НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ВЫПУСК
32

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Межведомственный сборник научных трудов Основан в 1969 г.

ДОНЕЦК 2002

ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2002. Вып. 32

УДК 531.391

©2002. **А.В. Шатина**

ЭВОЛЮЦИЯ ПОСТУПАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО ШАРА

Исследуется эволюция пространственного поступательно-вращательного движения вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил. Уравнения, описывающие эволюцию движения, получены методом разделения движений и усреднения в канонических переменных Андуайе-Делоне. Данная статья продолжает серию работ [1-3], посвященных задаче о движении вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил, являющейся модельной при изучении приливной эволюции движения планет.

1. Постановка задачи. Уравнения движения. Рассмотрим задачу о движении вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил. Шар предполагается однородным, изотропным с массой m и плотностью ρ, в естественном недеформированном состоянии занимающим область $V = \{\mathbf{r} : |\mathbf{r}| < r_0\}$ в трехмерном евклидовом пространстве.

Пусть $OXYZ$ - инерциальная система координат с началом в притягивающем центре, $C\xi_1\xi_2\xi_3$ - система осей Кенига, $Cx_1x_2x_3$ - подвижная система координат с началом в центре масс деформированного шара. Положение точки шара в системе координат $OXYZ$ определим векторным полем $\zeta(\mathbf{r}, t)$:

$$\zeta(\mathbf{r}, t) = \mathbf{R}(t) + \Gamma(t)(\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)), \tag{1}$$

$$\mathbf{R}(t) = \frac{1}{m}\int \zeta(\mathbf{r}, t)\rho dx, \ \int \mathbf{u} dx = 0, \ \int \mathrm{rot}\mathbf{u} dx = 0. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{R}(t)$ – радиус-вектор центра масс C деформированного шара, $\Gamma(t)$ – оператор перехода от системы координат $Cx_1x_2x_3$ к системе осей Кенига $C\xi_1\xi_2\xi_3$, $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ – вектор упругого смещения. Интегрирование здесь и далее ведется по области V. Радиус-вектор точки C и оператор Γ определяются однозначно по заданному векторному полю $\zeta(\mathbf{r}, t)$ условиями (2).

Деформированное состояние шара будем описывать, используя классическую теорию упругости малых деформаций. Функционал потенциальной энергии упругих деформаций $E[\mathbf{u}]$ имеет вид [4]:

$$E[\mathbf{u}] = \int \alpha_1(I_E^2 - \alpha_2 II_E)dx, \ \alpha_1 = \frac{\mathrm{E}(1-\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)}, \ \alpha_2 = \frac{2(1-2\nu)}{1-\nu},$$

$$I_E = \sum_{i=1}^{3} e_{ii}, \ II_E = \sum_{i<j}^{3}(e_{ii}e_{jj} - e_{ij}^2), \ e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),$$

где Е – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, I_E, II_E – инварианты тензора малых деформаций. Функционал внутренних диссипативных сил $D = D[\dot{\mathbf{u}}]$ будем полагать заданным в виде: $D[\dot{\mathbf{u}}] = \chi E[\dot{\mathbf{u}}]$, где $\chi > 0$ - коэффициент внутреннего вязкого трения (модель Кельвина-Фойгта).

Кинетическая энергия шара представляется функционалом

$$T = \frac{1}{2}\int \dot{\zeta}^2 \rho dx = \frac{1}{2}\int [\Gamma^{-1}\dot{\mathbf{R}} + \omega \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}) + \dot{\mathbf{u}}]^2 \rho dx, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость системы координат $Cx_1x_2x_3$, $\omega \times (\cdot) = \Gamma^{-1}\dot{\Gamma}(\cdot)$. Потенциальная энергия внешнего гравитационного поля определяется равенством

$$\Pi = -\gamma \int \frac{\rho dx}{\sqrt{(\mathbf{R} + \Gamma(\mathbf{r} + \mathbf{u}))^2}}, \tag{4}$$

где $\gamma = fm_0$, f – универсальная гравитационная постоянная, m_0 – масса притягивающего центра. Так как $|\mathbf{R}| \gg |\mathbf{r} + \mathbf{u}|$, то подынтегральное выражение в (4) можно разложить в ряд по степеням $|\mathbf{r} + \mathbf{u}|/R$, где $R = |\mathbf{R}|$. Ограничиваясь членами второго порядка по степеням $|\mathbf{r} + \mathbf{u}|/R$ и линейными по $|\mathbf{u}|/R$, получим

$$\Pi = -\frac{\gamma m}{R} + \frac{\gamma}{R^3} \int \big\{(\mathbf{r}, \mathbf{u}) - 3(\Gamma^{-1}\mathbf{R}_0, \mathbf{r})(\Gamma^{-1}\mathbf{R}_0, \mathbf{u})\big\}\rho dx, \quad \mathbf{R}_0 = \mathbf{R}/R$$

