УДК 531.39, 517.977

©2011. **А.Л. Зуев, Ю.В. Новикова**

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНЫ КИРХГОФА С ДВУМЕРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Построена модель механической системы, которая состоит из твердого тела и тонкой упругой пластины, а также предложена схема сведения уравнений движения с частными производными к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены условия управляемости модели в конечномерном фазовом пространстве, а также условия спектральной управляемости.

Ключевые слова: *пластина Кирхгофа, метод Фурье, управляемость.*

Введение. Разработке математических моделей движения космических аппаратов с упругими элементами, исследованию их устойчивости и управляемости посвящено множество работ отечественных и зарубежных авторов. Данная тематика остается актуальной и в настоящее время.

Для проектирования первых спутников предполагалось, что космический аппарат является абсолютно твердым телом. Но по мере возрастания требований к точности управления возникла необходимость учитывать упругость в математической модели, которую используют для анализа и синтеза систем управления.

В монографии Г.Л. Дегтярева и Т.К. Сиразетдинова [1] рассмотрен вопрос математического моделирования и синтеза управления упругими космическими аппаратами, которые рассматриваются как объекты с разделенными параметрами. В качестве одной из моделей такого аппарата представлена механическая система, которая состоит из твердого тела и двух упругих панелей солнечных батарей. Каждая из солнечных батарей жестко закреплена между двумя кронштейнами. А вращение тела-носителя рассматривается вокруг фиксированной оси.

В отличие от модели [1], в данной работе рассматривается более сложная механическая система. Предполагается, что твердое тело-носитель выполняет вращательные движения с тремя степенями свободы, а солнечные батареи закреплены на границе области шарнирно.

1. Описание модели. Рассмотрим механическую систему, которая состоит из твердого тела и присоединенной к нему тонкой упругой пластины (рис. 1). С твердым телом, которое вращается вокруг неподвижной точки O_1 с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}(t)$, связана декартова система координат $Ox_1x_2x_3$.

Рассматриваемая механическая система, представляет собой приближенную модель спутника с панелями солнечных батарей [1, 2].

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Президента Украины для молодых ученых (гос. рег. № 0111U007074) и проекта украинско-австрийского сотрудничества (гос. рег. № 0111U007275).

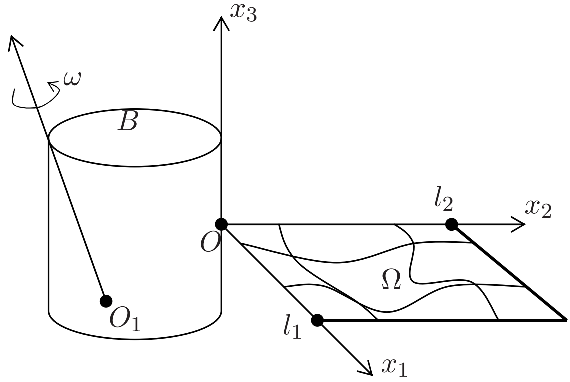

Рис. 1. Твердое тело с тонкой упругой пластиной.

Предположим, что пластина имеет толщину $h > 0$ и в недеформированном состоянии занимает замкнутую область вида $(x_1, x_2) \in \overline{\Omega} = [0, l_1] \times [0, l_2]$, $|x_3| \leq h/2$. Будем считать, что в каждый момент времени t центральную поверхность пластины можно задать уравнением $x_3 = w(x_1, x_2, t)$.

Чтобы описать поведение функции $w = w(x_1, x_2, t)$, воспользуемся моделью Кирхгофа колебаний тонкой пластины [1]:

$$\rho h \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial t^2} + D\triangle^2 w(x_1, x_2, t) = \widetilde{F}, \qquad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{1}$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ – оператор Лапласа, $\rho > 0$ – плотность (масса на единицу объема), $D > 0$ – жесткость пластины при изгибе, $\widetilde{F}$ – поперечная компонента силы, которая действует на пластину. Будем считать, что пластина шарнирно оперта на границе области Ω, т. е. компоненты вектора перемещения и вектора граничных моментов равны нулю на $\partial\Omega$:

$$w(x_1, x_2, t)|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

$$\left. \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} \right|_{x_1=0,\, x_1=l_1} = 0, \tag{3}$$

$$\left. \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} \right|_{x_2=0,\, x_2=l_2} = 0, \tag{4}$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Для того, чтобы найти силу $\widetilde{F}$, воспользуемся принципом Д'Аламбера и формулой сложения ускорений (см. [3]). Обозначим через $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ орты декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$, связанной с твердым телом. Запишем выражение для силы $\widetilde{F}$ в подвижной системе координат $Ox_1x_2x_3$.

