УДК 539.3

 Р.П. Моисеенко

ДИФРАКЦИОННОЕ РАССЕЯНИЕ ВОЛН ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА НА ТУННЕЛЬНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ С ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ СЕГМЕНТНОГО СЕЧЕНИЯ

Представлена численно-аналитическая методика решения краевых задач динамической теории упругости о дифракционном рассеянии гармонических волн на туннельных цилиндрических полостях с внутренними жесткими включениями сегментного сечения. На границе контакта массива и абсолютно жесткого фиксированного включения задаются краевые условия отсутствия сдвиговых волновых перемещений. Внутренняя граничная поверхность полости, которая не контактирует с включением, полагается свободной от напряжений. Для данных задач на основе численных исследований сформулирован ряд выводов о характере влияния величины относительной длины падающей волны и расположения включения (тыльная или фронтальная зона) на распределение поля рассеянных волн в окрестности полости.

Введение. Проблема дифракции упругих волн на различного рода препятствиях – неоднородностях в упругих телах – является одной из фундаментальных и прикладных проблем в динамике деформируемого твердого тела.

Теоретические методики решения задач дифракции гармонических упругих волн на сферических и туннельных цилиндрических полостях кругового сечения с включениями, полностью заполняющими зоны полостей, разработаны и описаны в [1–8]. Вместе с тем изучение процессов рассеяния волн на включениях, частично заполняющих туннельные цилиндрические полости, является во многом открытой научной задачей.

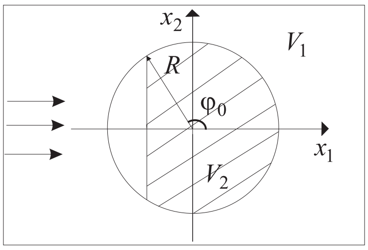


Рис. 1

В данной работе представлено теоретическое решение двумерной задачи дифракции плоской упругой волны продольного сдвига (волны антиплоской деформации) на круговой туннельной цилиндрической полости в изотропном массиве, в которой имеется частично заполняющее полость абсолютно жесткое фиксированное цилиндрическое включение сегментного сечения (рис. 1).

1. Постановка задачи. На расположенную в безграничном упругом массиве V_1 с модулем сдвига μ и плотностью ρ туннельную полость кругового сечения радиуса R, часть которой занимает протяженное цилиндрическое абсолютно жесткое фиксированное включение сегментного сечения V_2, падает поляризованная вдоль оси полости волна антиплоской деформации с круговой частотой ω. Рассматриваемый массив с полостью отнесен к системе нормированных безразмерных прямоугольных декартовых $Ox_1x_2x_3$ (см. рис. 1) и цилиндрических $Or\theta x_3$ координат; ось Ox_3 ориентирована вдоль оси полости. Направлением распространения поляризованной вдоль Ox_3 падающей плоской сдвиговой волны с комплексной амплитудной функцией перемещений $u_3^{(1)}$ является координатное направление Ox_1. Предполагается, что включение может располагаться во фронтальной области взаимодействия волны с полостью, т. е. область контакта включения и основного тела имеют вид $V_2^{(+)} = \{r = R,\ \theta \in [\varphi_0; 2\pi - \varphi_0], x_3 \in (-\infty; +\infty)\}$, либо в тыльной области взаимодействия и соответственно область контакта включения и основного тела имеют вид $V_2^{(-)} = \{r = R,\ \theta \in [\pi - \varphi_0; \pi + \varphi_0],\ x_3 \in (-\infty; +\infty)\}$. На границе контакта массива и абсолютно жесткого фиксированного включения предполагается отсутствие сдвиговых волновых перемещений. Внутренняя граничная поверхность полости, которая не контактирует с включением, считается свободной от напряжений.

