - \xi$

$$e_{k_1,\dots,k_p}(x,\xi) - (\mathbf{A}u)_{k_1,\dots,k_p}(x,\xi) = f_{k_1,\dots,k_p}(x); \tag{9}$$

$f_{k_1 \dots k_p}(x)$ *– голоморфное в некоторой окрестности* G *точки* ξ *поле.*

Пусть $\tilde{e}_{k_1,\dots,k_p}(x,\xi)$ – аналогично получаемое для оператора $\mathbf{A}^*$ поле.

Определяем $e^*_{k_1,\dots,k_p}(x,\xi) = * \, \tilde{e}_{k_1,\dots,k_p}(x,\xi)$.

Пару $P^r = (\sigma, \xi)$, состоящую из тензора $\sigma = \sigma^{\lambda_1, \dots, \lambda_r; q_1, \dots, q_{s-1}}$ и точки ξ в $\boldsymbol{M}$ называем r-полюсом порядка s, причем σ предполагается кососимметрическим по греческим индексам.

Для произвольной формы φ степени r определяем

$$(\varphi, P^r) = \frac{1}{r!(s-1)!}\sigma^{\lambda_1, \dots, \lambda_r; q_1, \dots, q_{s-1}} \nabla_{q_1} \cdots \nabla_{q_{s-1}} \varphi_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}(\xi).$$

A-гармоническими полями второго рода называем $e[P](x) = (e(x,\cdot), P)$ и

$$e^*[P](x) = (e^*(x,\cdot), P).$$

5. В этом пункте изучается поведение A-гармонического поля в окрестности изолированной особой точки конечного порядка. Говорим, что регулярное при $x \ne x_0$ A-

гармоническое поле $\varphi(x,x_0)$ имеет в точке x_0 особую точку конечного порядка, если $\varphi(x,x_0)=O(r(x,x_0)^{-n-l+1})$. Наименьшее целое неотрицательное l, для которого имеет место написанное соотношение, называем порядком особенности в точке x_0.

Теорема 4. *Пусть* $\Theta(x,x_0)$ A*-гармоническое поле степени* p *и* x_0 *его изолированная особая точка порядка* l. *В случае* $p=1$ *или* $p=n-1$ *соответственно предполагаем выполнение* (3) *(где под* Γ *надо понимать поверхность достаточно малой геодезической сферы с центром в* x_0*). Тогда в окрестности точки* x_0, Θ *представляется в виде*

$$\Theta=\sum_{m=1}^{l} e[P_m]+\Theta_0;$$

Θ – *регулярное* A*-гармоническое поле,* P_m – p*-полюс порядка* m.

Если $p=n-1$ и (3) не выполнено, то поле

$$\Theta_1=\Theta-(-1)^n\{\Theta,\Gamma\}e^*[C]$$

будет уже удовлетворять (3) и теорема 4 применима.

Здесь $C-1$-цепь такая, что $\Delta C=x_0-y_0$, y_0 – точка в окрестности x_0. Аналогично для $p=1$.

6. Теорема 5. *Для произвольного конечного цикла* Z

$$\{e^*[C],Z\}=I(Z,C). \tag{10}$$

Здесь $I(Z,C)$ – индекс пересечения.

С помощью этой теоремы устанавливается следующая теорема, которую следует рассматривать как обобщение теоремы Римана–Роха. Предполагаем сейчас, что многообразие ***M*** компактно.

Теорема 6. *Пусть на* ***M*** p*-полюсы* $P_1,\dots,P_r$, $Q_1,\dots,Q_s$, p*-цепи* $C_1,\dots,C_t$ *и* $n-p$*-цепи* $C_1^*,\dots,C_u^*$ *заданы так, что* $e[Q_1],\dots,e[Q_s]$, $e[P_1],\dots,e[P_r]$, $e[C_1],\dots,e[C_t]$, $e^*[C_1^*],\dots,$ $e^*[C_u^*]$ *линейно независимы по модулю* H^p *(*H^p *– пространство* A*-гармонических форм степени* p*). Числа* M,N,b *определяются следующим образом.* M *– число линейно независимых* A*-гармонических полей* e*, удовлетворяющих:* $e\equiv 0 \bmod (H^p, e[P_1],\dots,e[P_r]), \{e,Z^p\}=0$ *для всех* p*-мерных циклов* Z^p *пространства* ***M***, $[e,Z^{n-p}]=0$ *для всех* $n-p$*-мерных циклов* Z^{n-p} *пространства* ***M****,*

$$\{e,C_k\}=0\ (k=1,\dots,t),\ [e,C_i^*]=0\ \ (i=1,\dots,u),\ [e,Q_j]=0\ \ (j=1,\dots,s);$$

N *– число линейно независимых* A*-гармонических полей* e'*, удовлетворяющих:*

$$(e',P_j)=0\quad (j=1,\dots,r),$$

$$e'\equiv 0\quad \mathrm{mod}(H^p,\ e[Q_1],\dots,e[Q_s],\ \ e[C_1],\dots,e[C_t],\ \ e^*[C_1^*],\dots,e^*[C_u^*]);$$

b – p*-мерное число Бетти многообразия* $\boldsymbol{M}$.