Гравитационное взаимодействие частиц вязкоупругого шара друг с другом определяется функционалом потенциальной энергии

$$\Pi_1 = \int \frac{fm(\mathbf{r}, \mathbf{u})}{r_0^3}\rho dx.$$

В поставленной задаче имеет место закон сохранения момента количеств движения относительно притягивающего центра [1]:

$$\dot{\mathbf{G}}_0 = 0, \ \mathbf{G}_0 = \mathbf{R} \times m\dot{\mathbf{R}} + \mathbf{K},$$

где $\mathbf{K}$ - момент количеств движения вязкоупругого шара относительно его центра масс, определяемый равенством

$$\mathbf{K} = \int \Gamma(\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times [\Gamma(\mathbf{r} + \mathbf{u})]^{\bullet}\rho dx.$$

Не нарушая общности, будем считать, что ось OZ направлена по вектору $\mathbf{G}_0$.

Уравнения движения рассматриваемой механической системы выпишем в форме уравнений Рауса, используя обобщенные канонические переменные для описания поступательно-вращательного движения шара и лагранжевы переменные для описания деформаций.

Для описания вращательного движения вязкоупругого шара относительно системы координат $C\xi_1\xi_2\xi_3$ воспользуемся каноническими переменными Андуайе $I_1, \ I_2, \ I_3, \varphi_1, \ \varphi_2, \ \varphi_3$ [6]. Здесь $I_2 = |\mathbf{K}|$, I_1, I_2 – проекции вектора $\mathbf{K}$ на оси Cx_3 и $C\xi_3$ соответственно. Оператор перехода от системы координат $Cx_1x_2x_3$ к системе координат $C\xi_1\xi_2\xi_3$ в переменных Андуайе представляет собой произведение пяти ортогональных матриц

$$\Gamma = \Gamma_3(\varphi_3)\Gamma_1(\delta_1)\Gamma_3(\varphi_2)\Gamma_1(\delta_2)\Gamma_3(\varphi_1), \tag{5}$$

где

$$\Gamma_3(\varphi_k) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_k & -\sin\varphi_k & 0 \\ \sin\varphi_k & \cos\varphi_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \Gamma_1(\delta_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\delta_j & -\sin\delta_j \\ 0 & \sin\delta_j & \cos\delta_j \end{pmatrix}, \ k = 1,2,3, j = 1,2,$$

$$\cos\delta_1 = I_3I_2^{-1}, \ \cos\delta_2 = I_1I_2^{-1}.$$

Компоненты вектора $\mathbf{K}$ в системе координат $Cx_1x_2x_3$ в переменных Андуайе имеют вид

$$\Gamma^{-1}\mathbf{K} = (\sqrt{I_2^2 - I_1^2}\sin\varphi_1,\ \sqrt{I_2^2 - I_1^2}\cos\varphi_1,\ I_1). \tag{6}$$

Для описания поступательного движения шара воспользуемся каноническими переменными Делоне L, G, H, l, g, h [7]. Здесь $G = |\mathbf{G}|$, $\mathbf{G} = \mathbf{R}\times m\dot{\mathbf{R}}$, $L = \sqrt{\gamma m^2 a}$ (a – большая полуось орбиты центра масс шара), H – проекция вектора $\mathbf{G}$ на ось OZ, l – средняя аномалия, g – долгота перигелия от восходящего узла, h – угол между осью OX и линией пересечения плоскости орбиты центра масс с плоскостью OXY. Длина вектора $\mathbf{R}$ в переменных Делоне определяется равенством

$$R = \frac{G^2}{\gamma m^2(1+e\cos\vartheta)},$$

где $e = \sqrt{1 - G^2/L^2}$ – эксцентриситет орбиты центра масс шара, ϑ - истинная аномалия, зависящая от переменных l, L, G через соотношения

$$\cos w = \frac{e+\cos\vartheta}{1+e\cos\vartheta},\ \ l = w - e\sin w,$$

в которых w – эксцентрическая аномалия. Вектор $\mathbf{R}$ в системе координат $OXYZ$ в переменных Делоне имеет вид

$$\mathbf{R} = \Gamma_3(h)\Gamma_1(i)\Gamma_3(g+\vartheta)(R,0,0)^{\mathrm{T}}, \tag{7}$$

где i - наклонение орбиты, $\cos i = H/G$.