При взаимодействии падающей волны с поверхностью полости, содержащей включение, генерируется дифракционное поле волн, в V_1. Комплексные амплитудные функции волновых перемещений $u_3^{(p)}$ в падающей $(p = 1)$ и отраженной $(p = 2)$ сдвиговых волнах подлежат определению из краевой задачи, включающей уравнение

$$(D^2 + \Omega^2)u_3^{(p)} = 0 \tag{1}$$

и краевые условия для характеристик суммарных полей $\sigma_{r3} = \sigma_{r3}^{(1)} + \sigma_{r3}^{(2)}$, $u_3 = u_3^{(1)} + u_3^{(2)}$, которые в случае расположения включения во фронтальной зоне полости таковы

$$(\sigma_{r}3)_{\Gamma_1^+} = 0,\ (u_3)_{\Gamma_2^+} = 0, \tag{2}$$

$$\Gamma_1^+ = \{r = R,\ \theta \in [-\varphi_0; \varphi_0]\},$$

$$\Gamma_2^+ = \{r = R,\ \theta \in [\varphi_0; 2\pi - \varphi_0]\};$$

а в случае расположения включения в тыльной зоне полости имеют вид

$$(\sigma_{r}3)_{\Gamma_1^-} = 0,\ (u_3)_{\Gamma_2^-} = 0, \tag{3}$$

$$\Gamma_1^- = \{r = R,\ \theta \in [\pi - \varphi_0; \pi + \varphi_0]\},$$

$$\Gamma_2^- = \{r = R,\ \theta \in [-(\pi - \varphi_0); \pi - \varphi_0]\}.$$

В уравнении (1) D^2 – двумерный оператор Лапласа, а $\Omega^2 = (\rho\omega^2 R^2/\mu)^{1/2}$ – безразмерный частотный параметр.

2. Численно-аналитическое решение краевой задачи дифракции. Зададим комплексную амплитудную функцию волновых перемещений падающей плоской волны в виде $u_3^{(1)} = u_{30}e^{ik_s x_1}$, а для амплитудной функции рассеянных волн с учетом принципа излучения и симметрии функционального поля относительно координатных осей введем представление [1, 2]

$$u_3^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_{un}^{(2)}(r) \cos n\theta,$$

здесь $k_s = \omega R(\rho_1/\mu_1)^{1/2} = 2\pi/\lambda^*$ – безразмерная нормированная постоянная распространения волны сдвига в теле V_1; $\lambda^* = \lambda/R$– относительная длина падающей волны; $\varphi_{un}^{(2)} = H_n^{(1)}(\Omega r)/H_n^{(1)}(\Omega R)$, $H_n^{(1)}(\Omega r)$ – цилиндрические функции Ханкеля первого рода; A_n – произвольные коэффициенты разложения дифракционного поля по базису расходящихся отраженных цилиндрических волн.

С использованием контурного разложения Якоби–Ангера [1–3]

$$(e^{ik_s x_1})_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = \sum_{n=0}^{\infty} l_n i^n J_n(k_s R) \cos n\theta, \tag{4}$$

в котором $l_0 = 1$, $l_n = 2$ при $n \geq 1$, $J_n(k_s R)$ – цилиндрические функции Бесселя, а также представления (4) можно получить следущие выражения для характеристик суммарного волнового поля на границе V_1:

$$(u_3)_{\Gamma_1^{\pm} \cup \Gamma_2^{\pm}} = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_{un}^{(1)} + A_n \varphi_{un}^{(2)}) \cos n\theta, \tag{5}$$

$$(\sigma_3)_{\Gamma_1^{\pm} \cup \Gamma_2^{\pm}} = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_{\sigma rn}^{(1)} + A_n \varphi_{\sigma rn}^{(2)}) \cos n\theta, \tag{6}$$

