НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ВЫПУСК
32

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Межведомственный сборник научных трудов Основан в 1969 г.

ДОНЕЦК 2002

ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2002. Вып. 32

УДК 62-50

©2002. **В.Н. Пилишкин**

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ

Для управления динамическими объектами из условия обеспечения фазовых ограничений предлагается метод синтеза на основе использования вспомогательных интегральных поверхностей, позволяющих перейти к приведенному движению. С помощью приведенного движения определяются условия обеспечения фазовых ограничений. Для класса однородных систем получен алгебраический критерий, соответствующий необходимым и достаточным условиям выполнения фазовых ограничений. Рассмотрены достаточные условия разрешимости задачи синтеза.

Введение. Построение различных систем управления с учетом фазовых и других ограничений представляет в настоящее время достаточно важный и широкий класс задач, как в практическом, так и в теоретическом плане. Это связано, прежде всего с тем, что функционирование самых разных систем, а также протекание тех или иных динамических процессов во многих случаях являются допустимыми в техническом плане только тогда, когда возможно их представление в рамках каких-либо фазовых ограничений. Несмотря на значительную распространенность данных задач, встречающихся в самых разных отраслях промышленности, техники, и большое число работ, в которых они рассматриваются [1 - 5], в настоящее время достаточно сложно указать такие подходы, в которых эти задачи эффективно решались бы. Учет фазовых ограничений обычно осуществляется косвенно [6, 7] либо это связано со значительными вычислительными трудностями [8]. Непосредственно учесть фазовые ограничения можно на базе методов, использующих функции Ляпунова [9], или с помощью специальных численных процедур, применяемых при сведении исходной задачи к задаче математического программирования [10]. Однако, и в этих случаях имеются серьезные трудности, связанные с разрешимостью задачи и эффективностью нахождения решения. При этом не всегда удается учесть дополнительные требования к синтезируемой системе, определяющие ее робастные свойства по отношению к окружающей среде и структурно-параметрическим возмущениям. В работах автора [11 - 13] рассматриваются метод вариации фазовых ограничений и метод вспомогательных интегральных поверхностей, позволяющие решать данную задачу. Предлагается дальнейшее развитие этих подходов, в результате которого для достаточно широкого класса систем получено необходимое и достаточное условие существования требуемого закона управления.

1. Постановка задачи. Будем считать, что рассматривается в достаточно общем случае следующая система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u,v,t), \\ x(t_0) &= x_0, \quad t \geq t_0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x, u, v-$ соответственно, $n\times1, m\times1, r\times1$ векторы состояния, управления, возмущения; $f(\cdot) - n\times1$ вектор-функция, удовлетворяющая условиям существования и единственности задачи Коши.

Систему (1) будем называть λ-однородной, если функцию $f(\cdot)$ можно представить в виде

$$f(x,u,v,t) = \Phi[f^1(x), f^2(u,v,t)],$$

где $f^1(\lambda) = \lambda f^1(x)$. Здесь $\lambda \in R^1$ – скалярный параметр; $\Phi(\cdot), f^1(\cdot), f^2(\cdot)$ – некоторые $n \times 1$ вектор-функции.

В дальнейшем задачу синтеза будем рассматривать для однородных систем. Допустим, что ограничения, накладываемые на динамику поведения системы (1), приводятся к виду

$$x = x(t) \in Q(t), \tag{2}$$

$$Q(t) = \big\{x \in R^n : \ \psi(x,t) \le 0\big\}, \ t \ge t_0, \tag{3}$$

$\psi(x,t)$ – непрерывно дифференцируемая в R^n скалярная функция. При этом $\Gamma Q(t)$ – граница множества $Q(t)$.

Ограничения на управление и возмущения имеют вид

$$u \in U(t) \subset R^m, \quad t \ge t_0, \tag{4}$$

$$v \in V(t) \subset R^{\,r}, \quad t \ge t_0. \tag{5}$$

Требуется для системы (1) сформировать такой допустимый в смысле (4) закон управления

$$u = \tilde{u}(x,t), \tag{6}$$

который бы обеспечивал желаемую динамику поведения системы в смысле (2) с учетом заданных ограничений (5).

2. Построение вспомогательных интегральных поверхностей. Без ограничения общности можно считать, что начало координат $O \in Q(t), t \ge t_0$. Кроме того, предполагается, что $Q(t)$ – выпуклое множество.

Пусть $x = x(t,x_0)$ – некоторая траектория системы (1), пересекающая множество $Q(t)$ в момент времени $t \ge t_0$, то есть $x(t,x_0) \in Q(t), \ t \ge t_0$. Через $z(t,z_0)$ обозначим траекторию, лежащую на границе $\Gamma Q(t)$: $z(t,z_0) \in \Gamma Q(t), \quad t \ge t_0$ и удовлетворяющую соотношению

$$z(t,z_0) = \frac{1}{\lambda} x(t,x_0), \quad z_0 = \frac{1}{\lambda} x_0, \tag{7}$$

где $\lambda = \lambda(t,x_0)$ – некоторая скалярная неотрицательная функция.

