

УДК 531.38

©2002. И.А. Болграбская

## УЧЕТ СДВИГОВЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Рассмотрена система  $n$  тел, образующих полужамкнутую цепь [1], связанных упругими шарнирами с четырьмя степенями свободы. Такие шарниры позволяют учесть как изгибные, так и сдвиговые деформации моделируемого упругого объекта. Определены жесткости изгиба и сдвига, при которых данная конечномерная разностная задача аппроксимирует непрерывную задачу о малых колебаниях балки Тимошенко с двумя опорами на концах. Доказана сходимости решений разностной задачи к решению непрерывной при условии соответствующего выбора параметров жесткостей. Для системы, состоящей из двух тел, найдены резонансные скорости первого и второго типов [2]. Установлено, что учет сдвиговых деформаций позволяет определить более широкий спектр резонансных скоростей.

**Введение.** Изучение колебаний вращающихся валов получило широкое развитие в связи с их использованием в качестве элементов конструкций современного машиностроения. Вращающиеся валы являются составной частью механических объектов, в частности, это валы турбомашин, трансмиссионные валы самолетов, вертолетов и т.п. При расчете рабочих режимов объектов одним из важнейших показателей являются критические числа оборотов вала, в окрестности значений которых любая несимметрия вала приводит к неустойчивости работы механизмов. Знание этих критических скоростей вращения позволяет так спроектировать конструкцию, чтобы отсутствовал резонанс изгибных колебаний вала на всем диапазоне значений его оборотов.

В работах [2,3] предложен конструктивный алгоритм определения критических скоростей вращения упругих валов на основе его дискретной модели – системы твердых тел, связанных упругими шарнирами (ССТТ). Сравнительная простота конечномерной модели ССТТ позволила для системы, состоящей из двух и трех тел, выписать критические скорости в явном виде. Результаты исследований [2-4] дают возможность утверждать, что найденные скорости с достаточной степенью точности определяют значения низших резонансных скоростей и могут быть использованы в инженерных расчетах. В работах [2,3,5,6] были найдены критические скорости для систем с различным способом закрепления (свободные ССТТ, несвободные ССТТ и ССТТ полужамкнутого типа) и показано, что движение несимметричных объектов в окрестности значений этих скоростей неустойчиво. В [2] выделены две группы критических скоростей, которые были названы резонансными скоростями первого и второго типов. При этом оказалось, что резонансные скорости существуют лишь при определенном соотношении между экваториальными и осевыми моментами инерции тел. Так, в случае сплюснутых тел, которые мы получаем при увеличении числа тел в ССТТ, моделирующей упругий объект, эти скорости не могут быть найдены. Однако такая же проблема существует и при изучении непрерывных стержневых систем, что, как отмечено в [7], является следствием неучета сдвиговых деформаций упругого объекта. В этой связи в работе [8] был введен в рассмотрение упругий обобщенный универсальный шарнир, который учитывает не только вращательные, но и поступательные относительные движения связанных тел. Для системы двух одинаковых тел, связанных обобщенным упругим универсальным шарниром, движущейся по инерции, в [8] изучено ее равномерное вращение вокруг оси коллинеарной вектору скорости центра масс ССТТ. Оказалось,

что учет дополнительных степеней свободы обобщенного упругого шарнира, моделирующих сдвиговые деформации упругого объекта, позволил расширить спектр резонансных скоростей вращения.

Полученные результаты подтверждают необходимость введения сдвига в упругие сочленения и установления соответствия между упругими параметрами дискретной (ССТТ) и непрерывной (стержневой) моделей, позволяющего судить об их адекватности. В настоящей работе эта задача решена для системы полузамкнутого типа [1]. Определены жесткости изгиба и сдвига, при которых конечномерная разностная система аппроксимирует непрерывную. Доказано, что при  $n \rightarrow \infty$  решение конечномерной задачи сходится к решению непрерывной. Следует отметить, что эти результаты легко могут быть распространены на свободные и несвободные ССТТ [2].

