ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2008. Вып. 38

УДК 531.55

©2008. **Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, А.Л. Рачинская**

ВРАЩЕНИЯ СПУТНИКА С ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ МОМЕНТА СИЛ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ

Исследуется быстрое вращательное движение относительно центра масс динамически несимметричного спутника с полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью при малых числах Рейнольдса, под действием момента сил светового давления. Орбитальные движения вокруг Солнца с произвольным эксцентриситетом предполагаются заданными. Анализируется система, полученная после усреднения по движению Эйлера–Пуансо. Установлен эффект убывания кинетической энергии вращательных движений спутника. Определена ориентация вектора кинетического момента в орбитальной системе координат. Проведены численный анализ в общем случае и аналитическое исследование в окрестности осевого вращения. Рассмотрено движение в частном случае динамически симметричного спутника.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение спутника относительно центра масс под действием момента сил светового давления. Тело содержит полость, целиком заполненную сильно вязкой однородной жидкостью. Вращательные движения рассматриваются в рамках модели динамики квазитвердого тела, центр масс которого движется по заданной фиксированной эллиптической орбите вокруг Солнца [1]. Задачи динамики, обобщенные и осложненные учетом различных возмущающих факторов, и в настоящее время остаются достаточно актуальными. Исследованиям вращательных движений тел относительно центра масс под действием возмущающих моментов сил различной природы (гравитационных, светового давления, полости, заполненной вязкой жидкостью, и др.), близким к проведенному ниже, посвящены работы [1–12].

Введем три декартовые системы координат, начало которых совместим с центром инерции спутника [2, 3]. Система координат Ox_i $(i = 1, 2, 3)$ движется поступательно вместе с центром инерции: ось Ox_1 параллельна радиусу–вектору перигелия орбиты, ось Ox_2 – вектору скорости центра масс спутника в перигелии, ось Ox_3 – нормали к плоскости орбиты. Система координат $Oy_i\,(i = 1, 2, 3)$ связана с вектором кинетического момента $\mathbf{G}$. Ось Oy_3 направлена по вектору кинетического момента $\mathbf{G}$, ось Oy_2 лежит в плоскости орбиты (т.е. в плоскости Ox_1x_2), ось Oy_1 лежит в плоскости Ox_3y_3 и направлена так, что векторы $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ образуют правую тройку [2 – 4]. Оси системы координат Oz_i $(i = 1, 2, 3)$ связаны с главными центральными осями инерции твердого тела. Взаимное положение главных центральных осей инерции и осей Oy_i определим углами Эйлера. При этом направляющие косинусы α_{ij} осей Oz_i относительно системы Oy_i выражаются через углы Эйлера φ, ψ, θ по известным формулам [2]. Положение вектора кинетического момента $\mathbf{G}$ в системе координат Ox_i определяется углами λ и δ, как показано в [2–4].

Уравнения движения тела относительно центра масс запишем в форме [3]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dG}{dt} = L_3, \qquad \frac{d\delta}{dt} = \frac{L_1}{G}, \qquad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{L_2}{G\sin\delta},\\
&\frac{d\theta}{dt} = G\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{A_1}-\frac{1}{A_2}\right) + \frac{L_2\cos\psi - L_1\sin\psi}{G},\\
&\frac{d\varphi}{dt} = G\cos\theta\left(\frac{1}{A_3}-\frac{\sin^2\varphi}{A_1}-\frac{\cos^2\varphi}{A_2}\right) + \frac{L_1\cos\psi + L_2\sin\psi}{G\sin\theta},\\
&\frac{d\psi}{dt} = G\left(\frac{\sin^2\varphi}{A_1}+\frac{\cos^2\varphi}{A_2}\right) - \frac{L_1\cos\psi + L_2\sin\psi}{G}\mathrm{ctg}\theta - \frac{L_2}{G}\mathrm{ctg}\delta.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь L_i – моменты приложенных сил относительно осей Oy_i, G – величина кинетического момента, $A_i\,(i=1,2,3)$ – главные центральные моменты инерции относительно осей Oz_i.

В некоторых случаях удобно наряду с переменной θ использовать в качестве дополнительной переменной важную характеристику – кинетическую энергию T, производная которой имеет вид

$$
\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} = \frac{2T}{G}L_3 + G\sin\theta\Bigg[&\cos\theta\left(\frac{\sin^2\varphi}{A_1}+\frac{\cos^2\varphi}{A_2}-\frac{1}{A_3}\right)(L_2\cos\psi - L_1\sin\psi) +\\
&+ \sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{1}{A_1}-\frac{1}{A_2}\right)(L_1\cos\psi + L_2\sin\psi)\Bigg].
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Центр масс спутника движется по кеплеровскому эллипсу с эксцентриситетом e и периодом обращения Q. Зависимость истинной аномалии ν от времени t дается соотношением

$$
\frac{d\nu}{dt} = \frac{\omega_0(1+e\cos\nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}}, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{Q} = \sqrt{\frac{\mu(1-e^2)^3}{\ell_0^3}}. \tag{3}
$$

Здесь ℓ_0 – фокальный параметр орбиты, ω_0 – угловая скорость орбитального движения, e – эксцентриситет орбиты, μ – гравитационная постоянная.

Проекции L_i момента приложенных сил складываются из момента сил светового давления L_i^c и момента сил вязкой жидкости в полости L_i^p.

Допустим, что поверхность космического аппарата представляет собой поверхность вращения, причем единичный орт оси симметрии $\mathbf{k}$ направлен вдоль оси Oz_3. Как показано в [2, 5], в этом случае для момента сил светового давления, действующего на спутник, имеет место формула

$$
\mathbf{L}^c = \left(a_c(\varepsilon_s)\,R_0^2/R^2\right)\mathbf{e_r}\times\mathbf{k}, \tag{4}
$$

$$
a_c(\varepsilon_s)\frac{R_0^2}{R^2} = p_c S(\varepsilon_s)\,Z_0^{|}(\varepsilon_s), \qquad p_c = \frac{E_0}{c}\left(\frac{R_0}{R}\right)^2.
$$

Здесь $\mathbf{e}_r$ – единичный вектор по направлению радиус-вектора орбиты; ε_s – угол между направлениями $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{k}$ так, что $|\mathbf{e_r} \times \mathbf{k}| = \sin \varepsilon_s$; R – текущее расстояние от центра Солнца до центра масс спутника; R_0 – фиксированное значение R, например, в начальный момент времени; $a_c\,(\varepsilon_s)$ – коэффициент момента сил светового давления, определяемый свойствами поверхности; S – площадь "тени" на плоскости, нормальной к потоку; $Z_0^|$ – расстояние от центра масс до центра давления; p_c – величина светового давления на расстоянии R от центра Солнца; c – скорость света; E_0 – величина потока энергии светового давления на расстоянии R_0 от центра Солнца.