Очевидно, в силу выпуклости множества $Q(t)$ и выполнения условия (7), для произвольной траектории $x(t,x_0)$ всегда существует соответствующая только ей неотрицательная функция $\lambda(t,x_0)$, для которой траектория $z(t,x_0)$ удовлетворяет соотношению принадлежности границе $\Gamma Q(t)$ (см. рисунок, где для случая $n = 2$ проиллюстрировано данное свойство). Здесь $z^* = z(t^*,z_0), \ x^* = x(t^*,x_0)$.

Если $x(t,x_0) \in Q(t)$ в текущий момент времени $t \ge t_0$, то

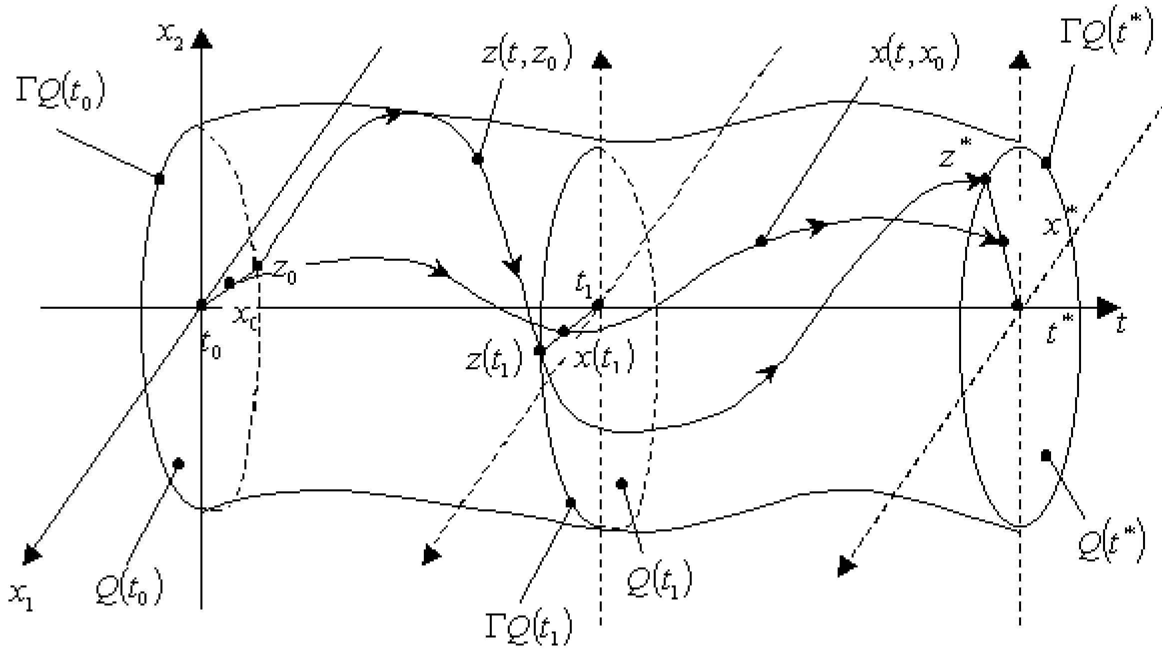
$$0 < \lambda(t,x_0) \le 1, \tag{8}$$

если же при $t \ge t_0 \ \ x(t,x_0) \notin Q(t)$, то

$$\lambda(t,x_0) > 1. \tag{9}$$

Определим поверхность, порожденную множеством $\Gamma Q(t)$, следующим образом:

$$\Omega(t_1,t_2) = \Big\{\Big[z^T t\Big]^T \in R^{n+1} : z \in \Gamma Q(t), \quad t \in [t_1,t_2]\Big\}.$$



Геометрическая иллюстрация свойства траекторий $x(t, x_0)$ и $z(t, x_0)$.

Поскольку $z(t, z_0) \in \Omega(t_0, \infty)$ $\forall z_0 \in \Gamma Q(t_0)$, то $\Omega(t_0, \infty)$ является интегральной поверхностью для каждой траектории $z(t, z_0)$.

Будем называть $\Omega(t_0, \infty)$ вспомогательной интегральной поверхностью (ВИП) для траекторий $x(t, x_0)$. Тогда $\Omega(t_1, t_2)$ – участок ВИП.