В заключительной части настоящей работы рассмотрена система двух тел, связанных обобщенным упругим шарниром, для которой определены резонансные скорости первого и второго типов.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим систему  $n$  гироскопов Лагранжа  $S_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) типа дерева [9], связанных обобщенными упругими универсальными шарнирами. Полагаем, что точка  $O_1$  оси симметрии тела  $S_1$  неподвижна, а точка  $O_{n+1}$  оси симметрии тела  $S_n$  лежит на неподвижной оси  $O_1Z$ . Согласно определению данному в [1], эта ССТТ относится к классу систем полузамкнутого типа. Введем в рассмотрение систему координат  $O_1XYZ$  (орты  $i, j, k$ ), которая вращается вокруг неподвижной оси  $O_1Z$  с постоянной скоростью  $\omega$ . Эту систему в дальнейшем будем называть осевой. Кроме того, введем  $n$  связанных систем координат  $C_kX_kY_kZ_k$  (орты  $e_x^k, e_y^k, e_z^k$ ), в которых оси  $C_kZ_k$  коллинеарны осям симметрии тел  $S_k$ , а  $C_k$  — центр масс тела  $S_k$ . Положение  $k$ -той связанной системы координат по отношению к осевой определим углами  $\psi_k, \theta_k$  (рис.1), а  $k$ -той связанной системы по отношению к  $(k-1)$ -ой с помощью углов  $\alpha_k, \beta_k$  (рис.1).

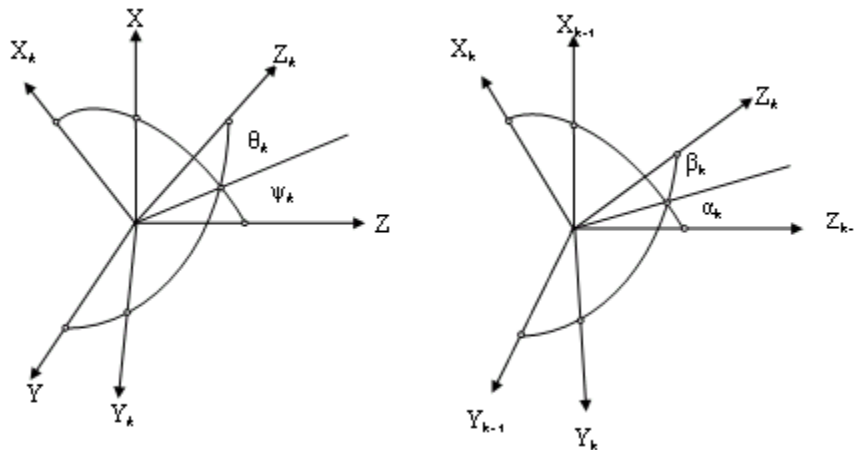


Рис. 1. Связанные и осевая системы координат.

Определим шарнир позволяющий учитывать изгибные и сдвиговые деформации следующим образом:

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Назовем шарнир с четырьмя степенями свободы, допускающий два ортогональных поворота тела  $S_k$  относительно тела  $S_{k-1}$  вокруг осей  $O_kX_{k-1}, O_kY_k$  и сдвиг тела  $S_k$  относительно  $S_{k-1}$  в плоскости  $O_kX_{k-1}Y_k$  (рис.2), обобщенным универсальным

шарниром. В упругих обобщенных универсальных шарнирах при поворотах и сдвигах возникают соответственно упругие моменты и силы, которые при малых угловых и сдвиговых перемещениях определяются силовой функцией

$$U = -\frac{1}{2} \sum_{k=2}^n [\alpha^2(\alpha_k^2 + \beta_k^2) + \nu^2(d_{kx}^2 + d_{ky}^2)] + \dots, \quad (1)$$

где  $\alpha^2$  и  $\nu^2$  соответственно коэффициенты жесткости изгиба и сдвига;  $d_{kx}, d_{ky}$  – смещение вдоль осей  $O_k X_{k-1}, O_k Y_k$ ; многоточием обозначены члены более высокого порядка малости по сравнению с величинами малых углов и смещений.