Проекции L_i^p момента сил вязкой жидкости в полости на оси Oy_i $(i = 1, 2, 3)$ имеют вид [1]:

$$L_i^p = \frac{P}{A_1 A_2 A_3}\Big\{p\big[q^2 A_2 (A_1 -$$

$$- A_2)(A_2 - A_3 + A_1) + r^2 A_3 (A_1 - A_3)(A_3 - A_2 + A_1)\big]\alpha_{i1} +$$
$$+ q\big[r^2 A_3 (A_2 - A_3)(A_3 - A_1 + A_2) + p^2 A_1 (A_1 - A_2)(A_3 - A_1 - A_2)\big]\alpha_{i2} +$$
$$+ r\big[p^2 A_1 (A_3 - A_1)(A_1 - A_2 + A_3) + q^2 A_2 (A_3 - A_2)(A_2 - A_1 + A_3)\big]\alpha_{i3} +$$
$$+ a_c(\cos\varepsilon_s) R_0^2/R^2 \Big\{A_3\Big[\frac{A_2}{1-\alpha_{33}^2}\Big((p\alpha_{31} + q\alpha_{32})(\gamma_{31}\alpha_{33} - \alpha_{22}\beta_1 + \alpha_{12}\beta_2) +$$
$$+ \alpha_{32}\gamma_{33}(p\alpha_{32} - q\alpha_{31})\Big) - r\gamma_{31}(A_1 + A_3)\Big]\alpha_{i1} + A_3\Big[\frac{A_1}{1-\alpha_{33}^2}\Big((p\alpha_{31} + q\alpha_{32}) \times$$
$$\times (\alpha_{11}\beta_2 - \gamma_{32}\alpha_{33} - \alpha_{21}\beta_1) + \alpha_{31}\gamma_{33}(p\alpha_{32} - q\alpha_{31})\Big) + r\gamma_{32}(A_2 + A_3)\Big]\alpha_{i2} +$$
$$+ [q\gamma_{32} A_2 (A_1 - A_2 - A_3) + p\gamma_{31} A_1 (A_1 - A_2 + A_3)]\alpha_{i3}\Big\}\Big\}, \tag{5}$$

$$\gamma_{3i} = \beta_1\alpha_{1i} + \beta_2\alpha_{2i} + \beta_3\alpha_{3i} \quad (i = 1, 2, 3),$$
$$\beta_1 = \cos(\nu - \lambda)\cos\delta, \qquad \beta_2 = \sin(\nu - \lambda), \qquad \beta_3 = \cos(\nu - \lambda)\sin\delta.$$

Здесь α_{ij} – направляющие косинусы между системами координат Oy_i и Oz_i $(i = 1, 2, 3)$; p, q, r – проекции на оси Oz_i вектора абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ спутника относительно системы координат $Ox_1x_2x_3$.

Величина $\widetilde{P}$ – тензор, зависящий только от формы полости, характеризует диссипативный момент сил, обусловленный вязкостью жидкости, в квазистатическом приближении [1]. Для простоты в уравнениях (5) рассмотрен так называемый скалярный тензор, определенный одной скалярной величиной $P > 0$; компоненты его имеют вид $\widetilde{P}_{ij} = P\delta_{ij}$, где δ_{ij} – символы Кронекера (такой вид тензор $\widetilde{P}$ имеет, например, в случае сферической полости). Если форма полости существенно отличается от сферической, то определение компонент тензора представляет значительные вычислительные трудности.

Рассматривается динамически несимметричный спутник, моменты инерции которого для определенности удовлетворяют неравенству $A_1 > A_2 > A_3$, в предположении, что угловая скорость ω движения спутника относительно центра масс существенно больше угловой скорости орбитального движения ω_0, т.е. $\varepsilon = \omega_0/\omega \sim A_1\omega_0/G \ll 1$. В этом случае кинетическая энергия вращения тела велика по сравнению с моментами возмущающих сил.

В работе предполагается, что в полости находится жидкость большой вязкости, т.е. $\vartheta \gg 1$ $(\vartheta^{-1} \sim \varepsilon^2)$, форма полости сферическая, тогда [1]

$$\widetilde{P} = P\mathrm{diag}(1,1,1), \quad P = \frac{8\pi\rho a^7}{525\vartheta}. \tag{6}$$

Здесь ρ, ϑ – плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости в полости, a – радиус полости.

В данной постановке задачи пренебрегаем моментом гравитационных сил. Соотношения между характерными величинами моментов гравитационных сил и моментов сил светового давления приведены в [2].

Полагаем [2], что в силу симметрии соответствующая функция имеет вид $a_c = a_c(\cos\varepsilon_s)$, и аппроксимируем ее тригонометрическим полиномом по степеням $\cos\varepsilon_s$. Представим функцию $a_c(\cos\varepsilon_s)$ в виде $a_c = a_0 + a_1\cos\varepsilon_s + \ldots$. Рассмотрим второй член разложения, когда $a_c(\cos\varepsilon_s) = a_1\cos\varepsilon_s$ в предположении, что $a_1 \sim \varepsilon$.

С учетом рассмотренных выше предположений видно, что второе слагаемое (с коэффициентом $a_c(\cos\varepsilon_s)$) в формуле проекции момента сил вязкой жидкости в полости (5) имеет порядок ε^3, а значит, с точностью до величин второго порядка малости $(P \sim \varepsilon^2)$ проекции момента сил вязкой жидкости в полости имеют вид

$$\begin{gathered} L_i^p = \frac{P}{A_1A_2A_3}\Big\{p\big[q^2A_2(A_1- \\ -A_2)(A_2-A_3+A_1) + r^2A_3(A_1-A_3)(A_3-A_2+A_1)\big]\alpha_{i1}+ \\ +q\big[r^2A_3(A_2-A_3)(A_3-A_1+A_2) + p^2A_1(A_1-A_2)(A_3-A_1-A_2)\big]\alpha_{i2}+ \\ +r\big[p^2A_1(A_3-A_1)(A_1-A_2+A_3) + q^2A_2(A_3-A_2)(A_2-A_1+A_3)\big]\alpha_{i3}\Big\} \\ (i=1,2,3). \end{gathered} \tag{7}$$

Ставится задача исследования эволюции вращений спутника на асимптотически большом интервале времени $t \sim \varepsilon^{-2}$, на котором происходит существенное изменение параметров движения.