3. Основное соотношение на базе ВИП. Воспользуемся свойствами ВИП для решения поставленной задачи. Должно выполняться условие

$$\psi(z(t, z_0), t) = \psi\Big(\frac{x(t, x_0)}{\lambda(t, x_0)}, t\Big) \equiv 0 \quad \forall t \geq t_0.$$

Отсюда

$$\frac{d\psi(\cdot)}{dt} = (\nabla_x \psi, \dot{x}) + \frac{\partial \psi\Big(\dfrac{x}{\lambda}, t\Big)}{\partial t} + \frac{\partial \psi\Big(\dfrac{x}{\lambda}, t\Big)}{\partial \lambda}\dot{\lambda} \equiv 0, \tag{10}$$

где $(\nabla_x \psi, \dot{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \psi}{\partial t}\dot{x}_i$; $\dfrac{\partial \psi(\cdot)}{\partial \lambda} = -\dfrac{1}{\lambda^2}\Big(\nabla_{\frac{x}{\lambda}} \psi, x\Big)$; $\nabla_x, \psi(\cdot) = \dfrac{1}{\lambda}\nabla_{\frac{x}{\lambda}}\psi$. В результате (10) преобразуется к уравнению

$$\frac{1}{\lambda}\Big(\nabla_{\frac{x}{\lambda}} \psi, \dot{x}\Big) + \frac{d\psi}{dt} - \frac{1}{\lambda^2}\Big(\nabla_{\frac{x}{\lambda}} \psi, x\Big)\dot{\lambda} = 0,$$

которое приведем к эквивалентному выражению

$$\begin{gathered}\dot{\lambda} = \frac{(\nabla_z \psi, f(\lambda z, u, v, t))}{(\nabla_z \psi, z)} + \lambda\,\frac{\dfrac{\partial \psi}{\partial t}}{(\nabla_z \psi, z)} = \Phi(\lambda, z, u, v, t), \\ z(t_0) = z_0, \qquad \lambda(t_0) = \lambda_0.\end{gathered} \tag{11}$$

Если для некоторой траектории $z(t)$ при допустимых u, v решение уравнения (11) удовлетворяет условию

$$0 < \lambda(t) \leq 1 \quad \forall t \in [t_1, t_2], \tag{12}$$

то, согласно (11), получаем $x(t) \in Q(t), \quad t \in [t_1, t_2]$, что дает возможность сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. Если при любых допустимых значениях $v(\cdot)$ и произвольно выбираемой траектории $z(t) \in \Omega(t_1, t_2)$, то есть $z(t) \in \Gamma Q(t) \ \ \forall\ t \in [t_1, t_2]$, хотя бы для одного допустимого $u(\cdot)$ решения уравнения (11) удовлетворяют неравенству (12), то для траекторий системы (1) выполняются фазовые ограничения (2).

На основе этой теоремы можно учесть также тот случай, когда граница множества $Q(t)$ задается нечетко (под нечеткостью фазовых ограничений понимается неточность задания границы множества фазовых ограничений, когда в качестве границы одновременно могут использоваться различные поверхности уровня функции $\psi(x,t)$), или же, когда допускается в определенных пределах выход траектории $x(t)$ за пределы множества $Q(t)$.

Следствие. Для обеспечения нечетких фазовых ограничений вида (2) заданного уровня нечеткости на отрезке времени $[t_1, t_2]$ для системы (1) при выполнении условий теоремы 1 для решений уравнения (11) должно выполняться неравенство

$$0 < \lambda(t) \leq \lambda_{\max}, \qquad \lambda_{\max} \in [\lambda^-, \lambda^+], \qquad 1 \in [\lambda^-, \lambda^+].$$

4. Синтез однородных систем на основе достаточного условия. Рассмотрим следующий класс однородных систем

$$\Phi[f^1(\cdot), f^2(\cdot)] = f^1(x) + f^{2,1}(u) + f^{2,2}(v,t). \tag{13}$$

Причем управление $u = \tilde{u}(x,t)$ ищется в таком виде, чтобы обеспечивалась однородность функции $f(x, \tilde{u}(x,t), v, t)$. Очевидно, в этом случае можно записать

$$f(\lambda x, \tilde{u}(\lambda x, t), v, t) = \lambda f^1(x) + \lambda f^{2,1}(\tilde{u}(x,t), t) + f^{2,2}(v,t) = \lambda \tilde{f}^1(x,t) + f^{2,2}(v,t).$$

В частности, для однородной линейной системы

$$f(\cdot) = Ax + Bu + Dv, \tag{14}$$

если $y = Cx, \ u = KCx$ – $l \times 1$ вектор выхода, то

$$\tilde{f}^1(x,t) = \tilde{A}x, \qquad \tilde{f}^{2,2}(v,t) = Dv, \qquad \tilde{A} = A + BKC. \tag{15}$$

Тогда уравнение (11) примет вид

$$\dot{\lambda} = \lambda \frac{(\nabla_z \psi, \tilde{f}^1(z,t)) + \dfrac{\partial \psi}{\partial t}}{(\nabla_z \psi, z)} + \frac{(\nabla_z \psi, f^{2,2}(v,t))}{(\nabla_z \psi, z)}. \tag{16}$$

Обозначим

$$\varphi_0 = \frac{(\nabla_z \psi, f^{2,2}(v,t)) + \dfrac{\partial \psi}{\partial t}}{(\nabla_z \psi, z)}, \qquad \varphi_1 = \frac{(\nabla_z \psi, f^1(z,t)) + \dfrac{\partial \psi}{\partial t}}{(\nabla_z \psi, z)}. \tag{17}$$