Полагая далее сдвиги и повороты малыми, считаем малыми величины  $\psi_k, \theta_k, \alpha_k, \beta_k$ . В этом случае, как и в [2,3], углы  $\alpha_k, \beta_k$  поворота тела  $S_k$  относительно тела  $S_{k-1}$  связаны с углами вращения тела  $S_k$  относительно осевой системы координат соотношениями

$$\alpha_k = \psi_k - \psi_{k-1}, \quad \beta_k = \theta_k - \theta_{k-1} \quad (k = \overline{2, n}). \quad (2)$$

Вектор  $\mathbf{d}_k$  сдвиговых деформаций в осевой системе координат представим в виде

$$\mathbf{d}_k = d_{kx}\mathbf{i} + d_{ky}\mathbf{j} \quad (k = \overline{2, n}). \quad (3)$$

Допустим, что расстояния между шарнирами  $O_k O_{k+1}$  ( $k = \overline{2, n-1}$ ) одинаковы и равны  $h$ , а центр масс тела  $S_k$  равноудален от шарниров  $O_k$  и  $O_{k+1}$ . Тогда при условии  $O_k C_k = c$  имеем  $h = 2c$ . Кроме того будем считать  $O_1 O_2 = O_n O_{n+1} = c$  и  $O_1 C_1 = O_n C_n = c/2$ .

Обозначим координаты центра масс тела  $S_k$  в осевой системе координат через  $x_k, y_k, z_k$ , тогда

$$\mathbf{OC}_k = x_k\mathbf{i} + y_k\mathbf{j} + z_k\mathbf{k}. \quad (4)$$

При малых  $\psi_k, \theta_k$  с учетом (3) имеем

$$x_1 = c\psi_1/2, \quad y_1 = c\theta_1/2; \quad (5)$$

$$x_k = x_{k-1} + d_{kx} + c(\psi_k + \psi_{k-1}), \quad y_k = y_{k-1} + d_{ky} + c(\theta_k + \theta_{k-1}) \quad (k = \overline{2, n-1}); \quad (6)$$

$$x_n = x_{n-1} + d_{nx} + c(\psi_n/2 + \psi_{n-1}), \quad y_n = y_{n-1} + d_{ny} + c(\theta_n/2 + \theta_{n-1});$$

$$z_1 = c/2, \quad z_k = 2kc \quad (k = \overline{2, n}); \quad z_n = (4n-1)c/2.$$

Из условия  $O_{n+1} \in O_1 Z$  следует, что  $\mathbf{O}_1 \mathbf{O}_{n+1} \cdot \mathbf{i} = 0$ ;  $\mathbf{O}_1 \mathbf{O}_{n+1} \cdot \mathbf{j} = 0$  или

$$c(\psi_1 + \psi_n) + 2c \sum_{k=2}^{n-1} \psi_k + \sum_{k=2}^n d_{kx} = 0, \quad c(\theta_1 + \theta_n) + 2c \sum_{k=2}^{n-1} \theta_k + \sum_{k=2}^n d_{ky}. \quad (7)$$

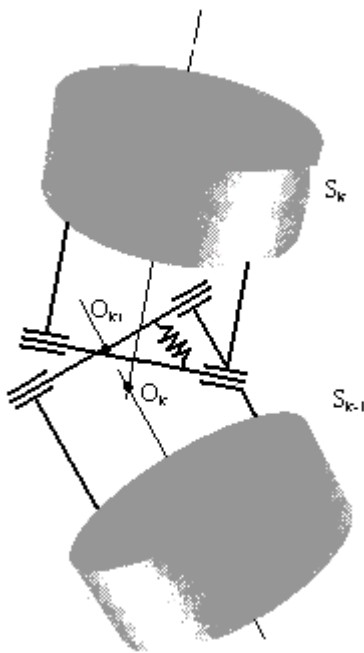


Рис. 2. Обобщенный универсальный шарнир.

Исключая из (7)  $d_{kx}$ ,  $d_{ky}$  с помощью соотношений (5), (6), получаем

$$x_n = -c\psi_n/2, \quad y_n = -c\theta_n/2. \quad (8)$$

Из (1) с учетом (4)-(6) следует, что потенциальная энергия изучаемой ССТТ такова

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \alpha^2 \sum_{k=2}^n [(\psi_k - \psi_{k-1})^2 + (\theta_k - \theta_{k-1})^2] + \frac{1}{2} \nu^2 \{ [x_2 - c(\psi_1 + \psi_2)]^2 + [y_2 - c(\theta_1 + \theta_2)]^2 \\ & + [x_{n-1} + c(\psi_n + \psi_{n-1})]^2 + [y_{n-1} + c(\theta_n + \theta_{n-1})]^2 + \sum_{k=3}^{n-1} [(x_k - x_{k-1} - c(\psi_k + \psi_{k-1}))^2 + \\ & + (y_k - y_{k-1} - c(\theta_k + \theta_{k-1}))^2] \} + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Кинетическая энергия системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \{ A_k(p_k^2 + q_k^2) + B_k r_k^2 + m_k v_{kc}^2 \}, \quad (10)$$

