

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ВЫПУСК

32

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Межведомственный сборник научных трудов

Основан в 1969 г.

ДОНЕЦК 2002

УДК 531.38

©2002. Е.К. Узбек

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕГУЛЯРНЫХ ПРЕЦЕССИЙ ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

Изучены условия существования регулярных прецессий гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил.

Введение. Регулярные прецессии гиростата относятся к наиболее наглядным механическим движениям [1, 2]. Примером таких движений служит регулярная прецессия гироскопа Лагранжа относительно вертикали. Начало изучению условий существования прецессий положили Г.Г.Аппельрот [3] и Д.Гриоли [4]. Г.Г.Аппельрот [3] рассматривал прецессии относительно вертикали гироскопов, подобных гироскопам Ковалевской и Горячева-Чаплыгина. Д.Гриоли [4] открыл новый случай интегрируемости уравнений Эйлера-Пуассона, который описывает регулярную прецессию тяжелого твердого тела относительно наклонной оси. Г.В.Горр [1, 2] разработал метод исследования прецессионных движений гиростата для того случая, когда ось, образующая неизменный угол с вертикалью, занимает фиксированное положение в гиростате.

В данной статье рассмотрены регулярные прецессии под действием потенциальных и гироскопических сил [5-9] в предположении, что ось, образующая неизменный угол с вертикалью, может занимать произвольное положение в некоторой плоскости. Доказано, что такие движения описываются только частными решениями случаев Г.Кирхгофа – П.В.Харламова [8, 7] и В.А.Стеклова [6].

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении гиростата с неподвижной точкой под действием потенциальных и гироскопических сил, которая описывается дифференциальными уравнениями класса Г.Кирхгофа (см. работы [4, 5-7, 8])

$$A\dot{\omega} = (A\omega + \lambda) \times \omega + \omega \times B\nu + s \times \nu + \nu \times C\nu, \quad (1)$$

$$\dot{\nu} = \nu \times \omega, \quad (2)$$

где обозначено $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости гиростата; $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силового поля; $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – гиростатический момент; $s = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; $A = (A_{ij})$ – тензор инерции, построенный в неподвижной точке; $B = (B_{ij})$ и $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными обозначает производную по времени t .

Уравнения (1), (2) допускают три первые интеграла

$$(A\omega \cdot \omega) - 2(s \cdot \nu) + (C\nu \cdot \nu) = 2E, \quad \nu \cdot \nu = 1, \quad (3)$$

$$(A\omega + \lambda) \cdot \nu - \frac{1}{2}(B\nu \cdot \nu) = k. \quad (4)$$

Движение тела называют прецессией относительно вектора ν [1, 2], если постоянен угол между векторами n и ν , где вектор n неизменно связан с гиростатом. Условие прецессионности можно представить инвариантными соотношением

$$n \cdot \nu = n_0, \quad (5)$$

где n_0 – постоянная. Производная от соотношения (5), в силу уравнения Пуассона (2), приводит к равенству $\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\nu}) = 0$, из которого в случае регулярной прецессии вытекает

$$\boldsymbol{\omega} = n_* \mathbf{n} + m_* \boldsymbol{\nu}. \quad (6)$$

Здесь n_* и m_* – постоянные. Тогда из (2), (6) имеем

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = n_* (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{n}). \quad (7)$$

Предположим, что конец вектора \mathbf{n} описывает единичную окружность в плоскости векторов $\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, 0)$ и $\boldsymbol{\beta} = (0, 1, 0)$, то есть его компоненты имеют вид

$$n_1 = \cos \varkappa_0, \quad n_2 = \sin \varkappa_0, \quad n_3 = 0. \quad (8)$$

Постоянную n_0 , входящую в равенство (5), обозначим через $\cos \varepsilon_0$, где ε_0 – произвольная или фиксированная постоянная. Поставим задачу исследования регулярных прецессий гиростата в задаче (1), (2) при условии, что кинематическое условие (5) выполняется для любых значений \varkappa_0 .