С учетом (17) запишем уравнение (16): $\dot{\lambda} = \varphi_1\lambda + \varphi_0, \quad \lambda(t_0) = \lambda_0, \quad t \geq t_0$. Решением данного уравнения является

$$\lambda(t) = \lambda_0 \exp\Big(\int\limits_{t_0}^{t} \varphi_1(\tau)d\tau\Big) + \int\limits_{t_0}^{t} \exp\Big(\int\limits_{\tau}^{t} \varphi_1(\tau)d\tau\Big) \cdot \varphi_0(\tau)d\tau.$$

Тогда, в соответствии с теоремой 1, должно быть обеспечено

$$0 < \lambda_0 \exp\Big(\int\limits_{t_0}^{t} \varphi_1(\tau)d\tau\Big) + \int\limits_{t_0}^{t} \exp\Big(\int\limits_{\tau}^{t} \varphi_1(\tau)d\tau\Big)\varphi_0(\tau)d\tau \leq 1, \qquad (18)$$
$$\forall z(t) \in \Omega(t_0, t), \quad \forall v \in V, \quad \forall t \in [t_1, t_2].$$

Возможны различные подходы к непосредственному решению неравенства (18) относительно параметров регулятора. Они сводятся, в основном, к численному решению.

Однако, наиболее простым представляется следующий подход. Будем считать, что неопределенность по возмущению v можно представить в виде $v = G(x, g)$, где G – $r \times 1$ вектор-функция, для которой $f^{2,2}(G(x, g), t)$ однородна; g – векторный параметр, определенный в некотором диапазоне $[g^-, g^+]$, то есть $g \in [g^-, g^+]$. Тогда уравнение (16) становится таким

$$\dot{\lambda} = \lambda\tilde{\varphi}_1, \qquad \lambda(t_0) = \lambda_0, \quad t \geq t_0,$$

где
$$\tilde{\varphi}_1 = \frac{(\nabla_z\psi, f^1(z,t)) + f^{2,2}(G(z,g),t) + \dfrac{\partial\psi}{\partial t}}{(\nabla_z\psi, z)}.$$

Отсюда $\lambda(t) = \lambda_0 \exp\Big(\int\limits_{t_0}^{t} \tilde{\varphi}_1(z(\tau),\tau)d\tau\Big) \leq \lambda_{\max}$, что эквивалентно неравенству

$$\int\limits_{t_0}^{t} \tilde{\varphi}_1(z(\tau),\tau)d\tau \leq \ln\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_0} \quad \forall t \in [t_1, t_2], \quad z(t) \in \Omega(t_1, t_2). \qquad (19)$$

Неравенство (18) можно, в частности, решать путем его ужесточения, если потребовать, чтобы оно выполнялось $\forall z(t) \in \Omega(t_1, t_2)$. Тогда для достаточно широкого класса систем

$$\max_{z(\tau)\in\Omega(t_0,t)} \int\limits_{t_0}^{t} \tilde{\phi}_1(z(\tau),\tau)d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} \max_{z(\tau)\in\Omega(t_0,t)} \tilde{\phi}_1(z(\tau),\tau)d\tau \leq \ln\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_0} \quad \forall t \in [t_1, t_2]. \qquad (20)$$

Для линейных систем (14) неравенство (20) принимает вид

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\sum\limits_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq i}}^{n} |\hat{a}_{i\nu}|q_\nu(t) + \hat{a}_{ii}q_i(t) - \dot{q}_i(t)}{q_i(t)}dt \leq \ln\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_0}, \quad i \in \overline{1,n}, \quad t \in [t_1, t_2],$$

где $\hat{a}_{i\nu}$ – элементы матрицы $\hat{A} = \tilde{A} + DG$, при условиях: $|x_i| \le q_i(t),\ i \in \overline{1,n};\quad v = Gx$. В результате вначале решаем задачу минимизации, а затем непосредственно интегральное неравенство.

Для стационарных систем данные неравенства приводятся к виду

$$\hat{a}_{ii}\cdot(t-t_0) + \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq i}}^{n} |\hat{a}_{i\nu}| \int\limits_{t_0}^{t} \frac{q_\nu(\tau)}{q_i(\tau)} d\tau \le \ln\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_0} + \ln\frac{q_i(t)}{q_i(t_0)},\quad i\in\overline{1,n},\quad t\in[t_1,t_2].$$

5. Обобщенная задача синтеза для приведенных систем. Для анализа разрешимости неравенств (19), (20), а также для непосредственного решения можно сформировать достаточно общее условие в виде некоторого проверяемого алгебраического соотношения.