2. Модифицированная процедура метода усреднения. Для исследования системы (1)–(3) при малом ε на промежутке времени $t \sim \varepsilon^{-2}$ будем применять модифицированную схему метода усреднения [3, 13, 14]. Рассмотрим невозмущенное движение $(\varepsilon = 0)$, когда моменты приложенных сил равны нулю. В этом случае вращение твердого тела является движением Эйлера–Пуансо. Величины $G, \delta, \lambda, T, \nu$ обращаются [15] в постоянные, а $\varphi,\ \psi,\ \theta$ – некоторые функции времени t. Медленными переменными в возмущенном движении будут $G,\ \delta,\ \lambda,\ T, \nu$, а быстрыми – углы Эйлера $\varphi,\ \psi,\ \theta$.

Рассмотрим движение при условии $2TA_1 \geq G^2 \geq 2TA_2$, соответствующем траекториям вектора кинетического момента, охватывающим ось наибольшего момента инерции A_1. Введем величину

$$k^2 = \frac{(A_2 - A_3)\left(2TA_1 - G^2\right)}{(A_1 - A_2)\left(G^2 - 2TA_3\right)} \quad \left(0 \leq k^2 \leq 1\right), \tag{8}$$

представляющую собой в невозмущенном движении постоянную – модуль эллиптических функций, описывающих это движение.

Для построения усредненной системы первого приближения подставим решение невозмущенного движения Эйлера–Пуансо в правые части уравнений движения (1), (2) и проведем усреднение по переменной ψ, а затем по времени t с учетом зависимости φ, θ от t по схеме, предложенной в [3] для нерезонансного случая. При этом для медленных переменных δ, λ, G, T сохраняются прежние обозначения. В результате получим

$$\begin{aligned}
&\frac{dG}{dt} = 0, \quad \frac{d\delta}{dt} = -a_1 R_0^2 \left(2GR^2\right)^{-1} H \sin\delta \sin 2(\lambda - \nu), \\
&\frac{d\lambda}{dt} = -a_1 R_0^2 \left(GR^2\right)^{-1} H \cos\delta \cos^2(\lambda - \nu), \\
&\frac{dT}{dt} = -\frac{4PT^2(A_1 - A_3)(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)}{3A_1^2 A_2^2 A_3^2 \left[A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)\, k^2\right]^2} \times \\
&\quad \times \left\{ A_2(A_1 - A_3)(A_1 + A_3 - A_2)\left[(k^2 - 1) + (1 + k^2)\frac{E(k)}{K(k)}\right] + \right. \\
&\quad + A_1(A_2 - A_3)(A_3 + A_2 - A_1)\left[(k^2 - 2)\left(1 - \frac{E(k)}{K(k)}\right) + k^2\right] + \\
&\quad \left. + A_3(A_1 - A_2)(A_1 + A_2 - A_3)\left[(1 - 2k^2)\left(1 - \frac{E(k)}{K(k)}\right) + k^2\right] \right\}, \\
&\qquad H = \frac{1}{2}\left[3a^2 \frac{E(k)}{K(k)} - 1\right] \quad \text{при} \quad 2TA_2 - G^2 > 0, \\
&\qquad H = \frac{1}{2}\left\{ \frac{3a^2}{k^2}\left[k^2 - 1 + \frac{E(k)}{K(k)}\right] - 1 \right\} \quad \text{при} \quad 2TA_2 - G^2 < 0, \\
&\qquad a^2 = \frac{\sigma + h}{1 + \sigma}, \quad \sigma = \frac{A_3}{A_1}\frac{A_1 - A_2}{A_2 - A_3}, \quad h = \left(\frac{2T}{G^2} - \frac{1}{A_2}\right)\frac{A_2 A_3}{A_2 - A_3}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $K(k)$ и $E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно [16]. Согласно первому уравнению (9) кинетический момент спутника остается постоянным и равен G_0. Дифференцируя выражение (8) для k^2 и используя уравнения для кинетической энергии (9), получим дифференциальное уравнение, которое не зависит от других переменных

[1, 9],

$$
\begin{aligned}
&\frac{dk^2}{d\xi} = (1-\chi)(1-k^2) - [(1-\chi)+(1+\chi)k^2]\frac{E(k)}{K(k)},\\
&\chi = \frac{3A_2[(A_1^2+A_3^2)-A_2(A_1+A_3)]}{(A_1-A_3)[A_2(A_1+A_3-A_2)+2A_1A_3]},\\
&\xi = (t-t_*)/N, \qquad N = \frac{3A_1^2A_2^2A_3^2}{PG_0^2(A_1-A_3)[A_2(A_1+A_3-A_2)+2A_1A_3]} \sim \varepsilon^{-2}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Здесь t_* – постоянная. Значению $k^2 = 1$ отвечает равенство $2TA_2 = G^2$, что соответствует сепаратрисе для движения Эйлера–Пуансо. Уравнение (10) описывает усредненное движение конца вектора кинетического момента $\mathbf{G}$ на сфере постоянного радиуса G_0.

3. Анализ усредненного собственного вращения спутника. Из уравнений движения (9) следует, что под влиянием момента сил вязкой жидкости в полости происходит эволюция кинетической энергии тела T в пределах от вращения вокруг оси A_3 (неустойчивое движение) до вращения вокруг оси A_1 (устойчивое движение). Изменения углов λ, δ зависят как от действия момента сил светового давления, так и от действия момента сил вязкой жидкости в полости. Выражение, стоящее в фигурных скобках правой части уравнения (9) для T, положительно (при $A_1 > A_2 > A_3$), так как справедливы неравенства $(1-k^2)K \le E \le K$. Поэтому $dT/dt < 0$, поскольку $T > 0$, т.е. переменная T строго убывает для любых $k^2 \in [0,\,1]$.

Рассмотрим систему, состоящую из четвертого уравнения системы (9) и уравнения (10). Проведем обезразмеривание в уравнении изменения кинетической энергии, считая характерными величинами задачи параметр N, определенный в (10), и момент инерции A_1. Имеем

$$
\begin{aligned}
\frac{dT'}{d\xi} = &-\frac{2(T')^2(A_1-A_2)(A_2-A_3)}{A_1\left[A_2\left(A_1+A_3-A_2\right)+2A_1A_3\right]\left[A_2-A_3+\left(A_1-A_2\right)k^2\right]^2}\times\\
&\times\left\{A_2(A_1-A_3)(A_1+A_3-A_2)\left[(k^2-1)+(1+k^2)\frac{E(k)}{K(k)}\right]+\right.\\
&+A_1(A_2-A_3)(A_3+A_2-A_1)\left[(k^2-2)\left(1-\frac{E(k)}{K(k)}\right)+k^2\right]+\\
&\left.+A_3(A_1-A_2)(A_1+A_2-A_3)\left[(1-2k^2)\left(1-\frac{E(k)}{K(k)}\right)+k^2\right]\right\},
\end{aligned}
\tag{11}
$$

где $T' = \dfrac{2A_1T}{G_0^2}$, ξ определяется согласно (10). Это равенство выполняется при $\xi > 0$, т.е. для случая $2TA_1 \ge G^2 \ge 2TA_2$.