Абсолютное ускорение точки M пластины с радиус-вектором

$$\boldsymbol{r}'_M = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + w(x_1, x_2, t)\boldsymbol{e}_3$$

имеет вид

$$\boldsymbol{w}_M = \boldsymbol{V}_0{}^* + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}'_M + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_M) + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'^{*}_M + \boldsymbol{r}'^{**}_M,$$

где $\boldsymbol{V}_0$ – абсолютная скорость точки O, $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\boldsymbol{e}_1 + \omega_2\boldsymbol{e}_2 + \omega_3\boldsymbol{e}_3$ – угловая скорость твердого тела B, а $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ – угловое ускорение; звездочкой обозначены относительные производные векторов в подвижной системе координат $Ox_1x_2x_3$.

Согласно принципу Д'Аламбера, сила инерции, обусловленная переносным движением тела B для точки M, такова:

$$\boldsymbol{F} = -\rho h \boldsymbol{w}_M,$$

тогда $\tilde{F} = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{e}_3)$ в уравнении (1). Проводя необходимые выкладки, получаем

$$\begin{aligned}\tilde{F} = &-\rho h[(x_1 - a_1)(\omega_1\omega_3 - \dot{\omega_2}) + (x_2 - a_2)(\omega_2\omega_3 + \dot{\omega_1}) + (\omega_1^2 + \omega_2^2) \times \\ &\times (a_3 - w(x_1, x_2, t)) + \ddot{w}(x_1, x_2, t)].\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь (a_1, a_2, a_3) – координаты точки O_1 в системе координат $Ox_1x_2x_3$.

Перепишем уравнение (1) с учетом формулы (5) следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w(x_1, x_2, t)}{\partial t^2} &+ \alpha^2\Delta^2 w(x_1, x_2, t) = -\frac{1}{2}(x_1 - a_1)(\omega_1\omega_3 - \dot{\omega_2}) + \\ &+ (x_2 - a_2)(\omega_2\omega_3 + \dot{\omega_1}) + (\omega_1^2 + \omega_2^2)(a_3 - w(x_1, x_2, t)) = f(x_1, x_2, t),\end{aligned} \tag{6}$$

где $\alpha^2 = \dfrac{D}{2\rho h} > 0$.

Таким образом, получена модель (6), (2)–(4) вращательного движения механической системы, которая состоит из твердого тела и эластичной пластины, шарнирно опертой на границе области Ω.

2. Сведение уравнения движения с частными производными к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Решим краевую задачу (6), (2)–(4) методом Фурье. Пусть

$$w(x_1, x_2, t) = X_1(x_1)X_2(x_2)q(t).$$

Подставим это выражение в задачу (6), (2)–(4) с $f = 0$ и разделим переменные. В результате получим уравнение

$$\ddot{q}(t) + \alpha^2\lambda q(t) = 0, \qquad \lambda = (\mu_1 + \mu_2)^2,$$

где μ_1 и μ_2 – собственные значения следующих задач Штурма–Лиувилля:

$$\begin{cases} X_1''(x_1) = \mu_1 X_1(x_1), \\ X_1(0) = X_1(l_1) = 0, \end{cases} \qquad 0 \le x_1 \le l_1, \tag{7}$$

$$\begin{cases} X_2''(x_2) = \mu_2 X_2(x_2), \\ X_2(0) = X_2(l_2) = 0, \end{cases} \qquad 0 \le x_2 \le l_2. \tag{8}$$

Известно, что задачи (7) и (8) имеют дискретный спектр: $\mu_1 = \mu_{1k}$, $\mu_2 = \mu_{2j}$, $(k, j \in \mathbb{N})$, где

$$\mu_{1k} = -\left(\frac{\pi k}{l_1}\right)^2, \qquad \mu_{2j} = -\left(\frac{\pi j}{l_2}\right)^2. \tag{9}$$

Собственным значениям задач Штурма–Лиувилля (7), (8) соответствуют собственные функции $\{X_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{X_{2j}\}_{j=1}^{\infty}$. Пронормируем эти функции так, чтобы они образовывали ортонормированные базисы в $L_2(0, l_1)$ и $L_2(0, l_2)$, соответственно:

$$X_{1k}(x_1) = \sqrt{\frac{2}{l_1}} \sin\left(\frac{\pi k x_1}{l_1}\right), \qquad X_{2j}(x_2) = \sqrt{\frac{2}{l_2}} \sin\left(\frac{\pi j x_2}{l_2}\right). \tag{10}$$

Решение краевой задачи (6), (2)–(4) будем искать в виде ряда Фурье

$$w(x_1, x_2, t) = \sum_{k,j=1}^{\infty} C_{kj}(t) X_{1k}(x_1) X_{2j}(x_2),$$

в результате чего возникает следующая бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{C}_{kj} + \alpha^2 \lambda_{kj} C_{kj} = f_{kj}, \qquad \lambda_{kj} = (\mu_{1k} + \mu_{2j})^2, \qquad (k, j) \in \mathbb{N}^2, \tag{11}$$