Функционал Рауса определяется равенством

$$\Re = \sum_{i=1}^{6} p_i\dot{q}_i - T + \Pi + \Pi_1 + E[\mathbf{u}]\Bigg|_{(\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q})\to(\mathbf{p},\mathbf{q})},$$

где $\mathbf{q} = (q_1, ..., q_6)$, $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_6)$, $q_i (i = 1, ..., 6)$ – обобщенные координаты, определяющие координаты вектора $\mathbf{R}$ и оператор Γ, $p_i (i = 1, ..., 6)$ – соответствующие им обобщенные импульсы. С использованием переменных Андуайе-Делоне функционал Рауса представляется в виде

$$\Re = \Re[I_1, I_2, I_3, L, G, H, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, l, g, h, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}] =$$

$$= -\frac{\gamma^2 m^3}{2L^2} + \frac{I_2^2}{2A} - \frac{1}{A}\left(\Gamma^{-1}\mathbf{K}, \int \mathbf{r}\times\dot{\mathbf{u}}\rho dx\right) - \frac{1}{A^2}\int \big(\Gamma^{-1}\mathbf{K}\times\mathbf{r}, \Gamma^{-1}\mathbf{K}\times\mathbf{u}\big)\rho dx +$$

$$+\frac{\gamma}{R^3}\int \big\{(\mathbf{r},\mathbf{u}) - 3(\Gamma^{-1}\mathbf{R}_0,\mathbf{r})(\Gamma^{-1}\mathbf{R}_0,\mathbf{u})\big\}\rho dx + \Pi_1 + E[\mathbf{u}] + \Re^*.$$

Здесь $A = 2.5mr_0^2$, слагаемое $\Re^*$ содержит члены второго и более высоких порядков по компонентам векторов $\mathbf{u}$ и $\dot{\mathbf{u}}$, компоненты вектора $\Gamma^{-1}\mathbf{K}$ определяются равенством (6), а компоненты вектора $\Gamma^{-1}\mathbf{R}_0$, согласно (5) и (7), вычисляются по формуле

$$\Gamma^{-1}\mathbf{R}_0 = \Gamma_3(-\varphi_1)\Gamma_1(-\delta_2)\Gamma_3(-\varphi_2)\Gamma_1(-\delta_1)\Gamma_3(h-\varphi_3)\Gamma_1(i)\Gamma_3(g+\vartheta)(1,0,0)^{\mathrm{T}}.$$

Уравнения движения выписываются в форме уравнений Рауса

$$\dot{I}_k = -\frac{\partial \Re}{\partial \varphi_k},\ \dot{\varphi}_k = \frac{\partial \Re}{\partial I_k}\ \ (k = 1,2,3),$$

$$\dot{L} = -\frac{\partial \Re}{\partial l},\ \dot{G} = -\frac{\partial \Re}{\partial g},\ \dot{H} = -\frac{\partial \Re}{\partial h},\ \dot{l} = \frac{\partial \Re}{\partial L},\ \dot{g} = \frac{\partial \Re}{\partial G},\ \dot{h} = \frac{\partial \Re}{\partial H}, \tag{8}$$

$$\left(-\frac{d}{dt}\nabla_{\dot{\mathbf{u}}}\Re + \nabla_{\mathbf{u}}\Re + \nabla_{\dot{\mathbf{u}}}D + \lambda_1, \delta\mathbf{u}\right)_V + \int (\lambda_2, \mathrm{rot}\delta\mathbf{u})dx = 0\ \ \forall \delta\mathbf{u} \in \left(W_2^1(V)\right)^3, \tag{9}$$

где $\left(W_2^1(V)\right)^3$ - пространство Соболева, $\lambda_i = \lambda_i(t)\,(i = 1,2)$ - неопределенные множители Лагранжа, порожденные условиями (2). Уравнения (8), (9) совместно с условиями (2) образуют полную систему уравнений, определяющую движение рассматриваемой механической системы.

2. Вывод эволюционной системы уравнений. На следующем шаге к системе (8), (9) применим метод разделения движений [6,8], основанный на предположении, что время затухания свободных упругих колебаний шара на наинизшей собственной частоте существенно превосходит период этих колебаний, но намного меньше характерного времени движения шара как целого. Так как жесткость шара предполагается большой, то можно ввести малый параметр $\varepsilon = \omega_0^2 \rho r_0^2 \mathrm{E}^{-1}$, где ω_0 - модуль начальной угловой скорости шара. Выбирая соответствующим образом масштабы размерных единиц, можно получить $\varepsilon = \mathrm{E}^{-1}$. При $\varepsilon = 0$ вектор упругого смещения $\mathbf{u}$ полагается равным нулю, а уравнения (8) описывают поступательно-вращательное движение абсолютно твердого шара в центральном ньютоновском поле сил и имеют вид

$$\dot{I}_k = 0 \quad (k = 1,2,3),\ \dot{L} = 0,\ \dot{G} = 0,\ \dot{H} = 0,$$

$$\dot{\varphi}_1 = 0,\ \dot{\varphi}_2 = \omega_2,\ \dot{\varphi}_3 = 0,\ \dot{l} = \omega_4,\ \dot{g} = 0,\ \dot{h} = 0, \tag{10}$$

где $\omega_2 = I_2/A,\ \omega_4 = \gamma^2 m^3/L^3$.