Продифференцировав выражение $x(t) = \lambda z(t)$, получаем $\dot{\lambda} z + \lambda\dot{z} = \dot{x}$. Отсюда, с учетом однородности (13) при выбираемых $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$, имеем $\tilde{\lambda}\varphi_1 z + \lambda z = \lambda\tilde{f}(z,t)$, где $\tilde{f}(\cdot) = \tilde{f}^1(z,t) + f^{2,2}(G(z,g),t)$, тогда

$$\dot{z} = \tilde{f}(z,t) - \tilde{\varphi}_1(z,t)z \tag{21}$$

представляет собой уравнение траектории на ВИП $\Omega(t_0,\infty)$. Так как $\psi(z(t),t)\equiv 0$, то $\psi(z,t)$ является первым интегралом неравенства (21). Таким образом, решения уравнения (21) удовлетворяют условию $z(t)\in\Gamma Q(t)\ \ \forall t\ge t_0,\ z(t_0)\in\Gamma Q(t_0)$. В результате приходим к следующей оптимизационной задаче

$$\begin{gathered}\max_{z(t)\in\Omega(t_0,\ t)} J = \max_{z(t)\in\Omega(t_0,\ t)} \int\limits_{t_0}^{t} \tilde{\phi}_1(z(\tau),\tau)d\tau \le \ln\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_0},\\ t\in[t_1,t_2]\quad \text{при}\ \ \dot{z} = \tilde{f}(z,t) - \tilde{\phi}_1(z,t)z,\end{gathered} \tag{22}$$

которая обобщает постановку исходной задачи синтеза и соответствует необходимому и достаточному условию обеспечения рассматриваемых фазовых ограничений.

6. Необходимое и достаточное условие разрешимости для приведенных систем. Анализ задачи (22) позволяет утверждать, что $\forall t\in[t_1,t_2]$ решением задачи является одна и та же оптимальная в смысле (22) $z^0(t)$, поскольку на траекториях, являющихся решением одного и того же уравнения (21), максимизируется один и тот же функционал.

Действительно, пусть для некоторого произвольного момента времени $t\in[t_1,t_2]$ траектория $z^0(t)$ является оптимальной, а $z(t)$ является решением (21) и

$$z(t) = z^0(t) + \delta z(t), \tag{23}$$

где $\delta z(t)$ – сколь угодно малая вариация траектории $z^0(t)$. Подставляя (23) в (21), при необходимых предположениях нетрудно получить уравнение

$$\begin{gathered}\dot{\hat{a}} = R(z^0,t)\hat{a},\\ R(z^0,t) = \nabla_z\tilde{f} - \tilde{\varphi}_1 E - z^0(\nabla_z\tilde{\varphi}_1)^T,\end{gathered} \tag{24}$$

где $\tilde{f} = \tilde{f}(z^0,t),\ \tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_1(z^0,t)$. Отсюда

$$\delta z(t) = \exp\Big(\int\limits_{t_0}^{t} R(z^0(\tau),\tau)d\tau\Big)\delta z_0 = \Phi_0(t,t_0)\delta z_0,\quad \delta z_0 = \delta z(t_0), \tag{25}$$

$\Phi_0(t,t_0)$ – переходная матрица уравнения (24), являющаяся, согласно [14], невырожденной.

Подставляя (23) в максимизируемый функционал (22), с учетом (25) нетрудно показать, что приращение функционала для траектории $z^0(t)$ должно удовлетворять равенству

$$\delta y = \int\limits_{t_0}^{t} (\nabla_z\tilde{\varphi}_1, \delta z) d\tau = \Big(\int\limits_{t_0}^{t} \Phi_0^T(\tau,t_0)\nabla_z\tilde{\varphi}_1 d\tau, \delta z_0\Big) = 0 \quad \forall \delta z_0, \tag{26}$$

отсюда следует, что вектор

$$s(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \Phi_0^T(\tau,t_0)\nabla_z\tilde{\varphi}_1 d\tau \tag{27}$$

должен быть ортогонален гиперплоскости, касательной к поверхности в точке $z_0^0 = z^0(t_0)$. Известно, что к $\Gamma Q(t_0)$ в точке z_0^0 ортогонален вектор $\nabla_z\psi(z_0^0,t_0)$. Поэтому можно записать

$$s(t) = \mu(t)\nabla_z\psi(z_0^0,t_0), \tag{28}$$

где $\mu(t)$ – скалярная функция, такая, что $\mu(t_0) = 0$.

Согласно [12], вектор $s(t)$ вида (26) является решением уравнения

$$\dot{s} = R^T s + \nabla_z\tilde{\varphi}_1, \qquad s(t_0) = 0, \quad t \geq t_0, \tag{29}$$

где R определяется в соответствии с (24). Отсюда с учетом (28) получим

$$\begin{gathered} (\dot{\mu}E - \mu R^T)\nabla_z\psi = \nabla_z\tilde{\varphi}_1, \\ t \geq t_0, \quad R = R(z^0(t),t), \quad \nabla_z\tilde{\varphi} = \nabla_z\tilde{\varphi}_1(z^0(t),t), \quad \nabla_z\psi = \nabla_z\psi(z_0^0,t_0). \end{gathered} \tag{30}$$

Соотношение (30) представляет собой *необходимое условие* оптимальности $z^0(t)$, доставляющей максимум функционалу y вида (22). Причем относительно самой траектории $z^0(t)$ соотношение (30) является алгебраическим. Из (30) следует, что при $t = t_0$

$$\dot{\mu}(t_0)\nabla_z\psi(z_0^0,t_0) = \nabla_z\tilde{\varphi}_1(z_0^0,t_0).$$

А отсюда, как нетрудно видеть, независимо от выбора значения $t \in [t_1,t_2]$, определяется конкретное значение z_0^0, которому соответствует единственная траектория $z^0(t)$. Таким образом $z^0(t)$, является одной и той же $\forall t \in [t_1,t_2]$. Если соотношения (30) реализовать затруднительно, то можно поступить следующим образом.