где f_{kj} – коэффициенты Фурье правой части уравнения (6) относительно ортонормированной системы $\{X_{1k}(x_1) X_{2j}(x_2)\}_{k,j=1}^{\infty}$ в $L_2(\Omega)$:

$$f_{kj} = \frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}} \int\limits_{\Omega} f(x_1, x_2, t) \sin\left(\frac{\pi k x_1}{l_1}\right) \sin\left(\frac{\pi j x_2}{l_2}\right) dx_1 dx_2 =$$

$$= \frac{\sqrt{l_1 l_2}}{\pi^2 k j} \Big(-\omega_1 \omega_3 l_1 (-1)^k \left((-1)^j - 1\right) + \dot{\omega}_2 l_1 (-1)^k \left((-1)^j - 1\right) -$$

$$-a_1 \dot{\omega}_2 \left((-1)^k - 1\right) \left((-1)^j - 1\right) + a_1 \omega_1 \omega_3 \left((-1)^k - 1\right) \left((-1)^j - 1\right) -$$

$$-\omega_2 \omega_3 l_2 \left((-1)^k - 1\right) (-1)^j - \dot{\omega}_1 l_2 \left((-1)^k - 1\right) (-1)^j +$$

$$+a_2\omega_2\omega_3\left((-1)^k-1\right)\left((-1)^j-1\right)+a_2\dot{\omega}_1\left((-1)^k-1\right)\left((-1)^j-1\right)-$$
$$-a_3(\omega_1^2+\omega_2^2)\left((-1)^k-1\right)\left((-1)^j-1\right)+\frac{(\omega_1^2+\omega_2^2)}{\sqrt{l_1l_2}}C_{kj}(t).$$

Рассмотрим далее случай медленных вращений тела-носителя, отбрасывая в выражении для f_{kj} величины порядка $o\left(|\omega_k|,|\dot{\omega}_k|\right)$ при $\omega_k\to 0$, $\dot{\omega}_k\to 0$. В результате получим следующую систему:

$$\ddot{C}_{kj}+C_{kj}\alpha^2\lambda_{kj}=$$
$$=\begin{cases}0, & k\text{ – четное}, \quad j\text{ – четное},\\ \dfrac{-2l_1\sqrt{l_1l_2}\dot{\omega}_2}{\pi^2kj}, & k\text{ – четное}, \quad j\text{ – нечетное},\\ \dfrac{2l_2\sqrt{l_1l_2}\dot{\omega}_1}{\pi^2kj}, & k\text{ – нечетное}, \quad j\text{ – четное},\\ \dfrac{2\sqrt{l_1l_2}}{\pi^2kj}(\dot{\omega}_2l_1-2a_1\dot{\omega}_2-\dot{\omega}_1l_2+2a_2\dot{\omega}_1), & k\text{ – нечетное}, \quad j\text{ – нечетное}.\end{cases}\tag{12}$$

3. Решение задачи Коши для бесконечной системы дифференциальных уравнений с управлением. Для исследования влияния движения тела-носителя на малые колебания пластины положим $\dot{\omega}_1(t)=u_1(t)$, $\dot{\omega}_2(t)=u_2(t)$ и будем считать функции $u_1(t)$ и $u_2(t)$ управлениями в линейной системе (12):

$$\ddot{C}_{kj}+C_{kj}\alpha^2\lambda_{kj}=\phi_{kj}u_1(t)+g_{kj}u_2(t),\qquad \lambda=(\mu_{1k}+\mu_{2j})^2,\qquad (k,j)\in\mathbb{N}^2.$$

Зададим для полученной бесконечной системы начальные условия при $t=0$:

$$C_{kj}(0)=C_{kj}^0,\qquad \dot{C}_{kj}(0)=V_{kj}^0.$$

Так как $\phi_{kj}u_1(t)+g_{kj}u_2(t)=0$ при $k=2n$, $j=2m$, то компоненты решения $C_{kj}(t)$ с четными индексами не зависят от выбора управляющих функций, а это означает, что система (12) является неуправляемой.

С помощью метода вариации произвольных постоянных найдем решение уравнений (12), удовлетворяющее сформулированным начальным условиям. В результате запишем формальное решение задачи (6), (2)–(4):

1) при $k=2n$, $j=2m$, где $n,m\in\mathbb{N}$, $w(x_1,x_2,t)=$

$$=\frac{2}{\sqrt{l_1l_2}}\sum_{k,j=1}^{\infty}\left(C_{kj}^0\cos\alpha\sqrt{\lambda_{kj}}t+\frac{V_{kj}^0}{\alpha\sqrt{\lambda_{kj}}}\sin\alpha\sqrt{\lambda_{kj}}\right)\sin\left(\frac{\pi kx_1}{l_1}\right)\sin\left(\frac{\pi jx_2}{l_2}\right);$$