Кинематическое соотношение (5) и геометрический интеграл $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$ параметризуем следующим образом

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \cos \varkappa_0 \cos \varepsilon_0 - \sin \varkappa_0 \sin \varepsilon_0 \cos u, \\ \nu_2 &= \sin \varkappa_0 \cos \varepsilon_0 + \cos \varkappa_0 \sin \varepsilon_0 \cos u, \quad \nu_3 = \sin \varepsilon_0 \sin u, \end{aligned} \quad (9)$$

где u – вспомогательная переменная. На основании равенств (8), (9) из второго уравнения системы (7) получим $\dot{u} = -n_*$, то есть переменная $u = -n_* t$. Постоянная интегрирования, в силу периодичности $\nu_i(t)$, принята равной нулю.

2. Условия существования регулярных прецессий. Подставим значение $\boldsymbol{\omega}$ из (6) в уравнение (1) и интегралы (3), (4) и учтем уравнение (7). Тогда получим следующие равенства

$$\begin{aligned} (D^{(i)} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) + (d^{(i)} \cdot \boldsymbol{\nu}) &= l_i \quad (i = 1, 2), \\ n_0 (D^{(2)} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) - 2(n_* + m_* n_0) (D^{(1)} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) + 2(m_* + n_* n_0) (D^{(1)} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu}) - \\ &- (D^{(2)} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nu}) - (n_* + m_* n_0) (\mathbf{d}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\nu}) + \frac{n_0}{2} (\mathbf{d}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\nu}) + n_* m_* Sp(A) \sin^2 \varepsilon_0 + \\ &+ (m_* + n_* n_0) (\mathbf{d}^{(1)} \cdot \mathbf{n}) - \frac{1}{2} (\mathbf{d}^{(2)} \cdot \mathbf{n}) = 0, \\ D^{(1)} = (d_{ij}^{(1)}) &= m_* A - \frac{1}{2} B, \quad D^{(2)} = (d_{ij}^{(2)}) = m_*^2 A + C, \\ \mathbf{d}^{(1)} = n_* A \mathbf{n} + \boldsymbol{\lambda}, \quad \mathbf{d}^{(2)} &= 2(n_* m_* A \mathbf{n} - \mathbf{s}), \quad l_1 = k, \quad l_2 = 2E - n_*^2 (A \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}). \end{aligned} \quad (10)$$

$$(11)$$

Равенства (10), записанные с помощью обозначений (11) в скалярном виде, будут тождествами по переменной u при выполнении условий