Проведен численный расчет при значениях моментов инерции $A_1 = 8$, $A_2 = 5, 6, 7$, $A_3 = 4$; $\quad k^2(0) = 0.99999$, $G(0) = 1$. Начальное значение кинетической энергии находилось из равенства

$$T = \frac{G_0^2}{2}\frac{A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2(0)}{A_1(A_2 - A_3) + A_3(A_1 - A_2)k^2(0)}. \tag{12}$$

В безразмерном виде имеем

$$T' = \frac{A_1(A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2(0))}{A_1(A_2 - A_3) + A_3(A_1 - A_2)k^2(0)}.$$

Рассмотрен также случай $\xi < 0$, что соответствует $2TA_2 \geq G^2 \geq \geq 2TA_3$. Уравнение (11) записывается следующим образом:

$$\frac{dT'}{d\xi} = \frac{2(T')^2(A_3 - A_2)(A_2 - A_1)}{A_3\left[A_2\left(A_1 + A_3 - A_2\right) + 2A_1A_3\right]\left[A_3 - A_2 + \left(A_2 - A_1\right)k^2\right]^2}\times$$
$$\times\left\{A_2(A_3 - A_1)(A_1 + A_3 - A_2)\left[(k^2 - 1) + (1 + k^2)\frac{E(k)}{K(k)}\right] + \right.$$
$$+ A_3(A_2 - A_1)(A_1 + A_2 - A_3)\left[(k^2 - 2)\left(1 - \frac{E(k)}{K(k)}\right) + k^2\right] +$$
$$\left. + A_1(A_3 - A_2)(A_2 + A_3 - A_1)\left[(1 - 2k^2)\left(1 - \frac{E(k)}{K(k)}\right) + k^2\right]\right\}$$

с начальным условием

$$T' = \frac{A_3(A_2 - A_3 + (A_1 - A_2)k^2(0))}{A_1(A_2 - A_3) + A_3(A_1 - A_2)k^2(0)}.$$

В этом случае численный расчет проводился для значений моментов инерции

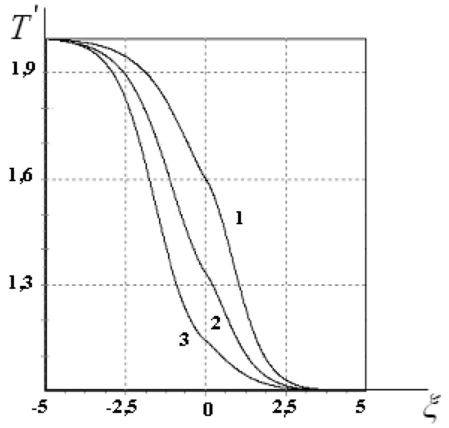

Рис. 1.

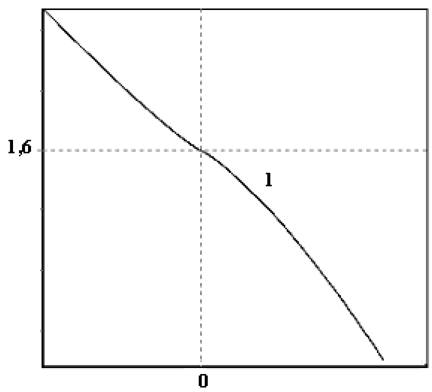

Рис. 2.

$A_1 = 4$; $A_2 = 5, 6, 7$; $A_3 = 8$. Графики изменения кинетической энергии имеют вид, представленный на рис. 1. Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям

$A_2 = 5, 6, 7$. Значение $T' = 2$ соответствует вращению около оси A_3 (неустойчивое движение), $T' = 1$ – вращению около оси A_1 (устойчивое движение). При $\xi = 0$ (переход через сепаратрису) кривые имеют горизонтальную касательную (точки перегиба, см. рис. 2). Аналогичные графики изменения кинетической энергии могут быть получены пересчетом из формулы (8) для безразмерной кинетической энергии

$$T' = \frac{A_1[(A_2 - A_3) + k^2(A_1 - A_2)]}{A_1(A_2 - A_3) + k^2 A_3(A_1 - A_2)}.$$

Отсюда видно, что при $k^2 \to 0$ имеем $T' \to 1$. Аналогично, для случая вращения около оси A_3 можно показать, что $T' \to 2$.

4. Ориентация вектора кинетического момента. Рассмотрим систему, состоящую из уравнений для λ и δ системы (9).

Как известно, $R = \dfrac{l_0}{1 + e\cos\nu}$, а фокальный параметр орбиты определяется равенством $l_0 = \dfrac{\mu^{1/3}(1 - e^2)}{\omega_0^{2/3}}$. Тогда первые два уравнения (9) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} &= -\frac{a_1 R_0^2}{2G}\frac{\omega_0^{4/3}(1 + e\cos\nu)^2}{\mu^{2/3}(1 - e^2)^2} H \sin\delta \sin 2(\lambda - \nu), \\ \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{a_1 R_0^2}{G}\frac{\omega_0^{4/3}(1 + e\cos\nu)^2}{\mu^{2/3}(1 - e^2)^2} H \cos\delta \cos^2(\lambda - \nu). \end{aligned} \tag{13}$$

Проведем обезразмеривание уравнения изменения кинетического момента (9), уравнений для истинной аномалии (3) и k^2 (10), уравнений системы (13). Характерными параметрами задачи являются G_0 – кинетический момент спутника при $t = 0$, Ω_0 – величина угловой скорости ω движения спутника относительно центра масс в начальный момент времени. Безразмерные величины определяются формулами

$$\tilde{t} = \Omega_0 t, \quad \tilde{G} = \frac{G}{G_0}, \quad \tilde{A}_i = \frac{A_i \Omega_0}{G_0}, \quad \tilde{L}_i = \frac{L_i}{G_0 \Omega_0}, \quad \tilde{T} = \frac{T}{G_0 \Omega_0}, \quad \varepsilon^2 \tilde{P} = \frac{P\Omega_0}{G_0}.$$

Введем обозначение

$$\Gamma = \frac{a_1 R_0^2 \Omega_0}{G_0 \mu^{2/3} \omega_0^{2/3}} \tag{14}$$

и назовем эту величину приведенным коэффициентом момента сил светового давления.