Поскольку $y(z^0(t)) \to \max \quad \forall t \in [t_1,t_2]$, то $y(z^0(t+\Delta t)) = y(z^0(t)) + \Delta y \to \max \quad \forall \Delta t$ при $t + \Delta t \in [t_1,t_2]$, а значит,

$$\Delta y \to \max \quad \forall \Delta t, \tag{31}$$

где $t + \Delta t \in [t_1,t_2]$. Выбирая Δt достаточно малым, из (22) получим

$$\Delta y = \tilde{\varphi}_1(z^0(t),t)\Delta t. \tag{32}$$

Из (31), (32) следует, что вдоль оптимальной траектории $z^0(t)$ функция $\tilde{\varphi}_1(z,t)$ в каждый момент времени должна принимать максимальное значение.

Так как при $\Delta t \to 0$ $\tilde{\varphi}_1\big|_{t+\Delta t} = \tilde{\varphi}_1\big|_t + \dot{\tilde{\varphi}}_1\big|_t \Delta t$, то получим $\tilde{\varphi}_1\big|_{t+\Delta t} \to \max$ тогда и только тогда, когда

$$\dot{\tilde{\varphi}}_1\big|_t \to \max \quad \forall t \in [t_1, t_2]. \tag{33}$$

С учетом того, что

$$\dot{\tilde{\varphi}}_1 = (\nabla_z \tilde{\varphi}_1, \dot{\tilde{z}}) + \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial t} = (\nabla_z \tilde{\varphi}_1, \tilde{f}(z,t) - \tilde{\varphi}_1(z,t)\ z) + \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial t}, \tag{34}$$

приходим к справедливости следующего результата.

Теорема 2. Для разрешимости задачи (22), а значит, для обеспечения фазовых ограничений (2) с учетом (4), (5) в классе λ-однородных систем (1) необходимо и достаточно, чтобы на решениях задачи

$$\max_z [(\nabla_z \tilde{\varphi}_1, \tilde{f}(\cdot) - \tilde{\varphi}_1 z) + \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial t}] \quad \text{при} \ \ z(t_0) = z_0 \in \Gamma Q(t_0), \quad t \geq t_0 \tag{35}$$

выполнялось неравенство

$$\min_{\tilde{u}(\cdot)} y(z^0(t), \tilde{u}^0(\cdot)) \leq \ln \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_0} \quad \forall t \in [t_1, t_2], \tag{36}$$

где $z^0(t)$ – решения задачи (35).

При этом следует отметить, что минимизация $\min\limits_{\tilde{u}^0}\{\cdot\}$ осуществляется непосредственно по параметрам, от которых зависит выбранная функция $u = \tilde{u}(\cdot) = \tilde{u}(x, \gamma, t)$ (γ – минимизирующий параметр; например, γ – это матрица обратной связи K).

7. Пример. Покажем, как на основе предлагаемого подхода осуществляется синтез законов управления. Для этого воспользуемся соотношениями, соответствующими достаточному условию синтеза. Пусть рассматривается горизонтальный полет самолета, задаваемый уравнениями

$$(p + n_{22})\alpha - p\nu = 0,$$

$$(n_0 p + n_{32})\alpha + (p^2 + n_{33} p)\nu = -n_b \delta_b,$$

где α – угол атаки, ν – угол тангажа, δ_b – угол отклонения руля высоты; $n_0 = 0,7$, $n_{22} = 2,5$, $n_{32} = 16$, $n_{33} = 2,2$, $n_b = 100$; $p = \dfrac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования. С помощью обозначений $x_1 = \alpha,\ x_2 = \nu,\ x_3 = \dot{\nu}$ систему уравнений приведем к виду

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} -n_{22} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ (n_0 n_{22} - n_{32}) & 0 & -(n_0 + n_{33}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -14,24 & 0 & -2,9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -n_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{bmatrix}.$$

Управление ищется в виде

$$u = kx = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3.$$

Пусть требуется обеспечить ограничения $|x_i| \le q_i(t), \quad i = 1, 2, 3$. Тогда в рассматриваемом случае неравенства, соответствующие достаточному условию разрешимости, $\forall t \in [t_1, t_2]$ будут следующими:

$$-2,5(t-t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{q_3(\tau)}{q_1(\tau)} d\tau \le \ln\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_0} + \ln\frac{q_1(t)}{q_1(t_0)}, \qquad \int\limits_{t_0}^{t} \frac{q_3(\tau)}{q_2(\tau)} d\tau \le \ln\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_0} + \ln\frac{q_2(t)}{q_2(t_0)}, \tag{37}$$

$$-(2,9+100k_3)(t-t_0) + |100k_2| \int\limits_{t_0}^{t} \frac{q_2(\tau)}{q_3(\tau)} d\tau + |14,25+100k_1| \int\limits_{t_0}^{t} \frac{q_1(\tau)}{q_3(\tau)} d\tau \le \ln\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_0} + \ln\frac{q_3(t)}{q(t_0)}.$$