$$\begin{aligned} 2m_* (A_{23} \cos \varkappa_0 - A_{13} \sin \varkappa_0) - B_{23} \cos \varkappa_0 + B_{13} \sin \varkappa_0 &= 0, \\ m_*^2 (A_{23} \cos \varkappa_0 - A_{13} \sin \varkappa_0) + C_{23} \cos \varkappa_0 - C_{13} \sin \varkappa_0 &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & [2m_*(A_{11} - A_{33}) - B_{11} + B_{33}] \sin^2 \varkappa_0 + \\ & + [2m_*(A_{22} - A_{33}) - B_{22} + B_{33}] \cos^2 \varkappa_0 - (2m_*A_{12} - B_{12}) \sin 2\varkappa_0 = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & [m_*^2(A_{11} - A_{33}) + C_{11} - C_{33}] \sin^2 \varkappa_0 + \\ & + [m_*^2(A_{22} - A_{33}) + C_{22} - C_{33}] \cos^2 \varkappa_0 - (m_*^2A_{12} + C_{12}) \sin 2\varkappa_0 = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & [2m_*(A_{22} - A_{11}) - B_{22} + B_{11}] \sin 2\varkappa_0 \cos \varepsilon_0 + 2(2m_*A_{12} - B_{12}) \cos 2\varkappa_0 \cos \varepsilon_0 + \\ & + n_*(A_{22} - A_{11}) \sin 2\varkappa_0 + 2A_{12}n_* \cos 2\varkappa_0 + 2(\lambda_2 \cos \varkappa_0 - \lambda_1 \sin \varkappa_0) = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & [m_*^2(A_{22} - A_{11}) + C_{22} - C_{11}] \sin 2\varkappa_0 \cos \varepsilon_0 + 2(m_*^2A_{12} + C_{12}) \cos 2\varkappa_0 \cos \varepsilon_0 + \\ & + 2n_*m_*A_{12} \cos 2\varkappa_0 + n_*m_*(A_{22} - A_{11}) \sin 2\varkappa_0 + 2(s_1 \sin \varkappa_0 - s_2 \cos \varkappa_0) = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & [m_*^2(A_{22} - A_{11}) - m_*(B_{22} - B_{11}) - C_{22} + C_{11}] \sin 2\varkappa_0 + \\ & + 2(m_*^2A_{12} - m_*B_{12} - C_{12}) \cos 2\varkappa_0 = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$m_*^2(A_{13} \cos \varkappa_0 + A_{23} \sin \varkappa_0) - m_*(B_{13} \cos \varkappa_0 + B_{23} \sin \varkappa_0) - C_{13} \cos \varkappa_0 - C_{23} \sin \varkappa_0 = 0, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & [2m_*(A_{13} \cos \varkappa_0 + A_{23} \sin \varkappa_0) - B_{13} \cos \varkappa_0 - B_{23} \sin \varkappa_0] \\ & + n_*(A_{13} \cos \varkappa_0 + A_{23} \sin \varkappa_0) + \lambda_3 = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$m_*(m_* \cos \varepsilon_0 + n_*)(A_{13} \cos \varkappa_0 + A_{23} \sin \varkappa_0) + (C_{13} \cos \varkappa_0 + C_{23} \sin \varkappa_0) \cos \varepsilon_0 - s_3 = 0, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & [(m_*^2 + 2n_*^2 + 2n_*m_* \cos \varepsilon_0)(A_{11} \cos^2 \varkappa_0 + A_{22} \sin^2 \varkappa_0 + 2A_{12} \sin \varkappa_0 \cos \varkappa_0) - \\ & - (m_* + n_* \cos \varepsilon_0)(B_{11} \cos^2 \varkappa_0 + B_{22} \sin^2 \varkappa_0 + 2B_{12} \sin \varkappa_0 \cos \varkappa_0) - \\ & - (C_{11} \cos^2 \varkappa_0 + C_{22} \sin^2 \varkappa_0 + 2C_{12} \sin \varkappa_0 \cos \varkappa_0) + (n_* + m_* \cos \varepsilon_0)(\lambda_1 \cos \varkappa_0 + \lambda_2 \sin \varkappa_0) + \\ & + (s_1 \cos \varkappa_0 + s_2 \sin \varkappa_0) \cos \varepsilon_0] \cos \varepsilon_0 + [(d_{11}^{(2)} \cos^2 \varkappa_0 + d_{22}^{(2)} \sin^2 \varkappa_0) \cos^2 \varepsilon_0 + \\ & + \frac{1}{2}(d_{11}^{(2)} \sin^2 \varkappa_0 + d_{22}^{(2)} \cos^2 \varkappa_0 + d_{33}^{(2)}) \sin^2 \varepsilon_0 - d_{12}^{(2)} \sin \varkappa_0 \cos \varkappa_0 \sin^2 \varepsilon_0 + \\ & + (d_1^{(2)} \cos \varkappa_0 - d_2^{(2)} \sin \varkappa_0)] \cos \varepsilon_0 - 2(n_* + m_* \cos \varepsilon_0) [(d_{11}^{(1)} \cos^2 \varkappa_0 + d_{22}^{(1)} \sin^2 \varkappa_0) \cos^2 \varepsilon_0 + \\ & + \frac{1}{2}(d_{11}^{(1)} \sin^2 \varkappa_0 + d_{22}^{(1)} \cos^2 \varkappa_0 + d_{33}^{(1)}) \sin^2 \varepsilon_0 - d_{12}^{(1)} \sin \varkappa_0 \cos \varkappa_0 \sin^2 \varepsilon_0 + \\ & + (d_1^{(1)} \cos \varkappa_0 - d_2^{(1)} \sin \varkappa_0) \cos \varepsilon_0] + n_*m_*(A_{11} + A_{22} + A_{33}) \sin^2 \varepsilon_0 + \\ & + (m_* + n_* \cos \varepsilon_0)(\lambda_1 \cos \varkappa_0 + \lambda_2 \sin \varkappa_0) + s_1 \cos \varkappa_0 + s_2 \sin \varkappa_0 = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

В системе (12)–(21) через A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} обозначены компоненты матриц A , B , C в системе координат, связанной с векторами α , β , а через s_i и λ_i – компоненты векторов s и λ в этой системе. Для простоты записи в уравнение (21) не подставлены величины (11).