После обезразмеривания имеем систему уравнений движения

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\delta}{d\widetilde{t}} = -\varepsilon^2 \frac{\Gamma\,\widetilde{H}(1+e\cos\nu)^2}{2\,\widetilde{G}(1-e^2)^2}\sin\delta\sin 2(\lambda-\nu),\\
&\frac{d\lambda}{d\widetilde{t}} = -\varepsilon^2 \frac{\Gamma\,\widetilde{H}(1+e\cos\nu)^2}{\widetilde{G}(1-e^2)^2}\cos\delta\cos^2(\lambda-\nu),\\
&\frac{d\nu}{d\widetilde{t}} = \varepsilon\frac{(1+e\cos\nu)^2}{(1-e^2)^{3/2}}, \quad \frac{d\widetilde{G}}{d\widetilde{t}} = 0,\\
&\frac{dk^2}{d\widetilde{t}} = \varepsilon^2\frac{1}{\widetilde{N}}\left\{(1-\chi)\left(1-k^2\right) - \left[(1-\chi)+(1+\chi)\,k^2\right]\frac{E(k)}{K(k)}\right\},\\
&\widetilde{N} = \frac{3\,\widetilde{A}_1^2\,\widetilde{A}_2^2\,\widetilde{A}_3^2}{\widetilde{P}(\widetilde{A}_1-\widetilde{A}_3)[\widetilde{A}_2(\widetilde{A}_1+\widetilde{A}_3-\widetilde{A}_2)+2\,\widetilde{A}_1\,\widetilde{A}_3]},\\
&\widetilde{H} = \frac{1}{2}\left[3\widetilde{a}^2\,\frac{E(k)}{K(k)}-1\right] \quad \text{при} \quad 2\,\widetilde{T}\,\widetilde{A}_2 - \widetilde{G}^2 > 0,\\
&\widetilde{H} = \frac{1}{2}\left\{\frac{3\widetilde{a}^2}{k^2}\left[k^2-1+\frac{E(k)}{K(k)}\right]-1\right\} \quad \text{при} \quad 2\,\widetilde{T}\,\widetilde{A}_2 - \widetilde{G}^2 < 0,\\
&\widetilde{a}^2 = \frac{\widetilde{\sigma}+\widetilde{h}}{1+\widetilde{\sigma}}, \qquad \widetilde{\sigma} = \frac{\widetilde{A}_3\left(\widetilde{A}_1-\widetilde{A}_2\right)}{\widetilde{A}_1\left(\widetilde{A}_2-\widetilde{A}_3\right)}, \qquad \widetilde{h} = \left(\frac{2\,\widetilde{T}}{\widetilde{G}^2}-\frac{1}{\widetilde{A}_2}\right)\frac{\widetilde{A}_2\widetilde{A}_3}{\widetilde{A}_2-\widetilde{A}_3}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Кинетическая энергия $\widetilde{T}$ находится из соотношения (8) в безразмерном виде

$$
\widetilde{T} = \frac{\widetilde{G}^2\left(\left(\widetilde{A}_2-\widetilde{A}_3\right)+k^2\left(\widetilde{A}_1-\widetilde{A}_2\right)\right)}{\widetilde{A}_1\left(\widetilde{A}_2-\widetilde{A}_3\right)+\widetilde{A}_3\left(\widetilde{A}_1-\widetilde{A}_2\right)k^2}.
$$

Первые три уравнения для λ, δ и ν системы (15) можно записать следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\delta}{d\widetilde{t}} = \varepsilon^2\Delta(\nu,\,\delta,\,\lambda), \qquad \frac{d\lambda}{d\widetilde{t}} = \varepsilon^2\Lambda(\nu,\,\delta,\,\lambda),\\
&\frac{d\nu}{d\widetilde{t}} = \varepsilon\frac{(1+e\cos\nu)^2}{h(e)}, \qquad h(e) = (1-e^2)^{3/2}.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Здесь Δ, Λ – коэффициенты в правых частях первого и второго уравнений (15), δ, λ – медленные переменные, а ν – полумедленная.

Получена система специального вида, для решения которой применяется модифицированный метод усреднения по следующей схеме [14]

$$\frac{d\delta}{d\,\tilde{t}} = \varepsilon^2 \frac{h(e)}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\Delta(\lambda, \delta, \nu)}{(1 + e\cos\nu)^2} d\nu, \qquad \frac{d\lambda}{d\,\tilde{t}} = \varepsilon^2 \frac{h(e)}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\Lambda(\lambda, \delta, \nu)}{(1 + e\cos\nu)^2} d\nu.$$

После усреднения получим

$$\frac{d\delta}{d\,\tilde{t}} = 0, \qquad \frac{d\lambda}{d\,\tilde{t}} = -\varepsilon^2 \frac{\Gamma\,\tilde{H}\cos\delta}{2\,\tilde{G}(1 - e^2)^{1/2}}. \tag{17}$$

Интегрирование системы проводилось для медленного времени $\tau = \varepsilon^2\,\tilde{t}$.

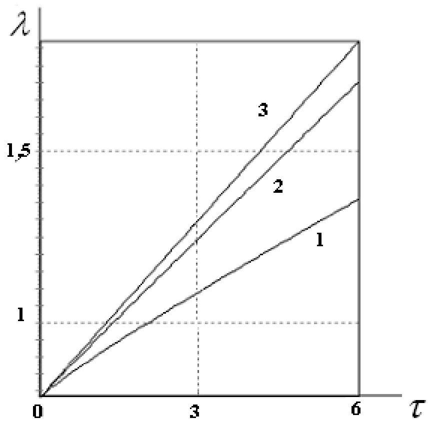

Рис. 3

Численный расчет проводился при начальных условиях $\tilde{G}(0) = 1$; $k^2(0) = 0.99$; $\lambda(0) = 0.785$ рад; $\delta(0) = 0.785$ рад; $\tilde{P}(0) = 10$. Для безразмерного времени τ имеем картину, представленную на рис. 3. Кривые 1, 2, 3 соответствуют различным значениям $\tilde{A}_2 = 5, 6, 7$ для постоянных значений $\tilde{A}_1 = 8$, $\tilde{A}_3 = 4$. Из рис. 3 видно, что характер изменения угла λ носит почти линейный характер и с увеличением значения момента инерции $\tilde{A}_2$ функция увеличивается быстрее.