Система уравнений (10) легко интегрируется. Соответствующее движение таково: центр масс шара движется по кеплеровской орбите как материальная точка с массой, равной массе шара, при этом шар равномерно вращается вокруг оси, неизменно ориентированной в инерциальной системе координат. Примем это движение за невозмущенное.

При $\varepsilon \neq 0$, согласно методу разделения движений, вектор упругого смещения $\mathbf{u}$ и множители Лагранжа $\lambda_1,\ \lambda_2$ ищем в виде

$$\mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{u}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{u}_2 + \cdots,\ \lambda_i = \lambda_{i0} + \varepsilon \lambda_{i1} + \cdots (i = 1,2).$$

Для определения функции $\mathbf{u}_1$ получаем квазистатическую задачу теории упругости:

$$\varepsilon \nabla E[\mathbf{u}_1 + \chi \dot{\mathbf{u}}_1] = \rho \left\{ \left[\frac{2}{3}\omega_2^2 - \frac{fm}{r_0^3}\right]\mathbf{r} - \frac{1}{A^2}B_1\mathbf{r} + \frac{3\gamma}{R^3}B_2\mathbf{r} \right\}, \tag{11}$$

$$\sigma_n = 0. \tag{12}$$

Здесь

$$\varepsilon \nabla E[\mathbf{u}] = -\frac{1}{2(1+\nu)}\left[\frac{1}{1-2\nu}\mathrm{graddiv}\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}\right],$$

$$B_1 = \left\| b_{ij}^{(1)} \right\|,\ b_{ii}^{(1)} = K_i^2 - I_2^2/3\ (i = 1, 2, 3),\ b_{ij}^{(1)} = K_i K_j\ (i \neq j),$$
$$B_2 = \left\| b_{ij}^{(2)} \right\|,\ b_{ii}^{(2)} = \gamma_i^2 - 1/3\ (i = 1, 2, 3),\ b_{ij}^{(2)} = \gamma_i \gamma_j\ (i \neq j),$$
$$\Gamma^{-1}\mathbf{K} = (K_1,\, K_2,\, K_3),\ \Gamma^{-1}\mathbf{R}_0 = (\gamma_1,\, \gamma_2,\, \gamma_3),\ \sigma_n = (\sigma_{n1},\, \sigma_{n2},\, \sigma_{n3}),$$
$$\sigma_{ni} = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \frac{x_i}{r}\mathrm{div}\mathbf{u} + \frac{1}{2(1+\nu)}\left[\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}, \frac{\mathbf{r}}{r}\right) + \left(\mathrm{grad}u_i,\, \frac{\mathbf{r}}{r}\right)\right]\ (i = 1, 2, 3)$$

Условие (12) означает равенство нулю напряжений на поверхности шара [5].

Решение задачи (11), (12) представляется в виде

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_{11} + \mathbf{u}_{12} + \mathbf{u}_{13}, \tag{13}$$

где

$$\mathbf{u}_{11} = \rho\left(-2\omega_2^2/3 + fmr_0^{-3}\right)\left(d_1 r^2 + d_2 r_0^2\right)\mathbf{r},$$
$$\mathbf{u}_{12} = -\rho A^{-2}\left\{a_1(B_1\mathbf{r}, \mathbf{r})\mathbf{r} + (a_2 r^2 + a_3 r_0^2)B_1\mathbf{r}\right\},$$
$$\mathbf{u}_{13} \approx \left(1 - \chi\omega_2\frac{\partial}{\partial\varphi_2} - \chi\omega_4\frac{\partial}{\partial l}\right)\mathbf{u}_{130},$$
$$\mathbf{u}_{130} = 3\gamma\rho R^{-3}\left\{a_1(B_2\mathbf{r}, \mathbf{r})\mathbf{r} + (a_2 r^2 + a_3 r_0^2)B_2\mathbf{r}\right\},$$
$$d_1 = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{10(1-\nu)},\ d_2 = \frac{(2\nu-1)(3-\nu)}{10(1-\nu)},$$
$$a_1 = \frac{(1+\nu)}{5\nu+7},\ a_2 = -\frac{(1+\nu)(2+\nu)}{5\nu+7},\ a_3 = \frac{(1+\nu)(2\nu+3)}{5\nu+7}.$$

Функция $\mathbf{u}_{13}$ представлена двумя первыми членами степенного ряда в предположении, что $|\chi\omega_k| \ll 1\ (k = 1, 2)$. Функции $\mathbf{u}_{11}$ соответствует сферически симметричная деформация шара. Функция $\mathbf{u}_{12}$ описывает осесимметричную упругую деформацию планеты (сжатие по оси вращения) под действием центробежных сил инерции, вызванных собственным вращением планеты. Механический смысл слагаемого $\mathbf{u}_{13}$ состоит в том, что первый член в нем определяет приливную деформацию по оси, соединяющей центр масс шара с притягивающим центром, а два последующих характеризуют запаздывание приливных деформаций из-за сил вязкого трения.