где

$$\varphi_{un}^{(1)} = u_{30} l_n i^n J_n(k_s R), \quad \varphi_{\sigma rn}^{(1)} = u_{30} \mu k_s l_n i^n \left[J_{n-1}(k_s R) - J_n(k_s R)/(k_s R) \right],$$

$$\varphi_{\sigma rn}^{(2)} = \Omega \mu \left[H_{n-1}^{(1)}(\Omega R) - H_n^{(1)}(\Omega R)/(\Omega R) \right] / H_n^{(1)}(\Omega R).$$

Для определения коэффициентов A_n $(n = \overline{0, N})$ в представлении дифракционного поля с редуцированными суммами (5), (6) из краевых условий (2), (3) могут быть получины функциональные уравнения. Для их алгебраизации применяют два альтернативных способа – интегральный метод наименьших квадратов и метод Бубнова–Галеркина.

Применение интегрального метода наименьших квадратов в случае размещения включения во фронтальной зоне полости заключается в минимизации функции квадратичной невязки

$$J^+(A_1, A_2, A_N, ..., \overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_N}) = \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \sigma_{r3} \overline{\sigma_{r3}} d\theta + \int_{\varphi_0}^{2\pi - \varphi_0} u_3 \overline{u_3} d\theta,$$

т.е. в формулировке условий вида

$$\frac{\partial}{\partial \overline{A_n}} J^+(A_1, A_2, A_N, ..., \overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_N}) = 0.$$

При размещении включения в тыльной зоне полости функция квадратичной невязки соответственно характеризуется представлением

$$\frac{\partial}{\partial \overline{A_n}} J^-(A_1, A_2, A_N, ..., \overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_N}) = \int\limits_{\pi-\varphi_0}^{\pi+\varphi_0} \sigma_{r3}\overline{\sigma_{r3}} d\theta + \int\limits_{-(\pi-\varphi_0)}^{\pi-\varphi_0} u_3 \overline{u_3} d\theta.$$

Система алгебраических уравнений, следующая из (2), имеет вид

$$\sum_{\tilde{n}=0}^{N} A_{\tilde{n}} \overline{\varphi}^{(1)}_{\tilde{n}n} = -\overline{\varphi}^{(2)}_{n} \qquad (\, n = \overline{0, N}\,),$$

$$\varphi^{(1)}_{\tilde{n}n} = \int\limits_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \overline{\varphi}^{(2)}_{\sigma\tilde{n}} \varphi^{(2)}_{\sigma n} \cos(n\theta)\cos(\tilde{n}\theta) d\theta + \int\limits_{\varphi_0}^{2\pi-\varphi_0} \overline{\varphi}^{(2)}_{u\tilde{n}} \varphi^{(2)}_{un} \cos(n\theta)\cos(\tilde{n}\theta) d\theta =$$
$$= c^{(2)}(n, \tilde{n}, 0, 0) \overline{\varphi}^{(2)}_{u\tilde{n}} \varphi^{(2)}_{un} + c^{(1)}(n, \tilde{n}, 0, 0) \overline{\varphi}^{(2)}_{\sigma\tilde{n}} \varphi^{(2)}_{\sigma n},$$

$$\varphi^{(2)}_{\tilde{n}n} = \int\limits_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \sum_{\tilde{n}=0}^{N} \overline{\varphi}^{(1)}_{\sigma\tilde{n}} \varphi^{(2)}_{\sigma n} \cos(n\theta)\cos(\tilde{n}\theta) d\theta + \int\limits_{\varphi_0}^{2\pi-\varphi_0} \sum_{\tilde{n}=0}^{N} \overline{\varphi}^{(1)}_{u\tilde{n}} \varphi^{(2)}_{un} \cos(n\theta)\cos(\tilde{n}\theta) d\theta =$$
$$= \sum_{\tilde{n}=0}^{N} c^{(2)}(n, \tilde{n}, 0, 0) \overline{\varphi}^{(1)}_{u\tilde{n}} \varphi^{(2)}_{un} + \sum_{\tilde{n}=0}^{N} c^{(1)}(n, \tilde{n}, 0, 0) \overline{\varphi}^{(1)}_{\sigma\tilde{n}} \varphi^{(2)}_{\sigma n}.$$