Предположим, что величины n_* и m_* зависят от произвольной постоянной \varkappa_0 . Рассмотрим случай, когда ось, ортогональная векторам α и β , не является главной: $A_{13}^2 + A_{23}^2 \neq 0$. Из уравнений (12), исключая величину m_* , имеем

$$m_* = \frac{B_{23} \cos \varkappa_0 - B_{13} \sin \varkappa_0}{2(A_{23} \cos \varkappa_0 - A_{13} \sin \varkappa_0)}, \quad (22)$$

$$(B_{13}g_0 - B_{23})^2 + 4(A_{23} - A_{13}g_0)(C_{23} - C_{13}g_0) = 0, \quad (23)$$

где $g_0 = \operatorname{tg} \varkappa_0$. Уравнение (23) может быть тождеством при любых значениях g_0 при следующих условиях на параметры

$$B_{13}^2 = -4A_{13}C_{13}, \quad B_{23}^2 = -4A_{23}C_{23}, \quad B_{13}B_{23} = -2(A_{13}C_{23} + A_{23}C_{13}). \quad (24)$$

Очевидно, что величины B_{13}, B_{23} в формуле (22) и соответственно C_{13}, C_{23} в формулах (24) не могут обращаться в нуль. Следовательно, равенство $C_{13}A_{23} - C_{23}A_{13} = 0$, которое вытекает из системы (24), можно параметризовать так: $C_{13} = \lambda_0 A_{13}, C_{23} = \lambda_0 A_{23}$, где λ_0 – некоторый параметр. Тогда из второго уравнения системы (12) следует, что m_* не зависит от параметра \varkappa_0 .

Пусть теперь $A_{13} = A_{23} = 0$, то есть третья координатная ось является главной. Из уравнения (12) вытекает, что $B_{13} = B_{23} = 0, C_{13} = C_{23} = 0$. Рассмотрим систему (12)–(21) при данных условиях. Из уравнений (19), (20) следует, что $\lambda_3 = 0, s_3 = 0$, а уравнение (18) становится тождеством. Условия $\lambda_3 = 0, s_3 = 0$ показывают, что векторы \mathbf{s} и $\boldsymbol{\lambda}$ лежат в главной плоскости эллипсоида инерции, содержащей векторы $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$.

При анализе системы (12)–(21) возникает вырожденный случай $A_{12} = 0, A_{11} = A_{22} = A_{33}, B_{12} = 0, B_{11} = B_{22} = B_{33}, C_{12} = 0, C_{11} = C_{22} = C_{33}$. Из этой системы следует, что $\mathbf{s} = 0, \boldsymbol{\lambda} = 0$. Тогда уравнения (1), (2) приводят к векторному равенству

$$A_{11}\boldsymbol{\omega} = -B_{11}\boldsymbol{\nu} + \mathbf{c}, \quad (25)$$

где \mathbf{c} – произвольный вектор. Сопоставляя равенство (6) и соотношение (25), получим $m_* = -\frac{B_{11}}{A_{11}}, \mathbf{n} = \frac{\mathbf{c}}{n_* A_{11}}$. То есть в этом случае вектор \mathbf{n} может занимать произвольное положение в теле.

Обратимся к уравнениям (13), (14). Из уравнения (13) определим m_*

$$m_* = \frac{(B_{11} - B_{33}) \sin^2 \varkappa_0 + (B_{22} - B_{33}) \cos^2 \varkappa_0 - B_{12} \sin 2\varkappa_0}{[2(A_{11} - A_{33}) \sin^2 \varkappa_0 + (A_{22} - A_{33}) \cos^2 \varkappa_0 - A_{12} \sin 2\varkappa_0]} \quad (26)$$