где  $A_k, B_k$  – соответственно центральный экваториальный и осевой моменты инерции тела  $S_k$ ;  $p_k, q_k, r_k$  – компоненты абсолютной угловой скорости тела  $S_k$  в связанной с ним системе координат;  $v_{kc}$  – скорость центра масс тела  $S_k$ .

Из (4) следует

$$v_{kc}^2 = (\dot{x}_k - \omega y_k)^2 + (\dot{y}_k + \omega x_k)^2. \quad (11)$$

Поскольку абсолютная угловая скорость тела  $S_k$  равна  $\boldsymbol{\omega}_k = \omega \mathbf{k} + \dot{\psi}_k \mathbf{j} + \dot{\theta}_k \mathbf{e}_x^k$ , то при малых деформациях (при этом считаем малыми  $\psi_k, \theta_k, \dot{\psi}_k, \dot{\theta}_k$ )

$$p_k = -\omega \psi_k + \dot{\theta}_k, \quad q_k = \omega \theta_k + \dot{\psi}_k, \quad r_k = \omega(1 - \psi_k^2/2 - \theta_k^2/2) - \theta_k \dot{\psi}_k. \quad (12)$$

Допустим, что тела  $S_k$  ( $k = \overline{2, n-1}$ ) одинаковы, тогда полагаем  $A_k = A$ ,  $B_k = B$ ,  $m_k = m$ . Кроме того, считаем, что  $A_1 + mc^2/4 = A_n + mc^2/4 = A/2$ ;  $B_1 = B_n = B/2$ . При таких предположениях после подстановки (11),(12) в (10) получим

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{4} \{ A[(\dot{\theta}_1 - \omega \psi_1)^2 + (\dot{\psi}_1 + \omega \theta_1)^2 + (\dot{\theta}_n - \omega \psi_n)^2 + (\dot{\psi}_n + \omega \theta_n)^2] + \\ & + B[-\omega^2(\psi_1^2 + \theta_1^2 + \psi_n^2 + \theta_n^2) - 2\omega(\theta_1 \dot{\psi}_1 + \theta_n \dot{\psi}_n)] \} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n-1} \{ A[(\dot{\theta}_k - \omega \psi_k)^2 + \\ & + (\dot{\psi}_k + \omega \theta_k)^2] + B[-\omega^2(\psi_k^2 + \theta_k^2) - 2\omega \theta_k \dot{\psi}_k] + m[(\dot{x}_k - \omega y_k)^2 + (\dot{y}_k + \omega x_k)^2] \} + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Отметим, что выражения для кинетической и потенциальной энергии в случае  $n$  одинаковых твердых тел совпадают с (9), (13) в случае, если точки опоры расположены в центрах масс тел  $S_1$  и  $S_n$ . При этом точка  $O_1$  совпадает с точкой  $C_1$ , а  $O_{n+1}$  с точкой  $C_n$  и  $y_1 = y_n = x_1 = x_n = 0$ .

**2. Уравнения движения.** Как установлено в [10], уравнения движения ССТТ полузамкнутого типа допускают решение, соответствующее равномерному вращению ССТТ как

одного целого вокруг неподвижной оси. Это движение соответствует положению равновесия ССТТ в осевой вращающейся системе координат. Во введенных выше обобщенных координатах соответствующее решение запишется так

$$\psi_k = \theta_k = \dot{\psi}_k = \dot{\theta}_k = 0 \quad (k = \overline{1, n}); \quad x_k = y_k = \dot{x}_k = \dot{y}_k = 0 \quad (k = \overline{2, n}). \quad (14)$$