Здесь при $\alpha_1 \neq \beta_1$

$$c^{(1)}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = \int\limits_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \cos(\alpha_1\theta + \alpha_2)\cos(\beta_1\theta + \beta_2) d\theta =$$
$$= \frac{1}{2}(\sin(\varphi_0\alpha_1 - \varphi_0\beta_1 + \alpha_2 - \beta_2)/(\alpha_1 - \beta_1) + \sin(\varphi_0\alpha_1 + \varphi_0\beta_1 +$$
$$+ \alpha_2 + \beta_2)/(\alpha_1 + \beta_1) + \sin(\varphi_0\alpha_1 - \varphi_0\beta_1 - \alpha_2 + \beta_2)/(\alpha_1 - \beta_1) +$$
$$+ \sin(\varphi_0\alpha_1 + \varphi_0\beta_1 - \alpha_2 - \beta_2)/(\alpha_1 + \beta_1)),$$

$$c^{(2)}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = \int\limits_{\varphi_0}^{2\pi-\varphi_0} \cos(\alpha_1\theta + \alpha_2)\cos(\beta_1\theta + \beta_2) d\theta =$$
$$= -\frac{1}{2}(\sin(2\pi\alpha_1 + \alpha_1\varphi_0 + 2\pi\beta_1 - \varphi_0\beta_1 - \alpha_2 + \beta_2)/(\alpha_1 - \beta_1) +$$
$$+ \sin(-2\pi\alpha_1 + \alpha_1\varphi_0 - 2\pi\beta_1 + \varphi_0\beta_1 - \alpha_2 - \beta_2)/(\alpha_1 + \beta_1) + \sin(\varphi_0\alpha_1 -$$
$$- \varphi_0\beta_1 + \alpha_2 - \beta_2)/(\alpha_1 - \beta_1) + \sin(\varphi_0\alpha_1 + \varphi_0\beta_1 + \alpha_2 + \beta_2)/(\alpha_1 + \beta_1));$$

при $\alpha_1 = \beta_1$

$$c^{(1)}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = (1/4\beta_1)(\sin(2\varphi_0\beta_1 + \alpha_2 + \beta_2) + \sin(2\varphi_0\beta_1 - \alpha_2 - \beta_2) +$$
$$+4\cos((\alpha_2 - \beta_2))\varphi_0\beta_1),$$
$$c^{(2)}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = (1/4\beta_1)(-\sin(2\varphi_0\beta_1 + \alpha_2 + \beta_2) +$$
$$+\sin(4\pi\beta_1 - 2\varphi_0\beta_1 + \alpha_2 + \beta_2) + 4\beta_1\pi\cos(\alpha_2 - \beta_2)).$$

Для этого же варианта расположения включения в случае применения метода Бубнова–Галеркина левые части соотношений (2) соответственно полагаются ортогональными $\Gamma_1^+ : \{\cos(n\pi\theta/\varphi_0)\}_0^N$, $\Gamma_2^+ : \{\cos(n\pi(\theta - \pi)/(\pi - \varphi_0))\}_0^N$.

При этом система алгебраических уравнений относительно A_n принимает вид

$$\sum_{n=0}^{N} A_n \Delta_{p_1 n}^{(1)} = -\Delta_{p_1}^{(2)} \quad (p_1 = \overline{0, P_1}), \qquad \sum_{n=0}^{N} A_n \Delta_{p_2 n}^{(3)} = -\Delta_{p_2}^{(4)} \quad (p_2 = \overline{0, P_2}),$$

