УДК 531.55:521.2

©2008. **Я.С. Зинкевич, Т.А. Козаченко**

ЭВОЛЮЦИЯ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНОГО ВОССТАНАВЛИВАЮЩЕГО МОМЕНТА

Исследовано движение твердого тела, близкое к регулярной прецессии, в случае Лагранжа под действием постоянного возмущающего момента и восстанавливающего момента, зависящего от медленного времени и угла прецессии. Получено решение усредненной системы уравнений в первом и втором приближении.

Рассмотрим движение динамически симметричного твердого тела относительно неподвижной точки O под действием постоянного возмущающего момента и восстанавливающего момента, зависящего от медленного времени и угла прецессии. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned}
&A\dot{p} + (C-A)\,qr = k\,(\tau,\psi)\sin\theta\cos\varphi + M_1,\\
&A\dot{q} + (A-C)\,pr = -k\,(\tau,\psi)\sin\theta\sin\varphi + M_2,\\
&C\dot{r} = M_3, M_i = M_i\,(p,q,r,\psi,\theta,\varphi) \quad (i=1,2,3)\,, \qquad \tau=\varepsilon t,\\
&\dot{\psi} = (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\,\mathrm{cosec}\theta,\\
&\dot{\theta} = p\cos\varphi - q\sin\varphi,\\
&\dot{\varphi} = r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\,\mathrm{ctg}\theta.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь p,q,r – проекции вектора угловой скорости тела на главные оси инерции тела; величины $M_i\,(i=1,2,3)$ – проекции вектора возмущающего момента на те же оси, являющиеся периодическими функциями углов Эйлера ψ,φ,θ с периодами 2π; φ – угол собственного вращения; ψ – угол прецессии; θ – угол нутации; A – экваториальный, C – осевой момент инерции тела относительно точки O. Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент, зависящий от медленного времени $\tau=\varepsilon t,\ \varepsilon << 1$ и угла прецессии $k\,(\tau,\psi)$. При отсутствии возмущений $M_i = 0\ (i=1,2,3)$ и $k = \mathrm{const}$ уравнение(1) отвечает случаю волчка Лагранжа. В данной работе делаются следующие исходные предположения:

$$(p^2+q^2)^{1/2} << r, \qquad Cr^2 >> k, \qquad |M_i| << k \quad (i=1,\,2,\,3), \tag{2}$$

которые означают, что направление угловой скорости тела близко к оси динамической симметрии; угловая скорость достаточно велика; возмущающие моменты малы по сравнению с восстанавливающим моментом.

Неравенства (2) позволяют ввести малый параметр $\varepsilon << 1$ и положить:

$$\begin{aligned}
&p=\varepsilon P, \quad q=\varepsilon Q, \quad k=\varepsilon K,\\
&M_i = \varepsilon^2 M_i^*(P,Q,r,\psi,\theta,\varphi) \quad (i=1,2,3).
\end{aligned} \tag{3}$$

Ставится задача исследования асимптотического поведения системы (1), если выполнены условия (2)–(3), которое будет проводиться методом усреднения [1, 2] на интервале времени порядка ε^{-1}. Рассмотрим систему нулевого приближения (предварительно разделив обе части первых двух уравнений (1) на ε после замены переменных (3)), и положим $\varepsilon = 0$. Тогда решение полученной системы имеет вид

$$
\begin{aligned}
& r = r_0, \quad \psi = \psi_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \varphi = \varphi_0 + r_0 t\,, \\
& P = a\cos\gamma_0 + b\sin\gamma_0 + K(\theta_0,\psi_0)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0 \sin\,(r_0 t + \varphi_0), \\
& Q = a\sin\gamma_0 - b\cos\gamma_0 + K(\theta_0,\psi_0)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0 \cos\,(r_0 t + \varphi_0), \\
& a = P_0 - K(\theta_0,\psi_0)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\sin\varphi_0, \\
& b = -Q_0 + K(\theta_0,\psi_0)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta_0\cos\varphi_0, \\
& \gamma_0 = n_0 t, \quad n_0 = (C-A)A^{-1}r_0, \quad r_0 \neq 0, \quad |n_0/r_0| \leq 1.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Здесь $r_0, \psi_0, \theta_0, \varphi_0, P_0, Q_0$ – постоянные, равные начальным значениям переменных при $t = 0$, а переменная $\gamma = \gamma_0$ имеет смысл фазы прецессионных колебаний. Пользуясь соотношениями (3), (4), перейдем в системе (1) от переменных $p, q, r, \psi, \theta, \varphi$ к новым переменным $a, b, \delta, \psi, \theta, \alpha, \gamma$, где $\alpha = \gamma + \varphi$, $r = r_0 + \varepsilon\delta$. После преобразований получим систему семи уравнений вида:

$$
\begin{aligned}
& \dot a = \varepsilon\Big\{A^{-1}(M_1^0\cos\gamma + M_2^0\sin\gamma) - K(\tau,\psi)C^{-1}r_0^{-1}\cos\theta(b- \\
& - K(\tau,\psi)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\cos\alpha) - C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\sin\alpha\Big[\frac{\partial K(\tau,\psi)}{\partial\tau} + \\
& + (a\sin\alpha - b\cos\alpha + K(\tau,\psi)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta)\mathrm{cosec}\theta\frac{\partial K(\tau,\psi)}{\partial\psi}\Big] + \\
& + \varepsilon\Big(K(\tau,\psi)C^{-1}r_0^{-2}\delta\cos\theta(b - 2K(\tau,\psi)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\cos\alpha) + \\
& + C^{-1}r_0^{-2}\delta\sin\theta\sin\alpha\Big[\frac{\partial K(\tau,\psi)}{\partial\tau} + (a\sin\alpha - b\cos\alpha + \\
& + 2K(\tau,\psi)C^{-1}r_0^{-1}\delta\sin\theta)\mathrm{cosec}\theta\frac{\partial K(\tau,\psi)}{\partial\psi}\Big] - K(\tau,\psi)C^{-2}r_0^{-2}M_3^0\sin\theta\sin\alpha\Big)\Big\}, \\
& \dot b = \varepsilon\Big\{A^{-1}(M_1^0\sin\gamma - M_2^0\cos\gamma) + K(\tau,\psi)C^{-1}r_0^{-1}\cos\theta(a+ \\
& + K(\tau,\psi)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\sin\alpha) + C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\cos\alpha\Big[\frac{\partial K(\tau,\psi)}{\partial\tau} + \\
& + (a\sin\alpha - b\cos\alpha + K(\tau,\psi)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta)\mathrm{cosec}\theta\frac{\partial K(\tau,\psi)}{\partial\psi}\Big] - \\
& - \varepsilon K(\tau,\psi)C^{-1}r_0^{-2}\delta\cos\theta(a + 2K(\tau,\psi)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta\sin\alpha) +
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$$+\,C^{-1}r_0^{-2}\delta\sin\theta\cos\alpha\Big[\frac{\partial K(\tau,\psi)}{\partial\tau}+(a\sin\alpha-b\cos\alpha+$$
$$+\,2K(\tau,\psi)C^{-1}r_0^{-1}\sin\theta)\mathrm{cosec}\;\theta\frac{\partial K(\tau,\psi)}{\partial\psi}\Big]+K(\tau,\psi)C^{-2}r_0^{-2}M_3^0\sin\theta\cos\alpha,\Big)\Big\},$$
$$\dot\delta=\varepsilon\,C^{-1}M_3^0,$$
$$\dot\psi=\varepsilon\Big(\mathrm{cosec}\theta\;(a\sin\alpha-b\cos\alpha)+K(\tau,\psi)C^{-1}r^{-1}-\varepsilon K(\tau,\psi)C^{-1}r_0^{-2}\delta\Big),$$
$$\dot\theta=\varepsilon\;(a\cos\alpha+b\sin\alpha),$$
$$\dot\alpha=CA^{-1}r_0+\varepsilon\Big(CA^{-1}\delta-\mathrm{ctg}\theta\;(a\sin\alpha-b\cos\alpha)-$$
$$-\,K(\tau,\psi)C^{-1}r_0^{-1}\cos\theta+\varepsilon K(\tau,\psi)C^{-1}r_0^{-2}\delta\cos\theta\Big),$$
$$\dot\gamma=n_0+\varepsilon(C-A)A^{-1}\delta,$$
$$M_i^0(a,b,\delta,\psi,\theta,\alpha,\gamma)=M_i^*(P,Q,r,\psi,\theta,\varphi)\qquad(i=1,2,3).$$

Рассмотрим полученную систему с точки зрения применения метода усреднения [1, 2]. Система (5) содержит медленные переменные $a,b,r,\psi,\varphi,\theta$ и быстрые переменные – фазы α,γ с постоянными частотами $CA^{-1}r$ и $(C-A)\,A^{-1}r$ соответственно. Проекции M_i^0 возмущающего момента являются периодическими функциями α,γ с периодом 2π. В работах [3, 4] исследованы движения твердого тела при предположениях (2), когда восстанавливающий момент постоянен $k=\mathrm{const}$ или $k=k\,(\theta)$, а также случай зависимости восстанавливающего момента от медленного времени и угла нутации одновременно $k=k\,(\tau,\theta)$. В данной работе рассматривается случай зависимости восстанавливающего момента от медленного времени и угла прецессии $k=k\,(\psi,\theta)$. Зависимость восстанавливающего момента от τ и ψ приводит к появлению в первых двух уравнениях системы (5) слагаемых, содержащих частные производные $\dfrac{\partial K\,(\tau,\psi)}{\partial\tau}$ и $\dfrac{\partial K\,(\tau,\psi)}{\partial\psi}$. Рассмотрим возмущенное движение твердого тела в случае Лагранжа под действием возмущающего момента, постоянного в связанных осях:

$$M_1=\,M_2=\,M_3=\mathrm{const}$$

и восстанавливающего момента конкретного вида:

$$k(\tau,\psi)=k(\tau)\,\sin\psi=\varepsilon K(\tau)\,\sin\psi.$$

После ряда преобразований решение усредненной системы уравнений первого приближения для медленных переменных примет вид:

$$\theta^{(1)}=\theta_0,\qquad\delta^{(1)}(\tau)=C^{-1}M_3^0\tau,$$
$$\mathrm{tg}\,\frac{\psi^{(1)}(\tau)}{2}=\mathrm{tg}\,\frac{\psi_0}{2}\exp F_1(\tau),$$

$$a^{(1)}(\tau) = \exp({}^1\!/\!{}_2 F(\tau))(a_0 + b_0)^{1/2}\cos(G+\beta),$$
$$b^{(1)}(\tau) = \exp({}^1\!/\!{}_2 F(\tau))(a_0 + b_0)^{1/2}\sin(G+\beta),$$
$$F(\tau) = -C^{-1}r_0^{-1}\int\limits_0^{\tau} K(\tau')\,\frac{1-\mathrm{tg}^2\,\dfrac{\psi_0}{2}\exp 2F_1(\tau')}{1+\mathrm{tg}^2\,\dfrac{\psi_0}{2}\exp 2F_1(\tau')}d\tau',$$
$$F_1(\tau) = C^{-1}r_0^{-1}\int\limits_0^{\tau} K(\tau')\,d\tau', \qquad \mathrm{tg}\beta = \frac{b_0}{a_0},$$
$$G(\tau) = C^{-1}r_0^{-1}\cos\theta_0\int\limits_0^{\tau} K(\tau')\sin\psi^{(1)}(\tau')\,d\tau',$$
$$\sin\psi^{(1)}(\tau) = \frac{2\,\mathrm{tg}^2\,\dfrac{\psi_0}{2}\exp F_1(\tau)}{1+\mathrm{tg}^2\,\dfrac{\psi_0}{2}\exp 2F_1(\tau)}.$$

Отметим некоторые качественные особенности движения в данном случае. Угол прецессии 2π-периодическая переменная, для которой выполняется соотношение $\mathrm{tg}\,\dfrac{\psi}{2} \geq \mathrm{tg}\,\dfrac{\psi_0}{2}$. Медленные переменные a, b являются произведением осциллирующего сомножителя с частотой, обусловленной видом восстанавливающего момента и экспоненциального сомножителя. Определим эволюцию углов прецессии и нутации во втором приближении:

$$\psi_\varepsilon^\vee(t) = 2\,\mathrm{arctg}\Big[\mathrm{tg}\,\frac{\psi_0}{2}\exp(F_1(\varepsilon t))\Big] + \varepsilon\exp(-F(\varepsilon t))\int\limits_0^{\varepsilon t} g(\tau)\exp(F(\tau))d\tau + S_1,$$
$$S_1 = \varepsilon\,AC^{-1}r_0^{-1}\mathrm{cosec}\theta\exp(1/2F(\varepsilon t))\big[a_0\cos(\alpha-G) + b_0\sin(\alpha-G)\big],$$
$$\theta_\varepsilon^\vee(t) = \theta_0 + \varepsilon\,AC^{-2}r_0^{-2}\sin\theta_0\int\limits_0^{\varepsilon t}\frac{\partial K(\tau,\psi^{(1)}(\tau))}{\partial\tau}d\tau +$$
$$+\frac{1}{4}AC^{-3}r_0^{-3}\sin\theta_0\int\limits_0^{\varepsilon t} K^2(\tau)\sin 2\psi^{(1)}d\tau + S_2,$$
$$S_2 = \varepsilon\,AC^{-1}r_0^{-1}\exp(1/2F(\varepsilon t))\big[a_0\sin(\alpha-G) - b_0\cos(\alpha-G)\big],$$
$$\alpha(t) = \varphi_0 + CA^{-1}r_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon^2 A^{-1}M_3^0 t^2 - \varepsilon\,C^{-1}r_0\cos\theta\int\limits_0^{t} K(\varepsilon t')\sin\psi^{(1)}(\varepsilon t')dt',$$
$$g(\tau) = AC^{-3}r_0^{-3}\cos\theta_0 K^2(\tau)\sin^2\psi^{(1)} - C^{-2}r_0^{-2}K(\tau)\sin\psi^{(1)}M_3^0\tau.$$

Зависимость восстанавливающего момента от медленного времени и угла прецессии привела к усложнению приближенных выражений для угла прецессии и нутации. Полученные второе и третье слагаемые в $\psi_\varepsilon^\vee(t)$ дополняют известное из приближенной теории гироскопов выражение для угловой скорости прецессии.

1. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
2. *Волосов В. М., Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 507 с.
3. *Кушпиль Т.А., Тимошенко И.А., Лещенко Д.Д.* Некоторые задачи эволюции вращений твердого тела под действием возмущающих моментов // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 119–125.
4. *Акуленко Л.Д., Козаченко Т.А., Лещенко Д.Д.* Возмущенные вращения твердого тела под действием нестационарного восстанавливающего момента // Там же. – 2002. – Вып. 32. – С. 77–84.

Гос. академия строительства и архитектуры, Одесса, Украина
yaninaz@mail.ru,kushpil.ru@rambler.ru

Получено 10.09.08