и, подставляя это значение в уравнение (14), потребуем, чтобы полученное уравнение было тождеством по \varkappa_0 . В результате найдем следующие условия

$$\begin{aligned} (B_{11} - B_{33})^2 + 4(A_{11} - A_{33})(C_{11} - C_{33}) &= 0, (B_{22} - B_{33})^2 + 4(A_{22} - A_{33})(C_{22} - C_{33}) = 0, \\ B_{12}(B_{11} - B_{33}) + 2A_{12}(C_{11} - C_{33}) + 2C_{12}(A_{11} - A_{33}) &= 0, \\ B_{12}(B_{22} - B_{33}) + 2A_{12}(C_{22} - C_{33}) + 2C_{12}(A_{22} - A_{33}) &= 0, \\ 2B_{12}^2 + 8A_{12}C_{12} + (B_{11} - B_{33})(B_{22} - B_{33}) + \\ + 2(A_{11} - A_{33})(C_{22} - C_{33}) + 2(A_{22} - A_{33})(C_{11} - C_{33}) &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Первые два уравнения из системы (27) параметризуем так (μ_0, ν_0 – параметры)

$$B_{11} - B_{33} = \mu_0(A_{11} - A_{33}), \quad B_{22} - B_{33} = \nu_0(A_{22} - A_{33}). \quad (28)$$

Тогда из (27) имеем

$$\begin{aligned} (A_{11} - A_{33})[\mu_0^2(A_{11} - A_{33}) + C_{11} - C_{33}] &= 0, \\ (A_{22} - A_{33})[\nu_0^2(A_{22} - A_{33}) + C_{22} - C_{33}] &= 0, \\ (A_{11} - A_{33})(\mu_0 B_{12} + C_{12}) + A_{12}(C_{11} - C_{33}) &= 0, \\ (A_{22} - A_{33})(\nu_0 B_{12} + C_{12}) + A_{12}(C_{22} - C_{33}) &= 0, \\ B_{12}^2 + 4A_{12}C_{12} + 2\mu_0\nu_0(A_{11} - A_{33})(A_{22} - A_{33}) + \\ + (A_{11} - A_{33})(C_{22} - C_{33}) + (A_{22} - A_{33})(C_{11} - C_{33}) &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Вариант $A_{11} = A_{22} = A_{33}$ рассмотрен выше, поэтому предположим, что $A_{22} = A_{33} \neq A_{11}$. Третье уравнение системы (29) на основании первого уравнения приведем к виду $\mu_0 B_{12} + C_{12} - \mu_0^2 A_{12} = 0$. Выбором системы координат можно добиться условия $C_{12} = 0$, следовательно, $B_{12} = \mu_0 A_{12}$. Матрица A приводится к диагональному виду с помощью поворота вокруг третьей оси координат на угол α_0 , где

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2A_{12}}{A_{11} - A_{22}}. \quad (30)$$

Рассмотрим выражение $2B_{12}(B_{11} - B_{22})^{-1}$. В силу $B_{33} = B_{22}$, первого равенства из (28) и значения $B_{12} = \mu_0 A_{12}$, указанное выражение будет равно правой части соотношения (30). Это означает, что матрицы A и B одновременно могут быть приведены к диагональной форме. Поэтому равенства (29) рассмотрим в той системе, в которой A и B имеют диагональную структуру (очевидно, условие $C_{12} = 0$ следует снять). Но из третьего уравнения системы (29) все-таки следует, что $C_{12} = 0$, то есть матрица C тоже диагональна. Итак, в случае $A_{22} = A_{33}$ из системы (29) получим $C_{22} = C_{33}$. Из равенства (26) вытекает, что m_* не зависит от \varkappa_0 .

Пусть среди величин A_{11}, A_{22}, A_{33} нет равных. Тогда, принимая во внимание соотношения (28), из системы (29) имеем

$$\begin{aligned} A_{12}^2 &= (A_{11} - A_{33})(A_{22} - A_{33}), \quad C_{12} = -A_{12}\mu_0\nu_0, \quad B_{12} = A_{12}(\mu_0 + \nu_0), \\ C_{11} - C_{33} &= \mu_0^2(A_{33} - A_{11}), \quad C_{22} - C_{33} = \nu_0^2(A_{33} - A_{22}). \end{aligned} \quad (31)$$