2) при $k=2n$, $j=2m+1$, где $n,m\in\mathbb{N}$, $w(x_1,x_2,t)=$

$$=\frac{-4l_1}{\alpha\pi^2}\sum_{k,j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{kj\sqrt{\lambda_{kj}}}\int\limits_0^t u_2(\tau)\sin\alpha\sqrt{\lambda_{kj}}(t-\tau)d\tau\right)\sin\left(\frac{\pi kx_1}{l_1}\right)\sin\left(\frac{\pi jx_2}{l_2}\right)+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}}\sum_{k,j=1}^{\infty}\left(C_{kj}^0\cos\alpha\sqrt{\lambda_{kj}}t+\frac{V_{kj}^0}{\alpha\sqrt{\lambda_{kj}}}\sin\alpha\sqrt{\lambda_{kj}}\right)\sin\left(\frac{\pi k x_1}{l_1}\right)\sin\left(\frac{\pi j x_2}{l_2}\right);$$

3) при $k=2n+1$, $j=2m$, где $n,m\in\mathbb{N}$, $w(x_1,x_2,t)=$

$$=\frac{4l_2}{\alpha\pi^2}\sum_{k,j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{kj\sqrt{\lambda_{kj}}}\int_0^t u_1(\tau)\sin\alpha\sqrt{\lambda_{kj}}(t-\tau)d\tau\right)\sin\left(\frac{\pi k x_1}{l_1}\right)\sin\left(\frac{\pi j x_2}{l_2}\right)+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}}\sum_{k,j=1}^{\infty}\left(C_{kj}^0\cos\alpha\sqrt{\lambda_{kj}}t+\frac{V_{kj}^0}{\alpha\sqrt{\lambda_{kj}}}\sin\alpha\sqrt{\lambda_{kj}}\right)\sin\left(\frac{\pi k x_1}{l_1}\right)\sin\left(\frac{\pi j x_2}{l_2}\right);$$

4) при $k=2n+1$, $j=2m+1$, где $n,m\in\mathbb{N}$, $w(x_1,x_2,t)=$

$$=\frac{1}{\alpha\pi^2}\sum_{k,j=1}^{\infty}\left(\frac{4(l_1-2a_1)}{kj\sqrt{\lambda_{kj}}}\int_0^t u_2(\tau)\sin\alpha\sqrt{\lambda_{kj}}(t-\tau)d\tau\right)\sin\left(\frac{\pi k x_1}{l_1}\right)\sin\left(\frac{\pi j x_2}{l_2}\right)+$$

$$+\frac{4(2a_2-l_2)}{\alpha\pi^2}\sum_{k,j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{kj\sqrt{\lambda_{kj}}}\int_0^t u_1(\tau)\sin\alpha\sqrt{\lambda_{kj}}(t-\tau)d\tau\right)\sin\left(\frac{\pi k x_1}{l_1}\right)\sin\left(\frac{\pi j x_2}{l_2}\right)+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}}\sum_{k,j=1}^{\infty}\left(C_{kj}^0\cos\alpha\sqrt{\lambda_{kj}}t+\frac{V_{kj}^0}{\alpha\sqrt{\lambda_{kj}}}\sin\alpha\sqrt{\lambda_{kj}}\right)\sin\left(\frac{\pi k x_1}{l_1}\right)\sin\left(\frac{\pi j x_2}{l_2}\right). \tag{13}$$

4. Условия управляемости модели колебаний пластины с бесконечным числом модальных координат. Рассмотрим двумерную подсистему системы (12) для фиксированных индексов (k,j) и сделаем в ней следующую замену:

$$\begin{cases}\alpha\sqrt{\lambda_{kj}}C_{kj}=\xi_{kj}(t);\\ \dot{C}_{kj}(t)=\eta_{kj}(t),\end{cases}\qquad \beta_{kj}=\alpha\sqrt{\lambda_{kj}}>0.$$

Тогда

$$\begin{cases}\dot{\xi}_{kj}=\beta_{kj}\eta_{kj},\\ \dot{\eta}_{kj}=-\beta_{kj}\xi_{kj}+\phi_{kj}u_1+g_{kj}u_2,\end{cases} \tag{14}$$

где $u_1=\dot{\omega}_1(t)$, $u_2=\dot{\omega}_2(t)$.

Перепишем бесконечную систему (14) в матричном виде

$$\begin{pmatrix}\dot{\xi}_{kj}\\ \dot{\eta}_{kj}\end{pmatrix}=A_{kj}\begin{pmatrix}\xi_{kj}\\ \eta_{kj}\end{pmatrix}+B_{kj}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix},\qquad (k,j)\in\mathbb{N}^2, \tag{15}$$

где $A_{kj} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_{kj} \\ -\beta_{kj} & 0 \end{pmatrix}$, $\quad B_{kj} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \phi_{kj} & g_{kj} \end{pmatrix}$.

Утверждение 1. *Система (15) является управляемой для фиксированных индексов $(k,j) \in \mathbb{N}^2$ тогда и только тогда, когда $\phi_{kj} \neq 0$ или $g_{kj} \neq 0$.*

Справедливость этого утверждения следует из критерия Калмана [4].