Пусть $q_i(t) = d_i e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, 2, 3, \quad$ где $\lambda_i \le 0, \ d_i > 0$. Тогда неравенства (37) примут вид

$$\begin{gathered} -(\lambda_1 + 2,5)(t-t_0) + \frac{d_3}{d_1}\frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1}\left(e^{(\lambda_3-\lambda_1)t} - e^{(\lambda_3-\lambda_1)t_0}\right) \le \ln\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_0}, \\ -\lambda_2(t-t_0) + \frac{d_3}{d_1}\frac{1}{\lambda_3 - \lambda_2}\left(e^{(\lambda_3-\lambda_2)t} - e^{(\lambda_3-\lambda_2)t_0}\right) \le \ln\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_0}, \\ -(\lambda_3 + 2,9 + 100k_3)(t-t_0) + 100|k_2| \ \frac{d_2}{d_3}\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_3}\left(e^{(\lambda_2-\lambda_3)t} - e^{(\lambda_2-\lambda_3)t_0}\right) + \\ +|14,25 + 100k_1| \ \frac{d_1}{d_3}\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_3}\left(e^{(\lambda_1-\lambda_3)t} - e^{(\lambda_1-\lambda_3)t_0}\right) \le \ln\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_0}, \\ \forall t \in [t_1, t_2]. \end{gathered} \tag{38}$$

Нетрудно показать, что для разрешимости неравенств (38) достаточно положить

$$-2,5 \le \lambda_1 \le 0; \quad \lambda_2 = 0; \quad -\frac{d_3}{d_2}\frac{1}{\lambda_3}\exp(\lambda_3 t_0) \le \ln\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_0}; \quad \lambda_3 < \lambda_1.$$

Тогда синтезируемая матрица K имеет вид

$$k_1 = -0,1425; \quad k_2 = 0; \quad k_3 \ge -\frac{\lambda_3 + 2,9}{100}.$$

Если неравенства (38) рассматривать не для всех $\forall t \ge t_0$, а только на некотором отрезке $[t_1, t_2]$, то множество решений значительно расширяется.

8. Синтез на основе представления однородными моделями. Другой возможный подход к синтезу требуемого закона управления непосредственно основан на использовании уравнения (21). Так же, как и ранее, будем считать, что действующие на систему (1) возмущения можно представить в виде $v = G(x, g)$, где $G(\cdot)$ – некоторая вектор-функция, а g – векторный параметр с произвольными значениями на отрезке $G_0 = [g^-, g^+]$. Причем $G(\cdot)$ и G_0 выбираются таким образом, чтобы множество V возможных возмущений описывалось наиболее полным образом.

Пусть $u = \tilde{u}(x, t) \subset U$ – некоторый допустимый закон управления, обеспечивающий заданные фазовые ограничения (2) при действии возмущений (5). Имеем

$$\dot{x} = f(x, u, v, t) = f(x, \tilde{u}(x, t); \ G(x, g), t) = \tilde{f}(x, g, t),$$

$$x(t_0) = x_0 \in Q(t_0), \quad x(t) \in Q(t),\ t > t_0.$$

Поскольку $x(t) \in Q(t),\ \ t \geq t_0$, то можно указать такую поверхность $\Gamma\tilde{Q}(t) \subset Q(t)$ $\forall t \geq t_0$, что $x(t) \in \Gamma\tilde{Q}(t) \quad \forall t \geq t_0$. Считаем, что $\Gamma\tilde{Q}(t)$ является граничной поверхностью множества $\tilde{Q}(t) \subset Q(t),\ t \geq t_0$. Причем $0 \in \tilde{Q}(t)$.

Граничную поверхность $\Gamma\tilde{Q}(t)$ будем рассматривать как вспомогательную интегральную поверхность для некоторой однородной системы

$$\dot{y} = \hat{f}(y,t), \tag{39}$$

где $\hat{f}(\cdot)$ – $n \times 1$ вектор-функция, y – $n \times 1$ вектор состояния такой, что между траекториями $y(t)$ и $x(t)$ справедлива зависимость

$$y(t) = \lambda x(t). \tag{40}$$

Но выше было показано (см. (21)), что в этом случае движение по поверхности $\Gamma\tilde{Q}(t)$ должно описываться уравнением

$$\dot{x} = \hat{f}(x,t) - \varphi(x,t)\ x, \tag{41}$$

$$x(t_0) = x_0 \in \Gamma\tilde{Q}(t_0), \quad \varphi(x,t) = \frac{(\nabla_x\tilde{\psi}\hat{f}(x,t)) + \partial\tilde{\psi}/\partial t}{(\nabla_x\tilde{\psi}, x)},$$

где скалярная функция $\tilde{\psi}(x,t)$ определяет границу $\Gamma\tilde{Q}(t)$:

$$\Gamma\tilde{Q}(t) = \{x \in R^n : \tilde{\psi}(x,t) = 0\}. \tag{42}$$

Сравнивая уравнения (41) и (37), описывающие одну и ту же однородную систему, получаем тождество

$$\tilde{f}(x,g,t) \equiv \hat{f}(x,t) - \psi(x,t)\ x, \quad t \geq t_0. \tag{43}$$

В результате приходим к следующей теореме.