Подставим (9), (13) в лагранжиан системы  $L = T - \Pi$  и запишем уравнения движения в форме уравнений Лагранжа второго рода, линеаризовав их в окрестности решения (14). Имеем

$$\begin{aligned} A\ddot{u}_1 - iB\omega\dot{u}_1 - 2\alpha^2(u_2 - u_1) - 2c\nu^2[v_2 - c(u_2 + u_1)] &= 0; \\ A\ddot{u}_2 - iB\omega\dot{u}_2 - \alpha^2(u_3 - 2u_2 + u_1) - c\nu^2[v_3 - c(u_1 + 2u_2 + u_3)] &= 0; \\ A\ddot{u}_k - iB\omega\dot{u}_k - \alpha^2(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) - c\nu^2[v_{k+1} - v_{k-1} - c(u_{k-1} + 2u_k + u_{k+1})] &= 0 \\ k = \overline{3, n-2}; & \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} A\ddot{u}_{n-1} - iB\omega\dot{u}_{n-1} - \alpha^2(u_n - 2u_{n-1} + u_{n-2}) - c\nu^2[v_{n-1} - c(u_{n-2} + 2u_{n-1} + u_n)] &= 0; \\ A\ddot{u}_n - iB\omega\dot{u}_n + 2\alpha^2(u_n - u_{n-1}) + 2c\nu^2[v_{n-1} + c(u_n + u_{n-1})] &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m\ddot{v}_2 - \nu^2[v_3 - 2v_2 + c(u_1 - u_3)] &= 0; \\ m\ddot{v}_k - \nu^2[v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1} + c(u_{k-1} - u_{k+1})] &= 0 \quad k = \overline{3, n-2}; \\ m\ddot{v}_{n-1} - \nu^2[v_{n-2} - 2v_{n-1} + c(u_{n-2} - u_n)] &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь  $u_k = e^{i\omega t}(\psi_k + i\theta_k)$ ;  $v_k = e^{i\omega t}(x_k + iy_k)$ . Для переменных  $\bar{u}_k, \bar{v}_k$  уравнения получаются сопряжением соответственно уравнений (15), (16).

Из системы (16) находим

$$\begin{aligned} u_3 - u_1 &= a\ddot{v}_2 - c_1(v_3 - 2v_2), \\ u_{k+1} - u_{k-1} &= a\ddot{v}_k - c_1(v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}), \\ u_n - u_{n-2} &= -a\ddot{v}_n - c_1(2v_{n-1} - v_{n-2}), \end{aligned} \quad (17)$$

где  $c_1 = 1/c$ ,  $a = mc_1/\nu^2$ .

Используя уравнения (17), исключаем из системы (15) переменные  $u_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ). Полученные уравнения могут быть приведены к виду

$$\begin{aligned} Aa\ddot{\ddot{v}}_k - Bi\omega a\ddot{\ddot{v}}_k - (Ac_1 + ac^2\nu^2 + a\alpha^2)(\ddot{v}_{k+1} - 2\ddot{v}_k + \ddot{v}_{k-1}) + 4a\nu^2c^2\ddot{v}_k + \\ + Bi\omega c_1(\dot{v}_{k+1} - 2\dot{v}_k + \dot{v}_{k-1}) + \alpha^2c_1(v_{k+2} - 4v_{k+1} + 6v_k - 4v_{k-1} + v_{k-2}) & \quad (18) \\ k = \overline{2, n-1}, \end{aligned}$$

$$v_1 = v_n = 0, \quad (v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1})/h = 0, \quad (v_0 - 2v_1 + v_2)/2 = 0. \quad (19)$$

**3. Уравнения движения при  $n \rightarrow \infty$ .** Посмотрим какую непрерывную систему описывает изучаемая ССТТ при условии, что число тел в системе неограниченно растет. Представим систему (18) следующим образом:

$$K_1\ddot{\ddot{v}}_k - i\omega K_2\ddot{\ddot{v}}_k - K_3(\ddot{v}_{k+1} - 2\ddot{v}_k + \ddot{v}_{k-1})/h^2 + \ddot{v}_k + i\omega K_4(\dot{v}_{k+1} -$$

$$-2\dot{v}_k + \dot{v}_{k-1})/h^2 + K_5(v_{k+2} - 4v_{k+1} + 6v_k - 4v_{k-1} + v_{k-2})/h^4 = 0 \quad (20)$$

$$k = \overline{2, n-1}.$$

Здесь коэффициенты  $K_i (i = \overline{1, 5})$  равны

$$K_1 = \frac{A}{\nu^2 h^2}, \quad K_2 = \frac{B}{\nu^2 h^2}, \quad K_3 = \frac{A}{\rho S h} - \frac{h^2}{4} + \frac{\varkappa^2 h}{\nu^2},$$

$$K_4 = \frac{B}{\rho S h}, \quad K_5 = \frac{\varkappa^2 h}{\rho S}. \quad (21)$$