Зафиксируем число m и рассмотрим для (15) конечномерную подсистему с m блоками, которые соответствуют индексам (k_1,j_1), (k_2,j_2), ..., (k_m,j_m):

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_{k_pj_p} \\ \dot{\eta}_{k_pj_p} \end{pmatrix} = A_{k_pj_p} \begin{pmatrix} \xi_{k_pj_p} \\ \eta_{k_pj_p} \end{pmatrix} + B_{k_pj_p} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \qquad p = \overline{1,m}. \tag{16}$$

Утверждение 2. *Система (17) является управляемой только тогда, когда $\beta_{k_1j_1}\beta_{k_2j_2}\ldots\beta_{k_mj_m} \neq 0$, и при некотором p: $0 \leq p \leq m$, выполняется условие*

$$\begin{vmatrix} \phi_{k_1j_1} & \phi_{k_2j_2} & \ldots & \phi_{k_mj_m} \\ \beta^2_{k_1j_1}\phi_{k_1j_1} & \beta^2_{k_2j_2}\phi_{k_2j_2} & \ldots & \beta^2_{k_mj_m}\phi_{k_mj_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta^{2(p-1)}_{k_1j_1}\phi_{k_1j_1} & \beta^{2(p-1)}_{k_2j_2}\phi_{k_2j_2} & \ldots & \beta^{2(p-1)}_{k_mj_m}\phi_{k_mj_m} \\ g_{k_1j_1} & g_{k_2j_2} & \ldots & g_{k_mj_m} \\ \beta^2_{k_1j_1}g_{k_1j_1} & \beta^2_{k_2j_2}g_{k_2j_2} & \ldots & \beta^2_{k_mj_m}g_{k_mj_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta^{2(q-1)}_{k_1j_1}g_{k_1j_1} & \beta^{2(q-1)}_{k_2j_2}g_{k_2j_2} & \ldots & \beta^{2(q-1)}_{k_mj_m}g_{k_mj_m} \end{vmatrix} \neq 0, \quad p+q=m.$$

Доказательство. Для доказательства данного утверждения воспользуемся критерием Калмана, т.е. проверим, что $\operatorname{rank}(B, AB, ..., A^{2m-1}B) = 2m$. Матрицы A и B имеют следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} A_{k_1j_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_{k_2j_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A_{k_mj_m} \end{pmatrix} \in \operatorname{mat}(2m \times 2m), \quad A_{k_pj_p} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_{k_pj_p} \\ -\beta_{k_pj_p} & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{k_1j_1} \\ B_{k_2j_2} \\ \vdots \\ B_{k_mj_m} \end{pmatrix} \in \operatorname{mat}(2m \times 2), \qquad B_{k_pj_p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \phi_{k_pj_p} & g_{k_pj_p} \end{pmatrix}.$$

Обозначим $K = (B, AB, ..., A^{2m-1}B)$. Найдем элементы матрицы K. Для этого сначала вычислим произведения $AB, A^2B, ..., A^{2m-1}B$:

$$AB = \begin{pmatrix} \beta_{k_1j_1}\phi_{k_1j_1} & \beta_{k_1j_1}g_{k_1j_1} \\ 0 & 0 \\ \beta_{k_2j_2}\phi_{k_2j_2} & \beta_{k_2j_2}g_{k_2j_2} \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \beta_{k_mj_m}\phi_{k_mj_m} & \beta_{k_mj_m}g_{k_mj_m} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\beta^2_{k_1j_1}\phi_{k_1j_1} & -\beta^2_{k_1j_1}g_{k_1j_1} \\ 0 & 0 \\ -\beta^2_{k_2j_2}\phi_{k_2j_2} & -\beta^2_{k_2j_2}g_{k_2j_2} \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ -\beta^2_{k_mj_m}\phi_{k_mj_m} & -\beta^2_{k_mj_m}g_{k_mj_m} \end{pmatrix},$$

$$A^{2m-1}B = \begin{pmatrix} (-1)^{m-1}\beta^{2m-1}_{k_1j_1}\phi_{k_1j_1} & (-1)^{m-1}\beta^{2m-1}_{k_1j_1}g_{k_1j_1} \\ 0 & 0 \\ (-1)^{m-1}\beta^{2m-1}_{k_2j_2}\phi_{k_2j_2} & (-1)^{m-1}\beta^{2m-1}_{k_2j_2}g_{k_2j_2} \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ (-1)^{m-1}\beta^{2m-1}_{k_mj_m}\phi_{k_mj_m} & (-1)^{m-1}\beta^{2m-1}_{k_mj_m}g_{k_mj_m} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подставим полученные значения в матрицу $K = (B, AB, ..., A^{2m-1}B)$:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & (-1)^{m-1}\beta^{2m-1}_{k_1j_1}\phi_{k_1j_1} & (-1)^{m-1}\beta^{2m-1}_{k_1j_1}g_{k_1j_1} \\ \phi_{k_1j_1} & g_{k_1j_1} & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & (-1)^{m-1}\beta^{2m-1}_{k_2j_2}\phi_{k_2j_2} & (-1)^{m-1}\beta^{2m-1}_{k_2j_2}g_{k_2j_2} \\ \phi_{k_2j_2} & g_{k_2j_2} & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & (-1)^{m-1}\beta^{2m-1}_{k_mj_m}\phi_{k_mj_m} & (-1)^{m-1}\beta^{2m-1}_{k_mj_m}g_{k_mj_m} \\ \phi_{k_mj_m} & g_{k_mj_m} & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Для начала рассмотрим случай, когда $\phi_{k_1j_1} = 0$,..., $\phi_{k_mj_m} = 0$, а $g_{k_1j_1} \neq$ $\neq 0, ..., g_{k_mj_m} \neq 0$, тогда матрица, образованная ненулевыми столбцами матрицы K , будет иметь следующий вид:

$$K^* = \begin{pmatrix} 0 & \beta_{k_1j_1}g_{k_1j_1} & 0 & \dots & (-1)^{m-1}\beta^{2m-1}_{k_1j_1}g_{k_1j_1} \\ g_{k_1j_1} & 0 & -\beta^2_{k_1j_1}g_{k_1j_1} & \dots & 0 \\ 0 & \beta_{k_2j_2}g_{k_2j_2} & 0 & \dots & (-1)^{m-1}\beta^{2m-1}_{k_2j_2}g_{k_2j_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{k_mj_m} & 0 & -\beta^2_{k_mj_m}g_{k_mj_m} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица K^* имеет размерность $(2m \times 2m)$. Найдем ранг этой матрицы. Для этого рассмотрим ее определитель и приведем его к блочному виду с помощью перестановок рядов и столбцов. В результате получим

$$\begin{vmatrix} 0 & \beta_{k_1j_1}g_{k_1j_1} & 0 & \dots & (-1)^{m-1}\beta_{k_1j_1}^{2m-1}g_{k_1j_1} \\ g_{k_1j_1} & 0 & -\beta_{k_1j_1}^2 g_{k_1j_1} & \dots & 0 \\ 0 & \beta_{k_2j_2}g_{k_2j_2} & 0 & \dots & (-1)^{m-1}\beta_{k_2j_2}^{2m-1}g_{k_2j_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{k_mj_m} & 0 & -\beta_{k_mj_m}^2 g_{k_mj_m} & \dots & 0 \end{vmatrix} = \prod_{p=1}^{m}(g_{k_pj_p}^2\beta_{k_pj_p})\times$$

$$\times\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\beta_{k_1j_1}^2 & \dots & (-1)^{m-1}\beta_{k_1j_1}^{2m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 1 & -\beta_{k_2j_2}^2 & \dots & (-1)^{m-1}\beta_{k_2j_2}^{2m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\beta_{k_mj_m}^2 & \dots & (-1)^{m-1}\beta_{k_mj_m}^{2m-1} \\ 1 & -\beta_{k_1j_1}^2 & \dots & (-1)^{m-1}\beta_{k_1j_1}^{2m-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -\beta_{k_2j_2}^2 & \dots & (-1)^{m-1}\beta_{k_2j_2}^{2m-1} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -\beta_{k_mj_m}^2 & \dots & (-1)^{m-1}\beta_{k_mj_m}^{2m-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \prod_{p=1}^{m}\left(g_{k_pj_p}^2\beta_{k_pj_p}\right)\prod_{1\le l<n\le m}\left(\beta_{k_lj_l}^2-\beta_{k_nj_n}^2\right)^2 \neq 0,$$

так как

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \beta_{k_1j_1}^2 & \beta_{k_2j_2}^2 & \dots & \beta_{k_mj_m}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{k_1j_1}^{2m-1} & \beta_{k_2j_2}^{2m-1} & \dots & \beta_{k_mj_m}^{2m-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le l<n\le m}\left(\beta_{k_lj_l}^2-\beta_{k_nj_n}^2\right)^2 \neq 0$$

является определителем Вандермонда, а $\beta_{k_pj_p} = a\sqrt{\lambda_{k_pj_p}} > 0$ при $p=\overline{1,m}$.

Следовательно, из выше полученного результата можно сделать вывод, что $\operatorname{rank}(K^*) = 2m$. А это означает, что, согласно критерию Калмана, система (16) является управляемой.

2) Рассмотрим более общий случай, когда ни одна из компонент матрицы K не равна нулю. Покажем, что ранг такой матрицы тоже равен $2m$. Выберем из матрицы K определитель порядка $2m$ и покажем, что он не равен нулю. Таким образом, при нечетных m мы получим, что