где

$$N = P_1 + P_2 + 1,$$
$$\Delta_{p_1 n}^{(1)} = \varphi_{urn}^{(2)} c^{(2)}(n, p_1\pi/(\pi - \varphi_0), 0, -\pi^2 p_1/(\pi - \varphi_0)),$$
$$\Delta_{p_1 n}^{(2)} = \varphi_{urn}^{(1)} c^{(2)}(n, p_1\pi/(\pi - \varphi_0), 0, -\pi^2 p_1/(\pi - \varphi_0)),$$
$$\Delta_{p_2 n}^{(3)} = \varphi_{\sigma rn}^{(2)} c^{(1)}(n, p_2\pi/\varphi_0, 0, 0), \ \Delta_{p_2 n}^{(4)} = \varphi_{\sigma rn}^{(1)} c^{(1)}(n, p_2\pi/\varphi_0, 0, 0).$$

Аналогичную структуру имеет система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов A_n в случае краевой задачи (3) о рассеивании волны на жестком включении сегментного сечения, располагающегося в тыльной области $V_2^{(-)}$, при применении для алгебраизации функциональных граничных условий метода наименьших квадратов и метода Бубнова–Галеркина.

После определения искомых коэффициентов амплитудные кинематические и силовые характеристики, а также характеристики энергетических потоков для исследуемых волновых полей в окрестности полостирассчитываются с использованием формул

$$u_3 = \varphi_u^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_{un}^{(2)} \cos n\theta,$$

$$\sigma_{\theta 3} = \varphi_{\sigma\theta}^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_{\sigma\theta n}^{(2)} \sin(n\theta), \ \ \sigma_{r3} = \varphi_{\sigma r}^{(1)} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_{\sigma rn}^{(2)} \cos(n\theta),$$

$$\sigma_{13} = \varphi_{\sigma 13}^{(1)} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_{\sigma rn}^{(1)} + \varphi_{\sigma\theta n}^{(1)} + A_n(\varphi_{\sigma rn}^{(2)} + \varphi_{\sigma\theta n}^{(2)}))\cos((n+1)\theta),$$

$$\sigma_{23} = \varphi^{(1)}_{\sigma 23} + \tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\varphi^{(1)}_{\sigma rn} + \varphi^{(1)}_{\sigma\theta n} + A_n(\varphi^{(2)}_{\sigma rn} + \varphi^{(2)}_{\sigma rn}))\sin((n+1)\theta),$$

$$P_1 = \frac{i\omega}{2}(\sigma_{13}\overline{u}_3 - \overline{\sigma_{13}}u_3), \quad P_2 = \frac{i\omega}{2}(\sigma_{23}\overline{u}_3 - \overline{\sigma_{23}}u_3),$$

где

$$\varphi^{(1)}_{\sigma 13} = \mu i k_s e^{ik_s x_1},\ \varphi^{(1)}_{\sigma 13} = 0,\ \varphi^{(1)}_{un} = u_{30}\mu e^{ik_s x_1},\ \varphi^{(2)}_{un} = H^{(1)}_n(\Omega r)/H^{(1)}_n(\Omega R),$$

$$\varphi^{(1)}_{\sigma\theta n} = u_{30}\mu k_s e^{ik_s x_1} sin\theta,\ \varphi^{(2)}_{\sigma\theta n} = -\Omega\mu n(H^{(1)}_n(\Omega r)/(r))/H^{(1)}_n(\Omega R),$$

$$\varphi^{(1)}_{\sigma rn} = u_{30}\mu k_s e^{ik_s x_1} cos\theta,]\varphi^{(2)}_{\sigma rn} = \Omega\mu\left[H^{(1)}_{n-1}(\Omega r) - H^{(1)}_n(\Omega r)/(\Omega r)\right]/H^{(1)}_n(\Omega R).$$

3. Результаты численных исследований. Расчеты характеристик дифракционных полей с помощью описанных выше подходов представлены для случая падения волны на полуцилиндрическое ($\varphi_0 = \ \pi/2$) абсолютно жесткое включение, расположенное во фронтальной или тыльной зоне полости при нескольких значениях относительной длины падающей волны ($\lambda^* = 1$, 2, 6, 16). Для иллюстрации анализируемых эффектов рассчитаны распределения амплитуд суммарного волнового поля в охватывающей сечение полости квадратной области со стороной $6R$ внутри массива V_1. Результаты расчетов представлены на рис. 2, *а* – 5, *а*, в виде тонированных изображений, описывающих распределение интенсивности амплитуд волновых полей для случая включения во фронтальной зоне полости, а на рис. 2, *б* – 5, *б* для случая включения в тыльной зоне полости. Нарастание интенсивности отражается переходом от светлых тонов рисунка к темным.