Согласно методу разделения движений необходимо подставить найденное решение $\mathbf{u} = \varepsilon\mathbf{u}_1$ в правые части уравнений (8), предварительно линеаризовав их по $\mathbf{u}$ и $\dot{\mathbf{u}}$. После вычисления тройных интегралов по области V получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных Андуайе-Делоне, описывающих поступательно-вращательное движение шара с учетом возмущений, вызванных упругостью и диссипацией. По сути дела эта система уравнений описывает поступательно-вращательное движение шара под действием приливных сил. Назовем указанную систему уравнений “возмущенной”.

Так как имеет место закон сохранения момента количеств движения шара относительно притягивающего центра

$$\mathbf{G}_0 = \mathbf{G} + \mathbf{K}, \tag{14}$$

то это означает, что векторы $\mathbf{G}$, $\mathbf{K}$ и $\mathbf{G}_0$ лежат в одной плоскости и выполнено равенство $\varphi_3 - h = \pi$. Предполагая, что в системе отсутствуют резонансы, и выполняя процедуру усреднения правых частей “возмущенной” системы уравнений по “быстрым” угловым переменным φ_2 и l, получим приближенную систему дифференциальных уравнений для описания эволюции “медленных” переменных

$$\dot{I}_1 = \cos\delta_2 \dot{I}_2,$$

$$\dot{I}_2 = -18\varepsilon\chi\rho^2 D_2\omega_4^4 \left\{ \frac{G^3}{L^3} \left[\left(1+z^2\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{3e^2}{4} + \frac{e^4}{16} \right) + \left(\cos^2 g + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + z^2 \sin^2 g\right) \left(\frac{3e^2}{2} + \frac{e^4}{4} \right) \right] \omega_2 - z \left(1 + \frac{15e^2}{2} + \frac{45e^4}{8} + \frac{5e^6}{16} \right) \omega_4 \right\},$$

$$\dot{I}_3 = -18\varepsilon\chi\rho^2 D_2\omega_4^4 \left\{ \frac{G^3}{L^3} \left[(z\cos i + \cos\delta_1) \left(\frac{1}{2} + \frac{3e^2}{4} + \frac{e^4}{16} \right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(z\sin^2 g\cos i + \cos^2 g\cos\delta_1\right) \left(\frac{3e^2}{2} + \frac{e^4}{4} \right) \right] \omega_2 - \cos i \left(1 + \frac{15e^2}{2} + \frac{45e^4}{8} + \frac{5e^6}{16} \right) \omega_4 \right\},$$

$$\dot{L} = -18\varepsilon\chi\rho^2 D_2\omega_4^4 \left\{ -z \left(1 + \frac{15e^2}{2} + \frac{45e^4}{8} + \frac{5e^6}{16} \right) \omega_2 + \right. \tag{15}$$
$$\left. + \frac{L^3}{G^3} \left(1 + \frac{31e^2}{2} + \frac{255e^4}{8} + \frac{185e^6}{16} + \frac{25e^8}{64} \right) \omega_4 \right\},$$

$$\dot{G} = -18\varepsilon\chi\rho^2 D_2\omega_4^4 \left\{ -z\, \frac{G^3}{L^3} \left(1 + 3e^2 + \frac{3e^4}{8} \right) \omega_2 + \left(1 + \frac{15e^2}{2} + \frac{45e^4}{8} + \frac{5e^6}{16} \right) \omega_4 \right\},$$

$$\dot{H} = -\dot{I}_3, \ \dot{\varphi}_1 = 0,$$

$$\dot{\varphi}_3 = -\frac{3}{2}\varepsilon\rho^2 D_2\omega_2^2\omega_4^2 \frac{L^3 \sin\left[2\left(\delta_1 + i\right)\right]}{G^3 I_2 \sin\delta_1} - 9\varepsilon\chi\rho^2 D_2\omega_4^4\omega_2 \frac{L^9 \sin 2g \sin\left(\delta_1 + i\right)}{G^9 I_2 \sin\delta_1} \left(\frac{3e^2}{2} + \frac{e^4}{4} \right),$$