Согласно численному расчету показано, что для несимметричного спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, движущегося под действием момента сил светового давления, вектор кинетического момента $\mathbf{G}$ остается величиной постоянной, направленной под постоянным углом δ к вертикали плоскости орбиты. При этом конец вектора $\mathbf{G}$ движется по сфере радиуса G_0 по ходу часовой стрелки и кинетическая энергия убывает до значения 1, соответствующего устойчивому движению спутника вокруг оси A_1.

5. Предельный случай вращения, близкого к осевому. Рассмотрим движение тела при малых $k^2 \ll 1$, отвечающих движениям твердого тела, близким к вращениям вокруг оси A_1. В этом случае правую часть уравнения (10) можно упростить, используя разложения полных эллиптических интегралов в ряды по k^2 [16]. Тогда уравнение (10) интегрируется и асимптотическое решение записывается в виде

$$
\begin{aligned}
&k^2 = C_1 \exp\left[-\frac{(3+\chi)\xi}{2}\right] \qquad \text{при} \quad \xi > 0,\\
&k^2 = C_1 \exp\left[\frac{(3-\chi)\xi}{2}\right] \qquad \text{при} \quad \xi < 0,\\
&C_1 = \mathrm{const}, \quad 0 \le C_1 \le 1.
\end{aligned} \tag{18}
$$

Изменение кинетической энергии можно качественно грубо получить, следуя работе [1], простым пересчетом из соотношения (8), используя найденное решение (18) для малых k^2. Имеем

$$
\begin{aligned}
&T = \frac{G^2}{2A_1} + \frac{G^2(A_1-A_3)(A_1-A_2)}{2A_1^2(A_2-A_3)} C_1 \exp\left[-\frac{(3+\chi)\xi}{2}\right] \qquad \text{при} \quad \xi > 0,\\
&T = \frac{G^2}{2A_3} + \frac{G^2(A_3-A_1)(A_3-A_2)}{2A_3^2(A_2-A_1)} C_1 \exp\left[\frac{(3-\chi)\xi}{2}\right] \qquad \text{при} \quad \xi < 0.
\end{aligned} \tag{19}
$$

Для безразмерной величины кинетической энергии равенства (19) примут вид

$$
\begin{aligned}
&T' = 1 + \frac{(A_1-A_3)(A_1-A_2)}{A_1(A_2-A_3)} C_1 \exp\left[-\frac{(3+\chi)\xi}{2}\right] \qquad \text{при} \quad \xi > 0,\\
&T' = \frac{A_1}{A_3} + \frac{A_1(A_3-A_1)(A_3-A_2)}{A_3^2(A_2-A_1)} C_1 \exp\left[\frac{(3-\chi)\xi}{2}\right] \qquad \text{при} \quad \xi < 0.
\end{aligned} \tag{20}
$$

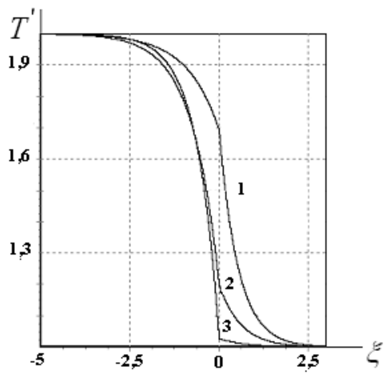

Рис. 4

Постоянная интегрирования C_1 находится грубо из условия равенства кинетической энергии по формулам (20) при $\xi = 0$. Имеем

$$
C_1 = \frac{A_1A_3(A_2-A_3)(A_1-A_2)}{A_3^2(A_1-A_2)^2 + A_1^2(A_2-A_3)^2}. \tag{21}
$$

Графики изменения безразмерной кинетической энергии T' в случае малых k^2 представлены на рис. 4. Кривые 1, 2, 3 соответствуют различным значениям $A_2 = 5, 6, 7$, при постоянных значениях $A_1 = 8$, $A_3 = 4$ для $\xi > 0$ и $A_1 = 4$, $A_3 = 8$ для $\xi < 0$. Как видно из рис. 4, характер функции $T' = T'(\xi)$ тот же, что и для $0 \le k^2 \le 1$, асимптотические значения T' на положительных и отрицательных безразмерных временах сохраняют свои величины.

Асимптотическое выражение модуля эллиптических функций можно представить в виде функции безразмерного времени τ

$$k^2 = k_0^2 \exp\left[\rho\tau\right], \tag{22}$$
$$\rho = \frac{\widetilde{P}}{\widetilde{A}_1^2\,\widetilde{A}_2^2\,\widetilde{A}_3^2}\left[\widetilde{A}_1\,\widetilde{A}_2\left(\widetilde{A}_1-\widetilde{A}_2\right)+\widetilde{A}_1\,\widetilde{A}_3\left(\widetilde{A}_1-\widetilde{A}_3\right)+\widetilde{A}_2\,\widetilde{A}_3\right].$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение (17) для угла λ в безразмерном времени τ для малых k^2 с учетом (22). В правую часть уравнения входит непостоянная величина $\widetilde{H}$. При выполнении неравенства $2\,\widetilde{T}\,\widetilde{A}_2-\widetilde{G}^2<0$ функция $H(\tau)$ с учетом малых второго порядка имеет вид

$$\widetilde{H} = \frac{1}{2}\left\{\frac{3\widetilde{A}_3(\widetilde{A}_1-\widetilde{A}_2)}{2\widetilde{A}_1(\widetilde{A}_2-\widetilde{A}_3)}k_0^2\exp\left[-\rho\tau\right]-1\right\}.$$

Ясно, что $\widetilde{H}\to -0.5$ при $\tau\to\infty$. Подставляем полученное выражение для H в уравнение изменения угла λ, интегрируем и находим

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{3\widetilde{A}_3(\widetilde{A}_1-\widetilde{A}_2)\Gamma k_0^2\cos\delta}{8\widetilde{A}_1(\widetilde{A}_2-\widetilde{A}_3)\rho(1-e^2)^{1/2}}\left(\exp\left[-\rho\tau\right]-1\right)+\frac{\Gamma\tau\cos\delta}{4(1-e^2)^{1/2}},$$

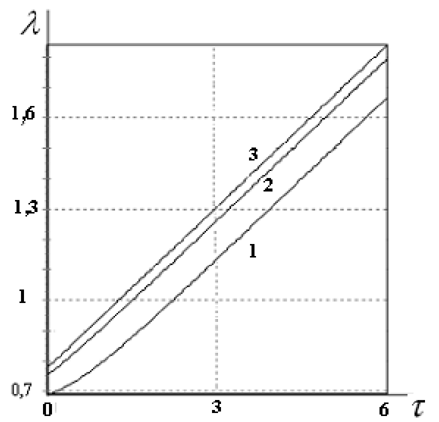

Рис. 5

константы λ_0, k_0^2 определяются из начальных условий. График функции $\lambda=\lambda(\tau)$ при $k^2\ll 1$ представлен на рис. 5.