Тогда

$$M = N - b + r - s - t - u.$$

1. *K. Kodaira,* Harmonic fields in Riemannian manifolds (generalized potential theory), Annals of Math., 50, 1949, 587–665.
2. *Я. Б. Лопатинский,* Функциональная система решений системы линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа, ДАН СССР, т. 71, № 3, 1950, 433–436.
3. *Ж. де Рам,* Дифференцируемые многообразия, ИЛ, М., 1956.

ПЕРИОДЫ А-ЗАМКНУТЫХ ФОРМ

(Доклады Академии наук СССР. – 1965. – ***160****, № 4)*

В работе вводится понятие периодов $\mathbf{A}$-замкнутых форм относительно циклов многообразия. Устанавливаются в терминах периодов результаты, обобщающие известные теоремы де Рама и Ходжа (см. [3]–[6]). Понятие периода имеет важное значение в ряде вопросов, связанных с A-гармоническими полями и формами, в частности, при рассмотрении A-гармонических полей с особенностями.

1. Пусть $\boldsymbol{M}$ – вещественное аналитическое компактное риманово пространство размерности n (без границы), на котором заданы аналитические тензоры $a_j^{i_1,\dots,i_q}$ $(q=0,\dots,m)$, контравариантные по верхним индексам и ковариантные по нижнему. Определяем операторы $\mathbf{A}^p$ $(p=0,\dots,n-1)$, переводящие формы степени p в формы степени $p+1$ по формуле

$$(\mathbf{A}^p\alpha)_{k_1,\dots,k_{p+1}} = \sum_{\nu=1}^{p+1}(-1)^{\nu-1}A_{k_\nu}\alpha_{k_1,\dots,\hat{k}_\nu,\dots,k_{p+1}};\quad A_j=\sum_{q=0}^{m} a_j^{i_1,\dots,i_q}\nabla_{i_1}\cdots\nabla_{i_q}.$$

Здесь ∇_i – символ ковариантной производной. Индексы при формах $\alpha, \mathbf{A}_\alpha^p$ указывают, что речь идет о соответствующих компонентах форм; $k_1,\dots,\hat{k}_\nu,\dots,k_{p+1}$ получается из $k_1,\dots,k_{p+1}$ вычеркиванием k_ν. В A_j ведется суммирование по повторяющимся индексам. Определяем еще $A^p=(\mathbf{A}^p)'\mathbf{A}^p+\mathbf{A}^{p-1}(\mathbf{A}^{p-1})'$, где $(\mathbf{A}^p)'$ метрически сопряжен к $\mathbf{A}^p$ (см. [4]).

Предполагается, что A^0 – эллиптический оператор и A_j перестановочны.

Форму α называем $\mathbf{A}$-замкнутой, если $\mathbf{A}\alpha=0$; β называем $\mathbf{A}$-гомологичной нулю, если существует на $\boldsymbol{M}$ такая форма γ, что $\mathbf{A}\gamma=\beta$. Форму φ называем A-гармонической, если $A\varphi=0$; ψ называем A-гармоническим полем, если $\mathbf{A}\psi=0, \mathbf{A}'\psi=0$.

Имеет место следующая обобщенная теорема де Рама.

Теорема 1. *Фактор-группа $\mathsf{H}_{\mathbf{A}}^p(\mathbf{M})$ группы $\mathbf{A}$-замкнутых форм степени p по подгруппе $\mathbf{A}$-гомологичных нулю форм степени p изоморфна $[H^p(\boldsymbol{M},R)]^M$, где $H^p(\boldsymbol{M},R)$ – p-мерная группа когомологий пространства $\boldsymbol{M}$ с вещественными коэффициентами. M – число линейно независимых $\mathbf{A}$-замкнутых форм нулевой степени.*

2. Здесь будут введены основные для дальнейшего формы $\beta_p(u,\tilde{v}_j)$ и сформулировано предположение относительно них.

Пусть $\mathbf{A}^{*p}=*(\mathbf{A}^{n-p})'*^{-1}$ (относительно оператора $*$ см. [4]). На $\boldsymbol{M}$ существует M линейно независимых решений уравнения $\mathbf{A}^{*0}v=0$, также для уравнения $\mathbf{A}^0u=0$. Обозначим эти решения соответственно через $\tilde{v}_1,\dots,\tilde{v}_M$; $\tilde{u}_1,\dots,\tilde{u}_M$.