$$\dot{g} = \varepsilon\rho^2 D_2\omega_4^2 \left\{ 45\, \omega_4^2 \frac{L^9}{G^{10}} \left(1 + \frac{3e^2}{2} + \frac{e^4}{8} \right) + \frac{3L^3}{2G^4}\omega_2^2 \left(2 - \ 3\sin^2\left(\delta_1 + i\right) + \sin\left[2\left(\delta_1 + i\right)\right] \operatorname{ctg} i\right) \right\} +$$
$$+ 9\varepsilon\chi\rho^2 D_2\omega_2\omega_4^4 \frac{L^9}{G^{10}} \sin 2g \sin\left(\delta_1 + i\right) \operatorname{ctg} i \left(\frac{3e^2}{2} + \frac{e^4}{4} \right),$$

$$\dot{h} = -\frac{3}{2}\varepsilon\rho^2 D_2\omega_2^2\omega_4^2 \frac{L^3 \sin\left[2\left(\delta_1 + i\right)\right]}{G^4 \sin i} - 9\varepsilon\chi\rho^2 D_2\omega_4^4\omega_2 \frac{L^9 \sin 2g \sin\left(\delta_1 + i\right)}{G^{10} \sin i} \left(\frac{3e^2}{2} + \frac{e^4}{4} \right),$$

где $z = \cos(\delta_1 + i)$, $D_2 = \dfrac{4\pi r_0^7 (1+\nu)(9\nu + 13)}{105(5\nu + 7)}$.

Заметим, что правые части полученной системы дифференциальных уравнений зависят лишь от одной угловой переменной g, причем скорость эволюции переменной g имеет порядок ε, в то время как медленные переменные “действие” эволюционируют со скоростью порядка $\varepsilon\chi\omega_4$. Усредняя правые части первых шести уравнений системы (15) по угловой переменной g, получим

$$\dot{I}_1 = \cos\delta_2 \dot{I}_2,$$

$$\dot{I}_2 = -\Delta\omega_4^4 (1 - e^2)^{-9/2} \left\{ \frac{1 + z^2}{2} F_1(e)\omega_2 - zF_2(e)\omega_4 (1 - e^2)^{-3/2} \right\},$$

$$\dot{I}_3 = -\Delta\omega_4^4 (1 - e^2)^{-9/2} \left\{ \frac{1}{2} (z\cos i + \cos\delta_1) F_1(e)\omega_2 - \cos i F_2(e)\omega_4 (1 - e^2)^{-3/2} \right\},$$

$$\dot{L} = \Delta\omega_4^4(1-e^2)^{-6}\left\{z\,F_2(e)\omega_2 - F_3(e)\omega_4(1-e^2)^{-3/2}\right\}, \tag{16}$$
$$\dot{G} = \Delta\omega_4^4(1-e^2)^{-9/2}\left\{z\,F_1(e)\omega_2 - F_2(e)\omega_4(1-e^2)^{-3/2}\right\}, \quad \dot{H} = -\dot{I}_3,$$

где

$$\Delta = 18\varepsilon\chi\rho^2 D_2,\ F_1(e) = 1 + 3e^2 + 3e^4/8,$$
$$F_2(e) = 1+15e^2/2+45e^4/8+5e^6/16, \quad F_3(e) = 1+31e^2/2+255e^4/8+185e^6/16+25e^8/64.$$

Система уравнений (16) имеет три первых интеграла. Два из них являются следствием закона сохранения кинетического момента (14):

$$I_3 + H = G_0,\ G\sin i = I_2\sin\delta_1. \tag{17}$$

Третий интеграл является следствием сферической симметрии и соответствует тому факту, что в усредненных уравнениях угол между осью Cx_3 связанной с шаром подвижной системы координат и вектором кинетического момента $\mathbf{K}$ остается неизменным:

$$I_1/I_2 = I_1(0)/I_2(0).$$

3. Анализ эволюционной системы уравнений. Производная по времени от наклонения орбиты i в силу уравнений (16) равна

$$\frac{di}{dt} = -\frac{\Delta}{2G}\omega_4^4(1-e^2)^{-9/2}F_1(e)\omega_2\sin(\delta_1+i).$$

Заметим, что (δ_1+i) - это угол параллелограмма, образованного векторами $\mathbf{G}$ и $\mathbf{K}$, сумма которых равна $\mathbf{G}_0$. Поэтому, когда векторы $\mathbf{K}$, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{G}_0$ не коллинеарны, то $0 < (\delta_1+i) < \pi$ и $\dfrac{di}{dt} < 0$, то есть наклонение орбиты уменьшается.