В [11] доказано, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} A/h = \rho J; \quad \lim_{h \rightarrow 0} B/h = 2\rho J; \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varkappa^2 h = EJ, \quad (22)$$

где  $\rho$  – плотность материала,  $S$  – площадь поперечного сечения,  $J$  – момент инерции плоского сечения,  $E$  – модуль Юнга материала.

Найдем предельное значение коэффициента сдвига  $\nu^2$ . Для этого рассмотрим выражение для упругой силы сдвиговых деформаций в дискретном и непрерывном случаях. Согласно (1) компоненты  $u_k^x$ ,  $u_k^y$  упругой силы в  $k$ -том упругом шарнире равны  $u_k^x = -\nu^2 d_{kx}$ ;  $u_k^y = -\nu^2 d_{ky}$ . Тогда, учитывая (6), имеем

$$u_k^x = -\nu^2 h \left( \frac{x_k - x_{k-1}}{h} - \frac{\psi_k + \psi_{k-1}}{2} \right), \quad u_k^y = -\nu^2 h \left( \frac{y_k - y_{k-1}}{h} - \frac{\theta_k + \theta_{k-1}}{2} \right). \quad (23)$$

В случае стержневой модели поперечные силы в плоскостях  $OX$  и  $OY$  соответственно равны

$$Q_x = kGS \left( \frac{\partial x}{\partial z} - \psi \right), \quad Q_y = kGS \left( \frac{\partial y}{\partial z} - \theta \right), \quad (24)$$

где  $k$  – коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения и характеризующий деформацию материала;  $G$  – модуль сдвига. При уменьшении длины оси  $h$  тела  $S_k$  упругие силы (23), действующие в шарнирах, стремятся к силам (24), действующим в плоском сечении, то есть  $u_k^x \rightarrow Q_x$ ,  $u_k^y \rightarrow Q_y$ . Как и в [8,10], номер  $k$ -го шарнира при переходе от ССТТ к непрерывному стержню можно трактовать как координату по оси  $OZ$ , тогда  $x_k = x(z_k)$ ,  $y_k = y(z_k)$ , а  $z_k - z_{k-1} = h$  ( $k = \overline{2, n}$ ). Кроме того,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_k - x_{k-1}}{h} = \frac{\partial x}{\partial z}; \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y_k - y_{k-1}}{h} = \frac{\partial y}{\partial z}.$$

Отсюда заключаем, что выражения сил, определенных соотношениями (23), (24), совпадают в пределе при  $h \rightarrow 0$ , если

$$\lim_{h \rightarrow 0} \nu^2 h = kGS. \quad (25)$$

Поскольку имеем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}{h^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}; \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_{k+2} - 4x_{k+1} + 6x_k - 4x_{k-1} + x_{k+2}}{h^4} = \frac{\partial^4 x}{\partial z^4},$$

(аналогичные соотношения получаются заменой  $x$  на  $y$ ), то с учетом (22), (25) можно утверждать, что согласно определению [12] разностная задача (19), (20) аппроксимирует дифференциальную задачу

$$\frac{\rho J}{kJS} \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} - 2i\omega \frac{\rho J}{kJS} \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2i\omega \frac{J}{S} \frac{\partial^3 v}{\partial z^2 \partial t} - \frac{J}{S} \left(1 + \frac{E}{kG}\right) \frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{EJ}{\rho S} \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} = 0 \quad (26)$$

с граничными условиями

$$v \Big|_{z=0}^{z=\ell} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \Big|_{z=0}^{z=\ell} = 0, \quad (27)$$

где  $\ell = nh$  – длина стержня.