Отсюда легко получить условие $C_{12}^2 = (C_{11} - C_{33})(C_{22} - C_{33})$. Введем обозначения $A_{11} - A_{33} = a^2$, $A_{22} - A_{33} = b^2$. Тогда из (28), (31) следует

$$\begin{aligned} A_{12} &= ab, \quad B_{12} = ab(\mu_0 + \nu_0), \quad C_{12} = -ab\mu_0\nu_0, \quad B_{11} - B_{33} = 2\mu_0a^2, \\ B_{22} - B_{33} &= 2\nu_0b^2, \quad C_{11} - C_{33} = -\mu_0^2a^2, \quad C_{22} - C_{33} = -\nu_0^2b^2. \end{aligned} \quad (32)$$

На основании (32) значение m_* из (26) представим так

$$m_* = \frac{\mu_0 a \sin \varkappa_0 - \nu_0 b \cos \varkappa_0}{a \sin \varkappa_0 - b \cos \varkappa_0}. \quad (33)$$

Легко проверить, что при наличии соотношений (32), (33) уравнение (17) становится тождеством.

Исключая из уравнений (15), (16) параметр n_* , получим

$$m_* = -\frac{s_1 \sin \varkappa_0 - s_2 \cos \varkappa_0}{\lambda_1 \sin \varkappa_0 - \lambda_2 \cos \varkappa_0}. \quad (34)$$

Правые части выражений (33), (34) совпадают, если выполнены условия

$$\lambda_1 = c_0 a, \quad \lambda_2 = c_0 b, \quad s_1 = -\mu_0 c_0 a, \quad s_2 = -\nu_0 c_0 b, \quad (35)$$

где c_0 – постоянная. На основании соотношений (33), (35) из уравнения (15) определим

$$n_* = \frac{(\nu_0 - \mu_0)abn_0 + c_0(a \cos \varkappa_0 - b \sin \varkappa_0)}{(a \sin \varkappa_0 - b \cos \varkappa_0)(a \cos \varkappa_0 + b \sin \varkappa_0)}. \quad (36)$$

Внесем выражения (31), (34)–(36) в уравнение (21)

$$(A_{11} + A_{22} - A_{33})(\mu_0 a \sin \varkappa_0 - \nu_0 b \cos \varkappa_0) + B_{33}(a \sin \varkappa_0 - b \cos \varkappa_0) - ab(\mu_0 - \nu_0)(a \cos \varkappa_0 + b \sin \varkappa_0) = 0.$$

Это уравнение выполняется для любых значений \varkappa_0 только при условиях

$$\nu_0 = \mu_0, \quad \mu_0 = -\frac{B_{33}}{(A_{11} + A_{22} - A_{33})}. \quad (37)$$

Выражения (33), (36) при наличии равенств (37) упрощаются

$$m_* = \mu_0, \quad n_* = -\frac{c_0}{a \cos \varkappa_0 + b \sin \varkappa_0}, \quad (38)$$

то есть скорость собственного вращения зависит от \varkappa_0 , а скорость прецессии нет. Исследуем полученное решение до конца. Структура его определяется формулами (6), (9)

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \mu_0 \nu_1 + n_* \cos \varkappa_0, & \omega_2 &= \mu_0 \nu_2 + n_* \sin \varkappa_0, & \omega_3 &= \mu_0 \nu_3, \\ \nu_1 &= \cos \varkappa_0 \cos \varepsilon_0 - \sin \varkappa_0 \sin \varepsilon_0 \cos n_* t, \\ \nu_2 &= \sin \varkappa_0 \cos \varepsilon_0 + \cos \varkappa_0 \sin \varepsilon_0 \cos n_* t, & \nu_3 &= -\sin \varepsilon_0 \sin n_* t, \end{aligned} \quad (39)$$

а условиями существования служат равенства (31). В силу $\nu_0 = \mu_0$ из равенств (28), (31) следуют условия, которые показывают, что одним и тем же преобразованием координат матрицы A, B, C приводятся к диагональному виду. Так как это преобразование является поворотом вокруг третьей оси, то его применение не ограничивает общности задачи.