Производная по времени от угла δ_1 между векторами $\mathbf{K}$ и $\mathbf{G}_0$ в силу уравнений (16) имеет вид

$$\dot{\delta}_1 = \frac{\Delta\omega_4^4\sin(\delta_1+i)}{I_2(1-e^2)^6}\left\{\frac{z}{2}\omega_2(1-e^2)^{3/2}F_1(e) - \omega_4F_2(e)\right\}.$$

Из этого равенства следует, что в случае обратных вращений ($\pi/2 \le (\delta_1+i) < \pi$) угол δ_1 уменьшается. В случае прямых вращений ($0 < (\delta_1+i) < \pi/2$) может происходить увеличение угла δ_1 при достаточно большой угловой скорости собственного вращения шара по сравнению с орбитальной, а именно, при выполнении условия,

$$\omega_4 < \frac{z}{2}\omega_2(1-e^2)^{3/2}F_1(e)F_2^{-1}(e).$$

Из уравнений (16) получим

$$\dot{e} = -\frac{\Delta e\omega_4^4}{G(1-e^2)^6}\left\{9F_4(e)\omega_4 - \frac{11}{2}F_5(e)(1-e^2)^{3/2}z\omega_2\right\}, \tag{18}$$

где $F_4(e) = 1 + 15e^2/4 + 15e^4/8 + 5e^6/64$, $F_5(e) = 1 + 3e^2/2 + e^4/8$. Из равенства (18) следует, что существует класс так называемых квазикруговых орбит, то есть орбит с нулевым эксцентриситетом. Если $e \neq 0$, то значение e уменьшается, если выражение в фигурных скобках равенства (18) положительно, и возрастает, когда это выражение отрицательно.

В частности, в случае обратных вращений происходит уменьшение эксцентриситета орбиты центра масс шара.

Найдем стационарные решения системы (16), приравняв нулю правые части уравнений этой системы. В результате получим

$$e = 0,\ \cos(\delta_1 + i) = 1,\ \omega_2 = \omega_4,\ i = 0,\ \delta_1 = 0. \tag{19}$$

Из равенств (19) и из закона сохранения момента количеств движения относительно точки O следует, что для стационарных значений переменных "действие" выполнены соотношения

$$L = G = H,\ I_2 = I_3,\ \gamma^2 m^3 \big/ L^3 = I_2/A,\ I_3 + H = G_0.$$

Таким образом, в стационарном движении центр масс шара движется по круговой орбите, ортогональной вектору момента количеств движения $\mathbf{G}_0$, ось вращения шара направлена по нормали к плоскости орбиты, а сам шар неподвижен в орбитальной системе координат. При этом, согласно (13), шар оказывается сплюснутым по полюсам и вытянутым вдоль радиуса, соединяющего центр масс шара с притягивающим центром.

Исследуем устойчивость указанного стационарного решения на основе уравнений в вариациях, полагая

$$I_1 = \tilde{I}_1 + \eta_1,\ I_2 = \tilde{I}_2 + \eta_2,\ I_3 = \tilde{I}_2 + \eta_3,\ L = \tilde{G} + \eta_4,\ G = \tilde{G} + \eta_5,\ H = \tilde{G} + \eta_6.$$

Учитывая, что величины $\tilde{I}_2$ и $\tilde{G}$ удовлетворяют системе уравнений

$$\gamma^2 m^3 \Big/ \tilde{G}^3 = \tilde{I}_2 \Big/ A,\ \ \tilde{I}_2 + \tilde{G} = G_0, \tag{20}$$

получим

$$\begin{gathered}
\dot{\eta}_1 = \tilde{I}_1 \tilde{I}_2^{-1} \dot{\eta}_2, \quad \dot{\eta}_2 = -\Delta_0 A^{-1}(\eta_2 - 9\kappa\eta_4 + 12\kappa\eta_5), \\
\dot{\eta}_3 = \Delta_0 A^{-1}\{\frac{1}{2}\kappa\eta_2 - \frac{1}{2}\eta_3 + 9\kappa\eta_4 - (12\kappa - \frac{1}{2})\eta_5 + \frac{\kappa}{2}\eta_6\}, \\
\dot{\eta}_4 = \Delta_0 A^{-1}\{-\kappa\eta_2 - 16\kappa\eta_4 + (18\kappa - 1)\eta_5\}, \\
\dot{\eta}_5 = \Delta_0 A^{-1}\{-\kappa\eta_2 - 9\kappa\eta_4 + (11\kappa - 1)\eta_5\}, \quad \dot{\eta}_6 = -\dot{\eta}_3,
\end{gathered} \tag{21}$$

где $\Delta_0 = 18\varepsilon\chi\rho^2 D_2 \gamma^8 m^{12} \tilde{G}^{-12},\ \kappa = \tilde{I}_2 \Big/ \tilde{G}$.