Система (26), (27) описывает малые колебания упругого вращающегося вала с двумя опорами на концах.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как показывают результаты исследований [2,10], изучение задач с другими граничными условиями никаких принципиальных отличий не имеет и выбор жесткостей упругих сочленений, согласно (22), (25), гарантирует, что изучаемая разностная задача аппроксимирует дифференциальную с соответствующими граничными условиями.

**4. Исследование решений уравнений дискретной ССТТ при  $n \rightarrow \infty$ .** Как установлено в [11], дифференциальная граничная задача (26), (27) имеет общее решение

$$v = \sum_j D_j e^{i\lambda_j t} \sin jz \quad (28)$$

(здесь полагалось, что длина стержня  $\ell = \pi$ , чего всегда можно добиться соответствующей заменой переменных). В (28)  $\lambda_j$  – корень уравнения

$$\frac{\rho J}{kGS} \lambda_j^4 - 2\omega \frac{\rho J}{kGS} \lambda_j^3 - \lambda_j^2 \left[1 + \frac{Jj^2}{S} \left(1 + \frac{E}{kG}\right)\right] + 2\omega \frac{Jj^2}{S} \lambda_j + \frac{EJj^4}{\rho S} = 0, \quad (29)$$

а постоянные  $D_j$  определяются из начальных условий.

Решение дискретной системы разыскивалось в виде

$$v_k = \sum_{j=1}^{n-1} D_j e^{i\mu_j t} \sin kjh. \quad (30)$$

Подставив (30) в (20), получим следующее уравнение для определения  $\mu_j$ :

$$K_1 \mu_j^4 - K_2 \omega \mu_j^3 - [1 + \sigma K_3] \mu_j^2 + K_4 \sigma \omega \mu_j + K_5 \sigma^2 = 0, \quad (31)$$

где  $\sigma = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{jh}{2}$ , а  $K_i$  ( $i = \overline{1,5}$ ) определены в (21).

Пусть число тел в ССТТ неограниченно растет, при этом  $h \rightarrow 0$ . Устремим  $h \rightarrow 0$  в уравнении (31). Тогда, учитывая соотношения (22), (25) и  $\lim_{h \rightarrow 0} \sigma = j^2$ , получаем, что коэффициенты уравнения (31) в пределе совпадают с коэффициентами уравнения (26), откуда заключаем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mu_j = \lambda_j. \quad (32)$$

Составляя норму разности решений уравнений (26) и (20), описывающих соответственно движение непрерывной и дискретной систем, и учитывая (32), получим

$$\left\| \sum_{j=1}^{n-1} D_j e^{i(\lambda_j - \mu_j)t} \sin kjh + \sum_{j=n}^{\infty} D_j e^{i\lambda_j t} \sin kjh \right\| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0,$$

откуда по определению [12] следует, что решение конечномерной задачи сходится к решению непрерывной.

Таким образом, решение уравнений дискретной модели может использоваться для анализа поведения упругих объектов при условии, что параметры упругих шарниров выбраны согласно (22), (25).

**5. Резонансные скорости в случае  $n = 2$ .** Пусть ССТТ состоит из двух одинаковых тел. Тогда считаем  $O_1 C_1 = O_2 C_2 = O_1 O_2 / 2 = O_2 O_3 / 2 = c$ . В этом случае, учитывая, что  $O_3 \in O_1 Z$ , имеем  $d_{2x} = h(\psi_1 + \psi_2)$ ;  $d_{2y} = h(\theta_1 + \theta_2)$  и уравнения (15) принимают вид

$$\begin{aligned} A\ddot{u}_1 - Bi\omega\dot{u}_1 - \varkappa^2(u_2 - u_1) + h^2\nu^2(u_2 + u_1), \\ A\ddot{u}_2 - Bi\omega\dot{u}_2 + \varkappa^2(u_2 - u_1) + h^2\nu^2(u_2 + u_1). \end{aligned} \quad (33)$$

Составляя сумму и разность уравнений (33) и вводя новые переменные  $u_1 + u_2 = w_1$ ,  $u_1 - u_2 = w_2$ , получим

$$A\ddot{w}_1 - Bi\omega\dot{w}_1 + 2h^2\nu^2 w_1 = 0, \quad A\ddot{w}_2 - Bi\omega\dot{w}_2 + 2\varkappa^2 w_2 = 0. \quad (34)$$