Лемма 1. *Существуют формы* $\beta_p(u,\tilde{v}_j)$ $(1 \le j \le M)$ *степени* p $(0 \le p \le n)$ *такие, что для всех* u *степени* p *имеют место соотношения*

$$\beta_n(u,\tilde{v}_j) = u \cdot \tilde{v}_j; \;\; \beta_{p+1}(\mathbf{A}^p u,\tilde{v}_j) = d\beta_p(u,\tilde{v}_j) \;\; (p < n).$$

При этом коэффициенты $\beta_p(\tilde{u},v_j)$ *являются билинейными дифференциальными выражениями относительно* $u, \tilde{v}_j$ *(*d *– внешний дифференциал).*

Пусть $S_{\varepsilon_1\varepsilon_2}: \varepsilon_1 < r_{P,Q} < \varepsilon_2$ – геодезическое кольцо с центром в произвольной точке $P \in \boldsymbol{M}$. В силу теоремы 1 группа $\mathsf{H}^{n-1}_{\mathbf{A}}(S_{\varepsilon_1,\varepsilon_2})$ имеет M образующих $\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_M$. Будем предполагать, что

$$\det \| B_{ij} \| \ne 0, \;\; (\beta_{i,j})_{j=1}^{M} \ne (0, \dots, 0),$$

где $B_{i,j}$ задаются формулой $\int\limits_{r_{P,Q}=\varepsilon} \beta_{n-1}(\hat{u}_i,\tilde{v}_j)$ $(\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2)$ и не зависят от ε, а $\beta_{i,j}$ – числа на $\boldsymbol{M}$, равные $\beta_0(\tilde{u}_i,\tilde{v}_j)$.

3. Пусть K – некоторое симплициальное разбиение (см. [3]) многообразия $\boldsymbol{M}$. Введем отображение B_i множества всех форм степени p на $\boldsymbol{M}$ в множестве цепей комплекса K:

$$B_i(\varphi^p) = \sum_{C^p} \{\varphi^p, C^p\}_i\, C^p; \;\; \{\varphi^p, C^p\}_j \equiv \int\limits_{C^p} \beta_p(\varphi^p,\tilde{v}_j).$$

Следующая теорема имеет основное значение:

Теорема 2. *Оператор* $B\varphi \equiv (B_i\varphi)_{i=1}^{M}$ *устанавливает сформулированный в теореме* 1 *изоморфизм.*

Теперь можно ввести

Определение. Периодами $\mathbf{A}$-замкнутой формы φ относительно цикла Z многообразия $\boldsymbol{M}$ называем числа $\{\varphi, Z\}_i$, $1 \le i \le M$.

4. Опираясь на результаты пункта 3, устанавливаются теоремы:

Теорема 3. $\mathbf{A}$*-замкнутая форма с нулевыми периодами относительно всех циклов многообразия* $\mathbf{A}$*-гомологична нулю.*

Пусть Z_j^p $(j = 1, \dots, s)$ – p-мерные циклы, никакая линейная комбинация которых не гомологична нулю. Тогда:

Теорема 4. *Существует* $\mathbf{A}$*-замкнутая форма, имеющая произвольные наперед заданные периоды относительно циклов* Z_j^p.

Теорема 5. *Существует* A*-гармоническая форма, имеющая произвольные наперед заданные периоды относительно циклов* Z_j^p*. Последняя однозначно определяется, если* s *равняется* p*-мерному числу Бетти.*

В случае оператора $\mathbf{A}$, совпадающего с оператором внешнего дифференцирования, теоремы 3 и 4 получены де Рамом [5], а теорема 5 известна как теорема Ходжа [4], [6].

5. В заключение укажем аналоги теоремы 3 и 4 для случая дифференциальных форм с фиксированным носителем. Эти результаты нужны при рассмотрении A-гармонических полей и форм на многообразии с краем (ср. [1], [2]).

Носитель формы φ обозначим через $\underline{\varphi}$. Пусть $\boldsymbol{N}$ – n-мерное подпространство $\boldsymbol{M}$ с границей $\boldsymbol{B}$ и R_i^p – базис относительных p-мерных циклов $\boldsymbol{N}(\mathrm{mod}\,\boldsymbol{B})$. Относительными периодами формы φ $(\underline{\varphi} \subseteq \boldsymbol{N})$ называем $\{\varphi, R_i^p\}_j$.

Теорема $3'$**.** $\mathbf{A}$*-замкнутая форма* φ $(\underline{\varphi} \subseteq \boldsymbol{N})$ *с нулевыми относительными периодами представима в виде* $\varphi = \mathbf{A}\psi$ $(\underline{\psi} \subseteq \boldsymbol{N})$.

Теорема $4'$**.** Существует $\mathbf{A}$*-замкнутая форма* θ $(\underline{\theta} \subseteq \boldsymbol{N})$*, имеющая произвольные наперед заданные относительные периоды.*

1. *G. F. D. Duff,* Ann. Math., **56**, 1, 115 (1952).
2. *G. F. D. Duff,* Spencer, Ann. Math., **56**, 1, 128 (1952).
3. *K. Kodaira,* Ann. Math., **50**, 3, 587 (1949).
4. *Ж. Де Рам,* Дифференцируемые многообразия, ИЛ, 1956.
5. *G. de Rham,* J. math. pures et appl., **10**, 115 (1931).
6. *W .V. D. Hodge,* Proc. London Math. Soc., **41**, 483 (1936).