Запишем условия (28), (31), (37) в главной системе координат $A_{ii} = A_i, B_{ii} = B_i, C_{ii} = C_i$ ($i = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} A_3 &= A_2, & B_3 &= B_2, & C_3 &= C_2, \\ B_1 &= \frac{(2A_2 - A_1)B_2}{A_1}, & C_1 &= C_2 + \frac{(A_2 - A_1)B_2^2}{A_1^2}. \end{aligned} \quad (40)$$

Векторы λ и s и значение n_* найдем из равенств (35), (38):

$$\begin{aligned} \lambda &= (c_0 \sqrt{A_1 - A_2}, 0, 0), & s &= (-c_0 \mu_0 \sqrt{A_1 - A_2}, 0, 0) \quad \left(\mu_0 = -\frac{B_2}{A_1}\right); \\ n_* &= -\frac{c_0}{\sqrt{A_1 - A_2} \cos \varkappa_0}. \end{aligned} \quad (41)$$

Таким образом, если для матриц A, B, C выполнены условия (40), а для векторов λ и s – условия из (41), то уравнения (1), (2) допускают частное решение (39), существующее в рамках случая Г.Кирхгофа-П.В.Харламова и описывающее семейство регулярных прецессий относительно вертикали со скоростью прецессии μ_0 и со скоростью собственного вращения n_* из соотношений (41).

Пусть в системе (12)–(21) m_* не зависит от \varkappa_0 . Тогда имеем следующие условия

$$\begin{aligned} 2m_* A_{23} - B_{23} &= 0, & 2m_* A_{13} - B_{13} &= 0, & 2m_* A_{12} - B_{12} &= 0, \\ m_*^2 A_{13} + C_{13} &= 0, & m_*^2 A_{23} + C_{23} &= 0, & m_*^2 A_{12} + C_{12} &= 0, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} 2m_*(A_{11} - A_{33}) - (B_{11} - B_{33}) &= 0, & 2m_*(A_{22} - A_{33}) - (B_{22} - B_{33}) &= 0, \\ m_*^2(A_{11} - A_{33}) + C_{11} - C_{33} &= 0, & m_*^2(A_{22} - A_{33}) + C_{22} - C_{33} &= 0, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} n_*[(A_{22} - A_{11}) \sin \varkappa_0 \cos \varkappa_0 + A_{12}(\cos^2 \varkappa_0 - \sin^2 \varkappa_0)] + \lambda_2 \cos \varkappa_0 - \lambda_1 \sin \varkappa_0 &= 0, \\ m_* n_*[(A_{22} - A_{11}) \sin \varkappa_0 \cos \varkappa_0 + A_{12}(\cos^2 \varkappa_0 - \sin^2 \varkappa_0)] + s_1 \sin \varkappa_0 - s_2 \cos \varkappa_0 &= 0, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} n_*(A_{13} \cos \varkappa_0 + A_{23} \sin \varkappa_0) + \lambda_3 &= 0, \\ m_*(m_* \cos \varepsilon_0 + n_*)(A_{13} \cos \varkappa_0 + A_{23} \sin \varkappa_0) + (C_{13} \cos \varkappa_0 + C_{23} \sin \varkappa_0) \cos \varepsilon_0 - s_3 &= 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Соотношения (42), (43) запишем в матричном виде

$$B = b_0 \delta + 2m_* A, \quad C = -m_*^2 A, \quad b_0 = B_{33} - 2m_* A_{33}, \quad (46)$$

где δ – единичная матрица. Выбирая подвижную систему координат так, что $A_{23} = 0$, из равенств (44), (45) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= -m_* \boldsymbol{\lambda}, \quad n_* A_{13} \cos \varkappa_0 = -\lambda_3, \\ n_*[(A_{22} - A_{11}) \sin \varkappa_0 \cos \varkappa_0 + A_{12}(\cos^2 \varkappa_0 - \sin^2 \varkappa_0)] &= \lambda_1 \sin \varkappa_0 - \lambda_2 \cos \varkappa_0. \end{aligned} \quad (47)$$

На основании этих условий равенство (21) упрощается

$$m_* = \frac{B_{33}}{A_{33} - A_{11} - A_{22}}. \quad (48)$$

С помощью (48) условия (46) преобразуем к виду

$$B = m_*(2A - Sp(A)\delta), \quad C = -m_*^2 A. \quad (49)$$

Равенство $\mathbf{s} = -m_* \boldsymbol{\lambda}$ из системы (47) и равенства (49) характеризуют условия, при выполнении которых уравнения (1), (2) имеют дополнительный первый интеграл, который является частным случаем интеграла, указанного В.А.Стекловым [5]. Таким образом, решение (39) дифференциальных уравнений (1), (2) при условиях (47), (49) является частным решением в случае В.А.Стеклова.