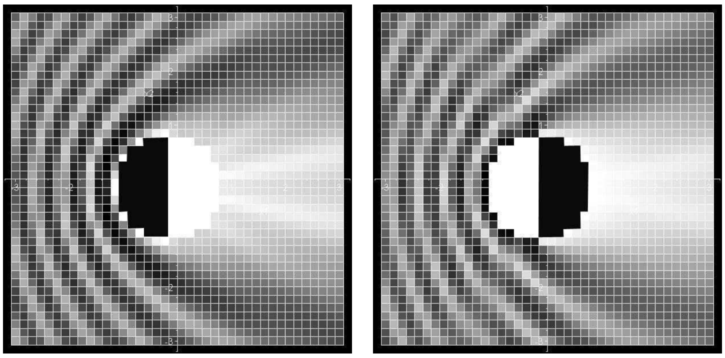
Анализ этих распределений показывает, в частности, что изменения в структуре дифракционных полей, связанные с альтернативным вариантом расположения включений, проявляется в различной степени в зависимости от относительной длины λ^* падающей волны.

Так, при падении волн с $\lambda^* = 1$ различия в интенсивности дифракционного поля касаются только очень узкой приграничной зоны в лицевой области взаимодействия, а характеристики в среднем и дальнем поле рассеяния практически идентичны, включая очертания теневой области (рис. 2, *а*, *б*).

При $\lambda^* = 2$ перемещение включения из фронтальной в тыльную зону ведет к суживанию теневой области и перемещению зоны повышенных амплитуд от контура полости вглубь массива (рис. 3, *а*, *б*).

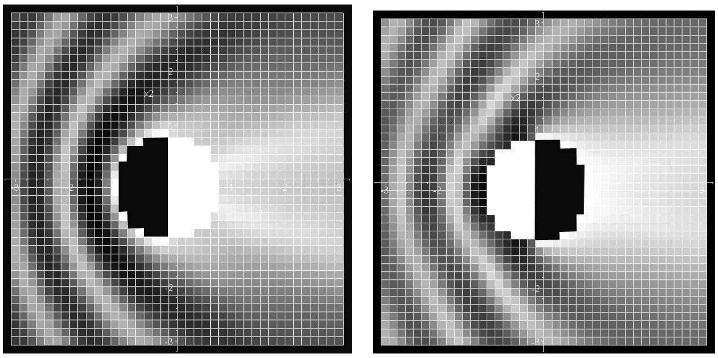
Наиболее существенные различия наблюдаются в рассчитанных полях при падении волн “средней длины” с $\lambda^* = 6$. В этом случае существенно перестраивается форма зоны повышенных амплитуд в лицевой области взаимодействия и наблюдается более равномерное распределение амплитуд рассеиваемых волн в области тени (рис. 4, *а*, *б*).

В случае же падения волн большой длины ($\lambda^* = 16$) поля интенсивности волновых перемещений в лицевой зоне взаимодействия имеют очень близкие очертания, однако существенно отличаются размеры теневых областей формирующихся по бокам полости (рис. 5, *а*, *б*).