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \beta_{k_1j_1}\phi_{k_1j_1} & \beta_{k_1j_1}g_{k_1j_1} & \dots & \dots & 0 & \beta_{k_1j_1}^m\phi_{k_1j_1} \\ \phi_{k_1j_1} & g_{k_1j_1} & 0 & 0 & \dots & \dots & \beta_{k_1j_1}^{m-1}g_{k_1j_1} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{k_2j_2}\phi_{k_2j_2} & \beta_{k_2j_2}g_{k_2j_2} & \dots & \dots & 0 & \beta_{k_2j_2}^m\phi_{k_2j_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \beta_{k_mj_m}\phi_{k_mj_m} & \beta_{k_mj_m}g_{k_mj_m} & \dots & \dots & 0 & \beta_{k_mj_m}^m\phi_{k_mj_m} \\ \phi_{k_mj_m} & g_{k_mj_m} & 0 & 0 & \dots & \dots & \beta_{k_mj_m}^{m-1}g_{k_mj_m} & 0 \end{vmatrix},$$

а при четном m:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \beta_{k_1 j_1}\phi_{k_1 j_1} & \dots & \dots & \beta_{k_1 j_1}^{m-1}\phi_{k_1 j_1} & \beta_{k_1 j_1}^{m-1} g_{k_1 j_1} \\ \phi_{k_1 j_1} & g_{k_1 j_1} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{k_2 j_2}\phi_{k_2 j_2} & \dots & \dots & \beta_{k_2 j_2}^{m-1}\phi_{k_2 j_2} & \beta_{k_2 j_2}^{m-1} g_{k_2 j_2} \\ \phi_{k_2 j_2} & g_{k_2 j_2} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \beta_{k_m j_m}\phi_{k_m j_m} & \dots & \dots & \beta_{k_m j_m}^{m-1}\phi_{k_m j_m} & \beta_{k_m j_m}^{m-1} g_{k_m j_m} \\ \phi_{k_m j_m} & g_{k_m j_m} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

С помощью элементарных операций с определителями получим, что

$$\Delta_1 = \pm\beta_{k_1 j_1}\beta_{k_2 j_2}...\beta_{k_m j_m} \begin{vmatrix} \phi_{k_1 j_1} & \phi_{k_2 j_2} & \dots & \phi_{k_m j_m} \\ g_{k_1 j_1} & g_{k_2 j_2} & \dots & g_{k_m j_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{k_1 j_1}^{m-1}\phi_{k_1 j_1} & \beta_{k_2 j_2}^{m-1}\phi_{k_2 j_2} & \dots & \beta_{k_m j_m}^{m-1}\phi_{k_m j_m} \end{vmatrix}^2.$$

Аналогично,

$$\Delta_2 = \pm\beta_{k_1 j_1}\beta_{k_2 j_2}...\beta_{k_m j_m} \begin{vmatrix} \phi_{k_1 j_1} & \phi_{k_2 j_2} & \dots & \phi_{k_m j_m} \\ g_{k_1 j_1} & g_{k_2 j_2} & \dots & g_{k_m j_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{k_1 j_1}^{m-2} g_{k_1 j_1} & \beta_{k_2 j_2}^{m-2} g_{k_2 j_2} & \dots & \beta_{k_m j_m}^{m-2} g_{k_m j_m} \end{vmatrix}^2.$$

Определители будут отличны от нуля только в том случае, когда будут выполняться следующие условия. Во-первых, $\beta_{k_1 j_1}\beta_{k_2 j_2}...\beta_{k_m j_m} \neq 0$, это условие выполняется всегда, так как $\beta_{k_m j_m} = \alpha\sqrt{\lambda_{k_m j_m}} > 0$; во-вторых, при некотором p, таком, что $0 \leq p \leq m$, определитель

$$\begin{vmatrix} \phi_{k_1 j_1} & \phi_{k_2 j_2} & \dots & \phi_{k_m j_m} \\ \beta_{k_1 j_1}^2\phi_{k_1 j_1} & \beta_{k_2 j_2}^2\phi_{k_2 j_2} & \dots & \beta_{k_m j_m}^2\phi_{k_m j_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{k_1 j_1}^{2(p-1)}\phi_{k_1 j_1} & \beta_{k_2 j_2}^{2(p-1)}\phi_{k_2 j_2} & \dots & \beta_{k_m j_m}^{2(p-1)}\phi_{k_m j_m} \\ g_{k_1 j_1} & g_{k_2 j_2} & \dots & g_{k_m j_m} \\ \beta_{k_1 j_1}^2 g_{k_1 j_1} & \beta_{k_2 j_2}^2 g_{k_2 j_2} & \dots & \beta_{k_m j_m}^2 g_{k_m j_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{k_1 j_1}^{2(q-1)} g_{k_1 j_1} & \beta_{k_2 j_2}^{2(q-1)} g_{k_2 j_2} & \dots & \beta_{k_m j_m}^{2(q-1)} g_{k_m j_m} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{17}$$

Таким образом доказано, что система (16) является управляемой, если выполняется условие (17). $\square$

Рассмотрим систему для всяких пар индексов (k, j) таких, что k и j не являются четными числами одновременно, т.е.

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_{kj} \\ \dot{\eta}_{kj} \end{pmatrix} = A_{kj} \begin{pmatrix} \xi_{kj} \\ \eta_{kj} \end{pmatrix} + B_{kj} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \qquad (k, j) \in \overline{L}, \tag{18}$$

где $\overline{L} = \{(k, j) \in \mathbb{N}^2 : j$ – нечетное или k – нечетное$\}$.