Проанализируем второе и третье равенства из системы (47). Если считать, что $\lambda_3 = 0$, то есть векторы гиростатического момента и обобщенного центра масс расположены в плоскости векторов $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$, тогда $A_{13} = 0$. Это означает, что векторы $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ и, следовательно, вектор \mathbf{n} лежат в главной плоскости эллипсоида инерции, построенного для неподвижной точки. Тогда при $A_{11} \neq A_{22}$ скорость собственного вращения гиростата такова

$$n_* = \frac{\lambda_1 \sin \varkappa_0 - \lambda_2 \cos \varkappa_0}{(A_{22} - A_{11}) \sin \varkappa_0 \cos \varkappa_0},$$

значит, она зависит от параметра \varkappa_0 . Скорость прецессии, в силу формулы (48), не зависит от \varkappa_0 .

Пусть в соотношениях (47) $\lambda_3 \neq 0$. Тогда, исключая величину n_* во втором и третьем равенствах (47), получим следующие условия

$$\lambda_2 = 0, \quad A_{12} = A_{23} = 0, \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_3} = \frac{A_{11} - A_{22}}{A_{13}}, \quad n_* = -\frac{\lambda_3}{A_{13} \cos \varkappa_0}. \quad (50)$$

Таким образом, вторая координатная ось подвижной системы координат является главной, а векторы $\boldsymbol{\lambda}$ и \mathbf{s} лежат в главной плоскости эллипсоида инерции. Очевидно, что угол γ_0

между вектором λ и вектором $\alpha \times \beta$ определен по формуле $\operatorname{tg} \gamma_0 = \frac{A_{11} - A_{22}}{A_{13}}$, то есть векторы λ и s занимают фиксированное положение в гиростате.

Вариант (40), (41) вытекает из решения В.А.Стеклова при условиях: $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $A_{22} = A_{33}$, $B_{22} = B_{33}$, $C_{22} = C_{33}$, $A_{ij} = 0$, $B_{ij} = 0$, $C_{ij} = 0$ ($i \neq j$). Случай (50) аналога в решении Г.Кирхгофа-П.В.Харламова не имеет.

Для условий (47)–(49) в решении (39) параметр ε_0 оказался произвольным (не зависящим от \varkappa_0). Поэтому решение (39) зависит от двух произвольных постоянных \varkappa_0 и ε_0 .

1. *Горп Г.В.* Методы исследования движений твердого тела и их приложения в классификации движений // *Механика твердого тела.* – 1982. – Вып. 14. – С.54–74.
2. *Горп Г.В., Илюхин А.А., Ковалев А.М., Савченко А.Я.* Нелинейный анализ поведения механических систем. – Киев: Наук. думка, 1984. – 228 с.
3. *Апельрот Г.Г.* Определение классов кинетически симметричных тяжелых гироскопов, способных допускать упрощенные движения, близкие к инерциальному или к некоторому упрощенному движению гироскопа Лагранжа // *Изв. АН СССР. Серия физическая.* – 1938. – Вып.3. – С.385–411.
4. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // *Ann. mat. pura ed appl.* – 1947. – S.4, 26, f.3–4. – P.271–281.
5. *Орешкина Л.Н.* Математические аналогии некоторых задач динамики твердого тела // *Механика твердого тела.* – 1986. – Вып. 18. – С.103–110.
6. *Стеклов В.А.* О некоторых возможных движениях твердого тела в жидкости // *Тр. отделения физических наук общества любителей естествознания.* – 1895. – 7, вып.2. – С.10–21.
7. *Харламов П.В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // *Журнал прикл. механики и техн. физики.* – 1963. – N4. – С.17-29.
8. *Kirchhoff G.R.* Über Bewegung eines Rötation korpers in einer Flüssigkeit // *J. fur die reine und angew. Math.* – 1870. – B.71. – S.237–262.
9. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. I: The equation of motion and their transformations // *J. Mecan. Theor. Appl.* – 1986. – 5, N5. – P.747–754.