Разыскивая решение уравнений (34) в виде  $w_1 = W_1 e^{i\lambda t}$ ,  $w_2 = W_2 e^{i\mu t}$ , получаем

$$-A\lambda^2 + B\omega\lambda + 2h^2\nu^2 = 0, \quad -A\mu^2 + B\omega\mu + 2\varkappa^2 = 0. \quad (35)$$

Согласно [2], находим резонансные скорости первого типа из условия  $\lambda = \omega$ ,  $\mu = \omega$ . Имеем

$$\omega_1^2 = \frac{2\varkappa^2}{A - B}; \quad \omega_2^2 = \frac{2h^2\nu^2}{A - B}.$$

Таким образом, кроме известной [5] резонансной скорости (34), определена еще одна, зависящая от жесткости сдвига.

Вторые резонансные скорости находятся из условия

$$\lambda + \mu = 2\omega. \quad (36)$$

Тогда, записывая соотношения Виетта для корней уравнений (35) и требуя выполнения (36), получаем уравнение для определения резонансных скоростей второго типа. Это уравнение имеет следующий вид

$$4\omega^4(2 - b)^2(1 - b) - 2\omega^2(2 - b)^2(c_2 + c_1)^2 + (c_1 - c_2)^2 = 0. \quad (37)$$

Здесь  $b = B/A$ ,  $c_1 = 2h\nu^2/A$ ,  $c_2 = 2\varkappa^2/A$ .

В случае сплюснутых тел  $b > 1$  и у уравнения (37) существует один положительный корень  $\omega_3^2 > 0$ . В случае же вытянутых тел  $b < 1$  и, поскольку дискриминант уравнения (37)  $d = 16c_1c_2(1 - b) + b^2(c_1 + c_2)^2 > 0$ , оно имеет два действительных положительных корня  $\omega_{41}^2, \omega_{42}^2$ .



Таким образом, в отличие от результатов полученных в [5], учет сдвиговых деформаций позволил найти новые резонансные скорости, причем эти скорости существуют как для вытянутых, так и для сплюснутых тел. Аналогичный результат был получен в [8] при изучении движения свободной ССТТ, состоящей из двух тел. Полученные результаты подтверждают, что при исследовании устойчивости равномерных вращения упругих стержневых объектов необходимо введение в модельных задачах обобщенных упругих шарниров.

1. Болграбская И.А., Савченко А.Я. Системы твердых тел, образующих полузамкнутую цепь// Механика твердого тела.–1994.– Вып. 26(1).– С. 33 – 39
2. Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононыхин Г.А. Устойчивость движения систем связанных твердых тел. – Киев: Наук. думка, 1991.– 168 с.
3. Болграбская И.А., Нестеров О.Ю. Определение резонансных частот в упругих стержневых системах // Механика твердого тела. – 1993. – Вып. 25.– С. 90 – 94.
4. Bolgrabskaya I.A. Resonance velocities with half-closed chain// Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. Международный сборник. – Казань, 2001 – 7, вып. 1(13). – С. 22–28.
5. Шепеленко О. Об устойчивости равномерных вращений системы гироскопов Лагранжа в случае резонансов второго рода // Механика твердого тела. – 1999. – Вып. 28.– С. 99– 104.
6. Диминтберг Ф.М. Изгибные колебания вращающихся валов. – М: Изд-во АН СССР, 1959. – 248 с.
7. Болграбская И.А. Влияние сдвиговых деформаций в системе двух гироскопов Лагранжа на резонансные частоты// Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – №2. – С. 33–36.
8. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. – М.: Мир, 1980. – 292 с.
9. Болграбська І.О. Дослідження динамічних властивостей систем зв'язаних твердих тіл і їх застосування до вивчення властивостей стержневих конструкцій. – Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. – Донецьк, 1999. – 33 с.
10. Болграбская И.А. Уравнения движения систем связанных твердых тел и малые колебания упругих стержней// Динамика систем связанных твердых тел и тел с полостями, содержащими жидкость. – Донецьк, 1990. – С. 19-27 (Препр. АН Украины, Ин-т прикл. математики и механики, N 90.03).
11. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. – М.: Наука, 1972. – 400 с.