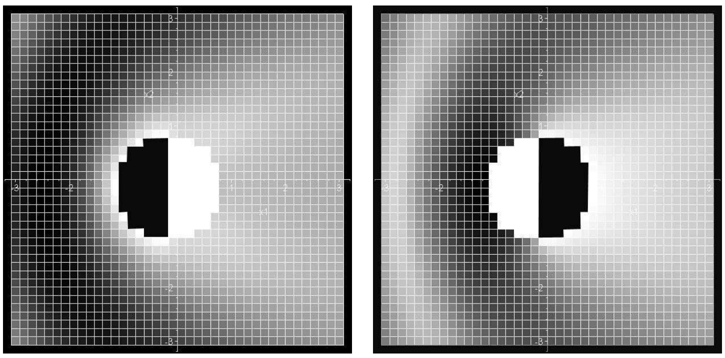
а) $\lambda^* = 1$ *б)*

Рис. 2



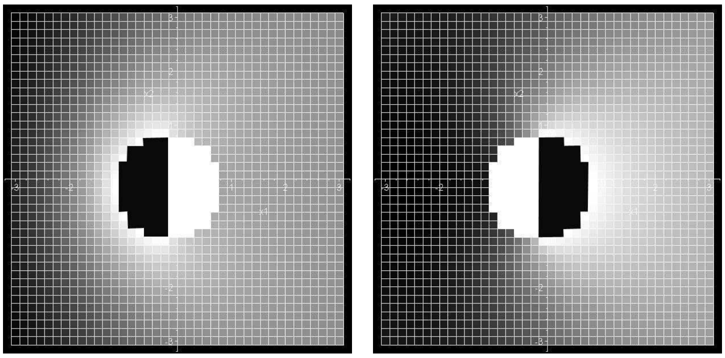
а) $\lambda^* = 2$ *б)*

Рис. 3



а) $\lambda^* = 6$ *б)*

Рис. 4



а) $\lambda^* = 16$ *б)*

Рис. 5

Заключение. Таким образом, на основе метода разложения амплитудной функции волн продольного сдвига в ряды по базисным системам частных решений уравнений динамической антиплоской деформации построено численно-аналитическое решение задачи о дифракционном рассеянии волны антиплоской деформации с прямолинейным фронтом на полости кругового сечения с частично закрепленной поверхностью (неполным жестким включением). Установлено, что для альтернативных вариантов размещения включения полуцилиндрического сечения во фронтальной или тыльной области взаимодействия волны с границей полости, существенную роль в формировании структуры дифракционного поля играет параметр относительной длины волны. Значительные различия между картинами дифракционных полей при альтернативном расположении включения отмечаются при падении волн "средней длины".

1. *Гузь А.Н., Головчан В.Т.* Дифракция упругих волн в многосвязных телах. – Киев: Наук. думка, 1972. – 254 с.
2. *Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А.* Дифракция упругих волн. – Киев: Наук. думка, 1978. – 307 с.
3. *Иванов Е.А.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах. – Минск: Наука и техника, 1968. – 583 с.
4. *Космодамианский А.С., Сторожев В.И.* Динамические задачи для анизотропных сред с усложненной геометрией. – Донецк: Донецк. ун-т, 1983. – 118 с.
5. *Космодамианский А.С., Сторожев В.И.* Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред. – К: Наук. думка, 1985. – 176 с.
6. *Кубенко В, Дзюба В.* Дифракция плоской акустической волны на системе сферического и цилиндрического тел // Праці VI Міжнарод. конф. "Математичні проблеми механіки неоднорідних структур" (МПМНС). – Львів (Україна): Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2003. – С. 349–351.
7. *Kubenko V.D., Dzyuba V.V.* Resonant Phenomena in a Cylindrical Shell Containing a Spherical Inclusion and Immersed in an Elastic Medium // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N 7. – P. 797–810.
8. *Kubenko V.D., Dzyuba V.V.* The acoustic field in a rigid cylindrical vessel excited by a sphere oscillating by a definite law // Ibïd. – 2000. - **36**, N 6. – P. 779–789.

Национальный ун-т, Донецк, Украина
raisa534@gmail.com

Получено 27.05.08