Кривые 1, 2, 3 соответствуют различным значениям $\widetilde{A}_2 = 5, 6, 7$ при постоянных значениях $\widetilde{A}_1 = 8$, $\widetilde{A}_3 = 4$ и при начальном значении угла $\lambda(0) = 0.785$ рад. Как видно из рисунка, характер кривых аналогичен функциям $\lambda=\lambda(\tau)$ при произвольных k^2.

6. Движение динамически симметричного спутника. Рассмотрим движение динамически симметричного спутника ($A_1 = A_2$), моменты инерции которого для определенности удовлетворяют неравенству $A_1 > A_3$. Уравнения движения тела относительно центра масс запишем в форме [2]

$$\begin{aligned}
&\frac{dG}{dt} = L_3, \qquad \frac{d\delta}{dt} = \frac{L_1}{G}, \qquad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{L_2}{G\sin\delta},\\
&\frac{d\theta}{dt} = \frac{L_2\cos\psi - L_1\sin\psi}{G},\\
&\frac{d\varphi}{dt} = G\cos\theta\left(\frac{1}{A_3} - \frac{1}{A_1}\right) + \frac{L_1\cos\psi + L_2\sin\psi}{G\sin\theta},\\
&\frac{d\psi}{dt} = \frac{G}{A_1} - \frac{L_1\cos\psi + L_2\sin\psi}{G}\mathrm{ctg}\theta - \frac{L_2}{G}\mathrm{ctg}\delta.
\end{aligned} \tag{23}$$

Проекции на оси Oy_i $(i = 1,2,3)$ момента L_i^p сил вязкой жидкости в полости при $A_1 = A_2$ имеют вид

$$L_i^p = \frac{P}{A_1A_2}(A_1 - A_3)\left\{pr^2A_3\alpha_{i1} + qr^2A_3\alpha_{i2} - rA_1\left[p^2+q^2\right]\alpha_{i3}\right\} \quad (i = 1,2,3). \tag{24}$$

Для решения задачи будем применять метод усреднения [13]. В случае невозмущенного движения Эйлера–Пуансо, когда эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения, φ, ψ являются линейными функциями, а угол θ – величиной постоянной [15]. Для возмущенного движения углы φ, ψ являются быстрыми переменными, а угол θ – медленной. Проводим усреднение системы уравнений для медленных переменных G, λ, δ, θ по быстрым переменным: сначала по ψ, а затем по φ.

После усреднения по быстрым переменным φ, ψ имеем уравнения в безразмерных величинах

$$\begin{aligned}
&\frac{dG'}{dt'} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt'} = \varepsilon^2\Gamma_1(A_1' - A_3')\sin\theta\cos\theta,\\
&\frac{d\delta}{dt'} = -\varepsilon^2\frac{\Gamma\left(1+e\cos\nu\right)^2}{2\left(1-e^2\right)^2}\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\theta\right)\sin\delta\sin 2\left(\lambda-\nu\right),\\
&\frac{d\lambda}{dt'} = -\varepsilon^2\frac{\Gamma\left(1+e\cos\nu\right)^2}{\left(1-e^2\right)^2}\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\theta\right)\cos\delta\cos^2\left(\lambda-\nu\right).
\end{aligned} \tag{25}$$

Здесь безразмерные величины определяются равенствами $t' = \Omega_0 t$, $A_i' = \dfrac{A_i\Omega_0}{G_0}$, $\varepsilon^2\upsilon' = \dfrac{\upsilon}{\Omega_0 a^2}$, где Ω_0 – угловая скорость движения спутника относительно центра масс в начальный момент времени.

Введены обозначения Γ, согласно (14), и $\Gamma_1 = \dfrac{8\pi a^5\rho G_0^3}{525\upsilon' A_1^3A_3\Omega_0^3}$, где μ – гравитационная постоянная. Назовем величину Γ_1 приведенным коэффициентом момента сил вязкой жидкости в полости.

Исследуем решение системы (25) при малом ε на промежутке времени $\tau = \varepsilon^2 t'$. Из первого уравнения системы (25) видно, что кинетический момент есть величина постоянная. Интегрируя второе уравнение системы (25) для угла нутации, получим

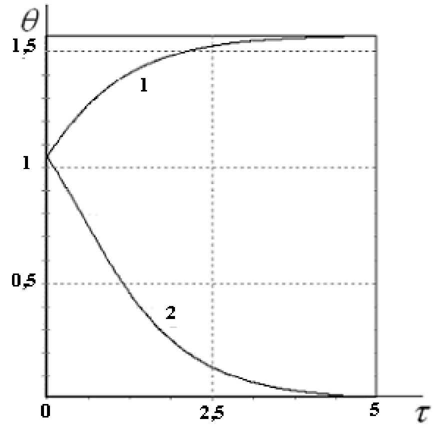

Рис. 6

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\theta_0 \exp\left[\Gamma_1 (A_1' - A_3')\tau\right]. \quad (26)$$

График функции $\theta = \theta(\tau)$ представлен на рис. 6. Расчет проводился при начальном условии $\theta(0) = \pi/3$ рад. Кривая 1 соответствует случаю $A_1' > A_3'$ (спутник "сплюснутый" по оси инерции A_3), а кривая 2 – $A_1' < A_3'$ (спутник "вытянутый" по оси инерции A_3).

Последние два уравнения (25) и уравнение для истинной аномалии (3) в безразмерном времени τ могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} &\frac{d\delta}{d\tau} = \varepsilon^2 \Delta(\nu,\delta,\lambda), && \frac{d\lambda}{d\tau} = \varepsilon^2 \Lambda(\nu,\delta,\lambda), \\ &\frac{d\nu}{d\tau} = \frac{\varepsilon}{h(e)}(1 + e\cos\nu)^2, && h(e) = \left(1 - e^2\right)^{3/2}, \end{aligned} \quad (27)$$

где $\Delta,\ \Lambda$ – коэффициенты в правых частях последних двух уравнений (25). Из системы (27) видно, что $\delta,\ \lambda$ – медленные переменные, а ν – полумедленная.