Напомним [5], что система (18) является спектрально управляемой, если для любого конечного числа m и различных пар индексов $(k_p, j_p) \in \overline{L}$, где $p = \overline{1, m}$, соответствующая система (16) управляема.

Таким образом, из Утверждения 2 следует результат о спектральной управляемости системы (18).

Утверждение 3. *Система (18) является спектрально управляемой только тогда, когда для произвольного набора различных пар индексов* (k_1, j_1), (k_2, j_2), ..., $(k_R, j_R) \in \overline{L}$ *выполняются следующие условия:* $\beta_{k_1j_1}\beta_{k_2j_2}\dots\beta_{k_Rj_R} \neq 0$ *и при некотором* n*:* $0 \leq n \leq R$

$$\begin{vmatrix} \phi_{k_1j_1} & \phi_{k_2j_2} & \cdots & \phi_{k_Rj_R} \\ \beta^2_{k_1j_1}\phi_{k_1j_1} & \beta^2_{k_2j_2}\phi_{k_2j_2} & \cdots & \beta^2_{k_Rj_R}\phi_{k_Rj_R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta^{2(p-1)}_{k_1j_1}\phi_{k_1j_1} & \beta^{2(p-1)}_{k_2j_2}\phi_{k_2j_2} & \cdots & \beta^{2(p-1)}_{k_Rj_R}\phi_{k_Rj_R} \\ g_{k_1j_1} & g_{k_2j_2} & \cdots & g_{k_Rj_R} \\ \beta^2_{k_1j_1}g_{k_1j_1} & \beta^2_{k_2j_2}g_{k_2j_2} & \cdots & \beta^2_{k_Rj_R}g_{k_Rj_R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta^{2(q-1)}_{k_1j_1}g_{k_1j_1} & \beta^{2(q-1)}_{k_2j_2}g_{k_2j_2} & \cdots & \beta^{2(q-1)}_{k_Rj_R}g_{k_Rj_R} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Выводы. В работе предложена математическая модель управляемого движения механической системы, которая состоит из твердого тела и упругой пластины Кирхгофа. Отметим, что твердое тело вращается не вокруг фиксированной оси, а выполняет вращательное движение с тремя степенями свободы. Динамика этой системы описана с помощью уравнения в частных производных (6) с граничными условиями (2)–(4). Специальная форма граничных условий (2)–(4), которые отвечают шарнирно опертой пластине, позволяет разделить переменные x_1, x_2, t и свести задачу о собственных значениях бигармонического оператора Δ^2 к паре задач Штурма–Лиувилля второго порядка (7) и (8). Предлагается схема сведения уравнения движения с частными производными к бесконечной системе дифференциальных уравнений (12), а также получено в явном виде решение задачи Коши (13) для этой системы в линейном приближении.

Основными результатами работы являются Утверждение 2 об управляемости механической системы для произвольного конечного набора координат и Утверждение 3 о спектральной управляемости.

Представляет дальнейший интерес исследование точной управляемости системы (12) на инвариантном многообразии с использованием метода моментов.

1. *Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К.* Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами. – М.: Машиностроение, 1986. – 214 с.
2. *Zuyev A.L.* Approximate Controllability of a Rotating Kirchhoff Plate Model // Proc. 49th IEEE Conference on Decision and Control. – Atlanta (USA). – 2010. – P. 6944–6948.
3. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. – М: Физматгиз, 1961. – 824 с.
4. *Калман Р.Е.* Об общей теории систем управления // Тр. I конгресса ИФАК. – **2**. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 521–547.
5. *Lagnese J.E., Leugering G.* Controllability of Thin Elastic Beams and Plates // The control handbook (W.S. Levine ed.). – Boca Raton: CRC Press – IEEE Press, 1996. – P. 1139–1156.

A.L. Zuyev, Yu.V. Novikova

Small oscillations of a Kirchhoff plate with two-dimensional control

In this paper, a mechanical system model consisting of a rigid body and thin elastic plate is constructed. A reduction scheme that allows transforming the equations of motion with partial derivatives to an infinite system of ordinary differential equations is proposed. Controllability conditions are obtained for a model in a finite dimensional state space. Conditions of spectral controllability are studied as well.

Keywords: *Kirchhoff plate, Fourier method, controllability.*

О.Л. Зуєв, Ю.В. Новікова

Малі коливання пластини Кірхгофа з двовимірним керуванням

Побудовано модель механічної системи, що складається з твердого тіла та тонкої пружної пластини, а також запропоновано схему зведення рівнянь руху з частинними похідними до нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь. Одержано умови керованості моделі у скінченновимірному фазовому просторі, а також умови спектральної керованості.

Ключові слова: *пластина Кірхгофа, метод Фур'є, керованість.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины,
Донецкий национальный ун-т

al_zv@mail.ru, yuliya.novikova.88@mail.ru

Получено 09.09.11