Теорема 3. Для разрешимости задачи синтеза достаточно, чтобы существовали такая однородная система (39) и замкнутая граничная поверхность $\Gamma\tilde{Q}(t_0)$ (42), которые обеспечивают разрешимость тождества (43) для системы (37).

Соотношение (43) можно представить в виде уравнения относительно функции $\hat{f}(\cdot)$:

$$R\hat{f} = \tilde{f} - r, \tag{44}$$

где $R = E - \dfrac{1}{(\nabla_x\tilde{\psi}, x)}\ x(\nabla_x\tilde{\psi})^T, \quad r = -\dfrac{\partial\tilde{\psi}/\partial t}{(\nabla_x\tilde{\psi}, x)}\ x$. Тогда синтез сводится к анализу разрешимости уравнения (44) относительно однородной функции $\hat{f}(\cdot)$.

Из (43) получим также тождество

$$\lambda[(\nabla_x\tilde{\psi}(\lambda x,t), x)E - x(\nabla_x\tilde{\psi}(\lambda x,t))^T]\hat{f}(x,t) \equiv$$

$$\equiv \lambda\tilde{f}(\lambda x,t)(\nabla_x\tilde{\psi}(\lambda x,t), x) + x\frac{\partial\tilde{\psi}(\lambda x,t)}{\partial t}] \quad \forall\lambda \in R^1,$$

которое можно разрешать относительно $\hat{f}(\cdot)$.

Заключение. Предложенный подход, основанный на применении вспомогательных интегральных поверхностей, позволяет получать конструктивные соотношения на параметры синтезируемого робастного регулятора. При этом непосредственно учитываются самые различные ограничения: на состояние системы, на управление, на возмущения. Метод может эффективно использоваться для нестационарных и нелинейных систем путем сведения ограничений и систем произвольного порядка к некоторому скалярному уравнению, для решения которого и формируется эквивалентное неравенство.

Для класса λ-однородных систем, к которому относятся все линейные системы, а также часть нелинейных систем, установлены некоторые важные свойства, согласно которым можно сформировать приведенную систему с заданной интегральной поверхностью. На основе приведенной системы формулируется обобщенная задача синтеза требуемого закона управления в виде некоторой оптимизационной задачи. Решение этой задачи позволяет получить необходимое и достаточное условие существования робастного управления в виде некоторого параметрического алгебраического соотношения, для решения которого могут использоваться стандартные подходы.

Класс однородных систем может быть существенно расширен, если по аналогии с λ-однородностью ввести $\mu(\lambda)$-однородность $(F(\lambda x) = \mu(\lambda)F(x))$. Тогда также могут использоваться аналитические соотношения, полученные в данной работе, или некоторые их обобщения.

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* – Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1969. – 384 с.
2. *Беллман Р.* Динамическое программирование. – М.: ИЛ, 1960. – 400с.
3. *Кунцевич В.М., Лычак М.М.* Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
4. Справочник по теории автоматического управления /Под ред. *А.А. Красовского*.–М.: Наука, 1987. –712 с.
5. *Ковалев А.М.* Управляемость динамических систем по части переменных. – Прикл. математика и механика. – 1993. – **57**. N 6. – С. 41-50.
6. *Летов А.М.* Математическая теория процессов управления. – М.: Наука, 1981. – 253 с.
7. *Hartl R.F., Sethi S.P., Vicson R.G.* A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints // SIAM, Rev. – 1995. – **37**, N 2. – P.181-218.
8. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. – М.: Мир, 1979
9. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980. – 300 с.
10. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задачи оптимального управления. - М.: Наука, 1978. – 487 с.
11. *Pilishkin V.N., Pupkov K.A.* Robust Control System Design using phase-constraints Variation Approach // Proceedings of the European Control Conference. – Karlsruhe, Ger-many, 1999. – Session BP-13, N F614. – P. 1-5.
12. *Pilishkin V.N.* Management of the limited dynamic processes on the basis of the variation on auxiliary integrated surfaces // Proceedings of the European Control Conference. – Porto, Portugal, 2001. – P. 2215-2220.
13. *Pilishkin V.N.* Phase constraints variation method for synthesis of nonlinear systems // 2001 IEEE Joint International Conference on Control Applications & International Symposium on Intelligent Control. – Mexico City, Mexico, 2001. – P. 504-508.
14. *Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч.* Пространство состояний в теории управления. – М.: Наука, 1970. – 620 с.

Московский гос. техн. ун-т им. Н.Э.Баумана, Россия
`pilishkin@hotmail.com`

Получено 30.10.2002