Применяя модифицированный метод усреднения [14], получим

$$\frac{d\delta}{d\tau} = 0, \qquad \frac{d\lambda}{d\tau} = -\frac{\Gamma\cos\delta}{2\left(1 - e^2\right)^{1/2}}\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\theta\right).$$

Видно, что угол отклонения δ вектора кинетического момента $\mathbf{G}$ от вертикали остается постоянным в указанном приближении, как и в случае несимметричного спутника.

С учетом (26) находим аналитически закон изменения угла λ от времени τ:

$$\lambda = \lambda_0 + \alpha\tau - \frac{3\alpha}{2\beta}\ln\left|\frac{1 + \gamma\exp(\beta\tau)}{1 + \gamma}\right|,$$

$$\alpha = -\frac{\Gamma\cos\delta}{2(1 - e^2)^{3/2}}, \quad \beta = 2\Gamma_1(A_1' - A_3'), \quad \gamma = \operatorname{tg}^2\theta_0.$$

График изменения функции $\lambda = \lambda(\tau)$ представлен на рис. 7 для начального значения угла нутации $\theta(0) = \pi/3$ рад и при начальном значении угла $\lambda(0) = \pi/4$ рад. Кривые построены при различных значениях параметра $\beta = -0.5,\ -1,\ -1.5,\ -2$. Из рис. 7 видно, что при значениях $\beta \geq -1$ на малых временах $\tau < 2.5$ график функции имеет вид линейной монотонно убывающей функции. При значениях $\beta < -1$ на малых временах функция $\lambda = \lambda(\tau)$ не является ни монотонной, ни линейной, при этом, чем меньше параметр β, тем больше возрастает функция. При временах $\tau > 2.5$ графики всех функций линейны и параллельны между собой.

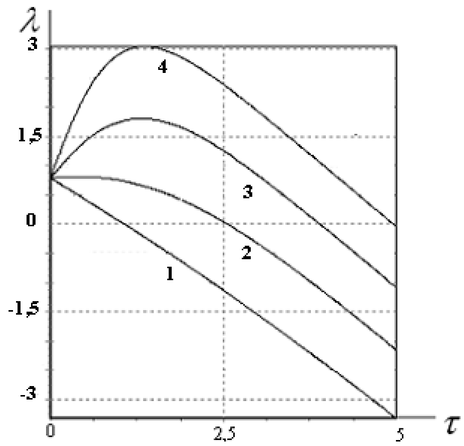

Рис. 7

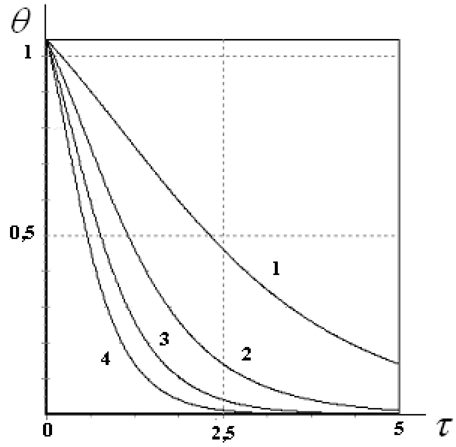

Рис. 8

Для тех же значений параметра β построены графики изменения угла нутации $\theta = \theta(\tau)$ (рис. 8). Видно, что чем меньше параметр β, тем быстрее угол θ стремится к нулю, т.е. чем более "вытянуто" тело по оси A_3, тем быстрее спутник стремится к положению устойчивого вращения вокруг этой оси.

Таким образом, при движении динамически симметричного спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью, под действием момента сил светового давления вектор кинетического момента $\mathbf{G}$ остается величиной постоянной, направленной под постоянным углом δ к вертикали плоскости орбиты. Направление движения конца вектора $\mathbf{G}$ зависит от формы спутника. В случае спутника, "сплюснутого" по оси инерции A_3, конец вектора $\mathbf{G}$ движется по сфере радиуса G_0 против хода часовой стрелки. При этом угол нутации стремится к предельному значению $\pi/2$ рад. Для динамически "вытянутого" по этой же оси спутника конец вектора $\mathbf{G}$ движется по сфере радиуса G_0, сначала по ходу часовой стрелки, а затем против хода часовой стрелки, а угол нутации стремится к нулю.

1. *Черноусько Ф.Л.* Движение твердого тела с полостями, заполненными вязкой жидкостью, при малых числах Рейнольдса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1965. – **5**, № 6. – С. 1049–1070.
2. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. – М.: Наука, 1965. – 416 с.
3. *Черноусько Ф.Л.* О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // Прикл. математика и механика. – 1963. – **27**, вып.3. – С. 474–483.
4. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле.

– М.: Изд-во МГУ, 1975. – 308 с.
5. *Карымов А.А.* Устойчивость вращательного движения геометрически симметричного искусственного спутника Солнца в поле сил светового давления // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, вып. 5. – С. 923–930.
6. *Поляхова Е.Н.* Космический полет с солнечным парусом: проблемы и перспективы. – М.: Наука, 1986. – 304 с.
7. *Сазонов В.В.* Движение астероида относительно центра масс под действием момента сил светового давления // Астрон. вестник. – 1994. – **28**, № 2. – С. 95–107.
8. *Осипов В.З, Суликашвили Р.С.* О колебании твердого тела со сферической полостью, целиком заполненной вязкой жидкостью, на эллиптической орбите // Тр. Ин-та/ Тбилис. Мат. ин-т АН Груз. ССР. – 1978. – **58**. – С. 175–186.
9. *Смирнова Е.П.* Стабилизация свободного вращения асимметричного волчка с полостями, целиком заполненными жидкостью // Прикл. математика и механика. – 1974. – **33**, вып. 6. – С. 980–985.
10. *Сидоренко В.В.* Эволюция вращательного движения планеты с жидким ядром // Астрон. вестник. – 1993. – **27**, № 2. – С. 119–127.
11. *Вильке В.Г.* Аналитическая механика систем с бесконечным числом степеней свободы. Часть II. – М.: Изд-во механико-математического фак-та МГУ, 1997. – 160 с.
12. *Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Рачинская А.Л.* Эволюция вращений спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью // Механика твердого тела. – 2007. – **37**. – С. 126–139.
13. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 507 с.
14. *Акуленко Л.Д.* Схемы усреднения высших степеней в системах с быстрой и медленной фазами // Прикл. математика и механика. – 2002. – **66**, вып. 2. – С. 165–176.
15. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 1. Механика. – М.: Наука, 1973. – 208 с.
16. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

Ин-т проблем механики РАН, Москва, Россия,
Гос. академия строительства и архитектуры, Одесса, Украина
leshchenko_d@ukr.net, rachinskaya@onu.edu.ua

Получено 27.05.08