Решение системы (21) будем искать в виде

$$\eta_k = C_k \exp(\Delta_0 A^{-1}\lambda t) \quad (k = 1, ..., 6),$$

где C_k - произвольные постоянные. Характеристическое уравнение системы (21) и его корни представляются в виде:

$$\lambda^2(\lambda + (1+\kappa)/2)(\lambda + 1 + \kappa)(\lambda + 7\kappa)(\lambda - 3\kappa + 1) = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = -(1+\kappa)/2,\ \lambda_4 = -(1+\kappa),\ \lambda_5 = -7\kappa,\ \lambda_6 = 3\kappa - 1.$$

Нулевой корень кратности два является следствием двух первых интегралов системы (16), корни $\lambda_3, \lambda_4,\ \lambda_5$ отрицательны, а корень λ_6 отрицателен при условии $\tilde{I}_2 \Big/ \tilde{G} < 1/3$.

Из системы (20) следует, что величина $\tilde{G}$ является корнем уравнения

$$\frac{A\gamma^2 m^3}{\tilde{G}^3} + \tilde{G} = G_0. \tag{22}$$

Рассмотрим функцию

$$f(\tilde{G}) = \frac{k}{\tilde{G}^3} + \tilde{G},\ k = A\gamma^2 m^3.$$

Минимум этой функции достигается при $\tilde{G} = \sqrt[4]{3k}$ и равен $f_* = \frac{4}{3}\sqrt[4]{3k}$. Если $G_0 < f_*$, то уравнение (22) решений не имеет. Если $G_0 = f_*$, то уравнение (22) имеет единственное решение $\tilde{G} = G_* = \sqrt[4]{3k}$, и радиус стационарной орбиты определяется равенством $R_* = G_*^2\gamma^{-1}m^{-2}$. С учетом того, что $A = 0.4mr_0^2$, получим $R_* = \sqrt{1.2}r_0$. В случае $G_0 > f_*$ уравнение (22) имеет два решения G_1 и G_2, $G_1 < G_* < G_2$, которым соответствуют стационарные орбиты радиусов $R_1 = G_1^2\gamma^{-1}m^{-2}$ и $R_2 = G_2^2\gamma^{-1}m^{-2}$ $(R_1 < R_* < R_2)$. Для корня G_1 получим $\tilde{I}_2\Big/\tilde{G} = k/G_1^4 > 1/3$, а для корня G_2 выполнено неравенство $\tilde{I}_2\Big/\tilde{G} < 1/3$. Поэтому устойчивым является решение, соответствующее большему значению G_2, то есть гравитационной стабилизации вязкоупругого шара на орбите большего радиуса.

Наличие указанных стационарных решений установлено в работе [1] на основе возмущенной системы векторных уравнений относительно радиус-вектора центра масс шара и вектора кинетического момента вращательного движения. Тот факт, что приливные силы приводят первоначальное вращение тела к захвату в резонансный режим движения, когда период обращения по орбите и период вращения вокруг оси совпадают, был установлен также при исследовании вращательного движения твердого тела под действием приливных сил, момент которых определялся феноменологически [9]. В Солнечной системе почти стационарное движение осуществляет Луна относительно Земли, спутники Юпитера Ио, Европа, Ганимед, Каллисто, ряд других спутников планет.

1. *Вильке В.Г.* Движение вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил // Прикл. математика и механика. – 1980. – **44**, вып. 3. – С. 395–402.
2. *Вильке В.Г., Копылов С.А., Марков Ю.Г.* Эволюция вращательного движения вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил // Там же. – 1985. – **49**, вып. 1. – С. 25–34.
3. *Вильке В.Г., Марков Ю.Г.* Эволюция поступательно-вращательного движения вязкоупругой планеты в центральном поле сил // Астрономический журнал. –1988. – **65**, вып. 4. – С. 861–867.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика, т. 7. Теория упругости. – М.:Наука, 1965. – 203 с.
5. *Ляв А.* Математическая теория упругости. – М.; Л.:ОНТИ, 1935. – 674 с.
6. *Вильке В.Г.* Аналитические и качественные методы в динамике систем с бесконечныи числом степеней свободы. – М.: Изд-ие МГУ, 1986. – 192 с.
7. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. – М.:Наука, 1968. – 800 с.
8. *Черноусько Ф.Л.* О движении твердого тела с упругими и диссипативными элементами // Прикл. математика и механика. – 1978. – **42**, вып. 1. – С. 34 – 42.
9. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. – М.:Наука, 1965. –416 с.

Московский гос. ин-т радиотехники, электроники
и автоматики (техн. ун-т), Россия
albinash@mtu-net.ru

Получено 31.10.02